Contribution à l'étude des ensembles de distances de points.

Par

Stanisław Ruziewicz (Léopol = Lwów)

M. Steinhaus a posé la question suivante:

„*Que ce qu'on sait sur un ensemble linéaire, tel qu'aucun point équidistant entre deux points quelconques de cet ensemble ne lui appartient pas?*

Le but de cette Note est de répondre à cette question.

Remarquons que l'ensemble en question peut être non mesurable; il peut être aussi mesurable et de puissance du continu. Ces deux cas nous fournit la *base* de M. Hamel qui, comme l'ont prouvé MM. Burstin [1]) et Sierpiński [2]), peut être non mesurable ou bien de mesure nulle (Lorsque x et y sont des nombres de la base, $\frac{y-x}{2}$ n'appartient pas à la base).

Cependant l'ensemble en question ne peut être de mesure intérieure positive, comme il résulte du théorème suivant:

Pour tout système de n nombres réels positifs $k_1, k_2, \ldots, k_n$ il existe dans tout ensemble de mesure positive un nombre positif d et $n+1$ points de cet ensemble, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$, tels qu'on a $x_{i+1} - x_i = k_i d$, pour $i = 1, 2, \ldots n$.

Démonstration. Soit P un ensemble linéaire borné [3]) de mesure positive. Le nombre naturel n étant donné, on peut toujours

[1]) C. Burstin: *Sitzungsber d. Akad. d. Wiss. in Wien* Bd. 125. (1916).

[2]) W. Sierpiński: *Fundamenta Mathematicae* t. I. (1920) p. 105 ss.

[3]) L'hypothèse que l'ensemble est borné peut être faite sans diminuer la généralité du théorème.

déterminer un segment δ, tel qu'en désignant par E la partie de P contenue dans δ, on ait

(1) $$m(E) > \delta - \frac{\delta}{2^{n+2}}.$$

Soit maintenant d un nombre réel satisfaisant aux inégalités

(2) $$0 < d < \frac{\delta}{2^{n+2}k_1 + 2^{n+1}k_2 + \ldots + 2^2 k_n}.$$

Nous désignerons par X_α l'ensemble qu'on obtient de l'ensemble X par une translation de longuer α en direction négative. Posons

$$k_i\, d = h_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nous avons, comme on voit sans peine, l'inégalité

$$\delta + h_1 \geqslant m(E) + m(E_{h_1}) - m(EE_{h_1}) = 2m(E) - m(EE_{h_1}),$$

d'où, d'après (1):

$$m(EE_{h_1}) \geqslant 2m(E) - \delta - h_1 > \delta - \frac{\delta}{2^{n+1}} - h_1.$$

Une translation (en direction négative) de l'ensemble EE_{h_1} de longueur h_2 nous donne pareillement l'inégalité:

$$\delta + h_1 + h_2 \geqslant 2m(EE_{h_1}) - m^*[(EE_{h_1}).(EE_{h_1})_{h_2}],$$

d'où:

$$m[(EE_{h_1}).(FE_{h_1})_{h_2}] \geqslant \delta - \frac{\delta}{2^n} - 3h_1 - h_2,$$

et, puisque

$$EE_{h_1}E_{h_1+h_2} \supset (EE_{h_1}).(EE_{h_1})_{h_2},$$

nous avons, à plus forte raison:

$$m(EE_{h_1}E_{h_1+h_2}) \geqslant \delta - \frac{\delta}{2^n} - 3h_1 - h_2.$$

En faisant une translation da l'ensemble $EE_{h_1}E_{h_1+h_2}$ de longueur h_3 et en procédant ainsi de suite, nous arrivons (par l'induction facile) à l'inégalité

$$m(EE_{h_1}E_{h_1+h_2}\ldots E_{h_1+h_2+\ldots+h_n}) \geqslant$$
$$\geqslant \delta - \frac{\delta}{2^2} - (2^n - 1)h_1 - (2^{n-1} - 1)h_2 - \ldots - h_n,$$

donc à plus forte raison:

$$m(EE_{h_1}\ldots E_{h_1+h_2+\ldots+h_n}) > \frac{3\delta}{4} - (2^n h_1 + 2^{n-1}h_2 + \ldots + h_n),$$

ce qui donne, d'après (2), l'inégalité

$$m\,(EE_{k_1}\ldots E_{k_1+k_2+\ldots+k_n}) > \frac{\delta}{2}$$

Il existe donc une infinité de points x de l'ensemble P (et on en peut même choisir un ensemble de mesure positive), tels que

$$x\,\varepsilon\,P, \quad x+k_1\,d\,\varepsilon\,P, \ldots\, x+k_n\,d\,\varepsilon\,P, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Posons, en particulier, $n=1$, $k_1=1$.

En déterminant le nombre d de sorte qu'il satisfait aux inégalités

$$0 < d < \frac{\delta}{2^3},$$

nous aurons pour tout tel d au moins un couple de points dont la distance est d. Il en résulte immédiatement ce théorème de M. Steinhaus [1]):

L'ensemble des distances d'un ensèmble de mesure positive contient un intervalle entier, dont l'extrémité gauche est le point zéro.

[1]) H. Steinhaus: *Fund. Math.* t. I, p. 99. th. VIII.