# Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier.

Par

A. Kolmogoroff (Moscou).

M. Privaloff[1]) a démontré le théorème suivant:

Si $f(\theta)$ est une fonction sommable, si de plus

$$f(\varrho, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2-2\varrho\cos(\alpha-\theta)} d\alpha,$$

alors, $z$ tendant vers $e^{i\theta}$ le long d'un chemin quelconque non tangent à la circonférence, la fonction harmonique $g(z)$ conjuguée à $f(z)$ tend pour presque toutes les valeurs de $\theta$ vers une limite déterminée

$$g(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(\theta+\alpha)}{tg\frac{\alpha}{2}} d\alpha,$$

l'intégrale étant comprise comme

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\pi}.$$

En général $g(\theta)$ est une fonction non sommable[2]). Je démontre dans cette note que la fonction $|g(\theta)|^{1-\varepsilon}$ est sommable pour $\varepsilon > 0$ (théorème II). Comme une conséquence immédiate, je démontre un théorème (III) sur la convergence en moyenne de la série de Fourier; on peut déduire de ce théorème que toutes les séries de Fourier-Lebesgue convergent en mesure.

[1]) „L'intégrale de Cauchy" Saratoff, 1919, en russe.

[2]) Lusin, „L'intégrale et la série trigonométrique", Moscou, 1915, p. 188.

**Théorème I.** *Considérons l'ensemble $E$ de tous les points $\theta$ pour lesquels on a $|g(\theta)| > R$, $R$ étant un nombre arbitraire. Dans ces conditions on a:*

$$\operatorname{Mes} E \cdot R < C \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\theta)|\, d\theta,$$

*où $C$ est une constante absolue.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons qu'il n'existe aucune constante $C$ vérifiant les conditions indiquées. Dans ce cas, pour chaque $n$, il existe une fonction $f_n(\theta)$, un ensemble $E_n$ et une constante $R_n$ tels que l'on a:

1) $g_n(\theta) > R_n$, si $\theta$ appartient à l'ensemble $E_n$,
2) $\operatorname{Mes} E_n \cdot R_n > n$,
3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} |f_n(\theta)|\, d\theta < 1.$

On peut, de plus, supposer les fonctions $f_n(\theta)$ et $g_n(\theta)$ continues; on peut, par exemple, poser $\bar{f}_n(z) = f_n(z\varrho)$, $\bar{g}_n(z) = g_n(z\varrho)$, ou $\varrho < 1$, mais $1 - \varrho$ est assez petit pour vérifier les conditions 1), 2), 3).

On peut démontrer sans peine, en prenant, s'il est nécessaire, plusieurs $n_k$ consécutifs égaux entre eux, l'existence d'une suite $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots,$ vérifiant les conditions suivantes:

$$\lim_{k=\infty} n_k = \infty,$$

(A) la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Mes} E_{n_k}$ diverge,

la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Mes} E_{n_k}}{\sqrt{n_k}}$, converge.

Donc, en posant $a_k = \dfrac{\sqrt{n_k}}{R_{n_k}} < \dfrac{\operatorname{Mes} E_{n_k}}{\sqrt{n_k}}$, on a:

(B) la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge,

(C) $\displaystyle\lim_{k=\infty} a_k R_{n_k} = \infty.$

Considérons la somme ($p_n$ — nombres entiers)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{n_k}(z^{p_k}) = \varphi(z). \tag{1}$$

Cette série converge presque partout sur le cercle $\varrho = 1$ vers une fonction sommable $\varphi(\theta)$, car on a en vertu de 3),

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}|a_k f_{n_k}(e^{ip_k\theta})|\,d\theta < \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

et vers l'intégrale de Poisson de cette fonction dans l'intérieur du cercle. La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k g_{n_k}(Z^{p_k}) = \psi(Z) \tag{2}$$

converge vers la fonction conjugúee $\psi(Z)$ à l'intérieur du cercle.

On peut déterminer deux suites

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots \to \infty,$$
$$\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_k < \ldots \to 1,$$

vérifiant les conditions suivantes:

I. Si $E_k$ est l'ensemble des points $e^{i\theta}$ tels que les points $e^{ip_k\theta}$ appartiennent à l'ensemble $E_{n_k}$ et si $E$ est l'ensemble limite complet des $E_k$, on a

$$\text{Mes}\, E = 2\pi.$$

II. Pour toute valeur de $\theta$ et $1 > \varrho \geqslant \varrho_k$, on a:

$$\left|\sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q}[(\varrho e^{i\theta})^{p_q}] - \sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q}[(e^{i\theta})^{p_q}]\right| < 1,$$
$$|a_k g_{n_k}[(\varrho e^{i\theta})^{p_k}] - a_k g_{n_k}[(e^{i\theta})^{p_k}]| < 1.$$

III. Pour tous les $\theta$ et $\varrho \leqslant \varrho_k$. on a:

$$\left|\sum_{q=k+1}^{\infty} a_q g_{n_q}[(\varrho e^{i\theta})^{p_q}]\right| < 1.$$

En effet: 1) on peut démontrer, que la condition I est remplie, si les nombres $p_k$ croissent assez rapidement [1]); 2) étant donnés $p_1$, $p_2, \ldots, p_k$ on peut choisir $\varrho_k$ tel que la condition II soit remplie

[1]) La démonstration est longue; elle peut être basée sur la divergence de la série $A$ et la remarque suivante: les ensembles $E_1 E_2 \ldots E_{k-1}$ étant mesurables, on peut choisir $p_k$ si grand que l'ensemble $E_k$ soit disposé assez uniformement sur la circonférence, pour rendre les mesures des intersections $E_1 E_2 \ldots E_{k-1}$ avec $E_k$ proches de produits des mesures.

en vertu de la continuité des fonctions $g_n(\theta)$; 3) la condition III se trouve remplie par le choix des $p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3} \dots$ assez grands, pour que $\varrho_k^{p_{k+1}}, \varrho_k^{p_{k+2}}, \varrho_k^{p_{k+3}} \dots$ soient assez proches de zéro pour remplir la condition, car $g_n(0) = 0$.

Considérons un point $\theta$ de la circonférence appartenant à l'ensemble $E_k$.

$$\psi(\varrho_k, \theta) = \sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q}[(\varrho_k e^{i\theta})^{p_q}] + a_k g_{n_k}[(\varrho_k e^{i\theta})^{p_k}] + .$$

$$+ \sum_{q=k+1}^{\infty} a_q g_{n_q}[(\varrho_k e^{i\theta})^{p_q}] = \sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q}[e^{ip_k\theta}] + a_k g_{n_k}[e^{ip_k\theta}] + \tau,$$

$$|\tau| < 3,$$

$$\psi(\varrho_{k-1}, \theta) = \sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q}[(\varrho_{k-1} e^{i\theta})^{p_k}] + \sum_{q=k}^{\infty} a_q g_{n_q}[(\varrho_{k-1} e^{i\theta})^{p_k}] =$$

$$= \sum_{q=1}^{k-1} a_q g_{n_q}[e^{ip_k\theta}] + \tau', \ |\tau'| < 2,$$

en vertu de III et II. On a par conséquent:

$$|\psi(\varrho_k, \theta) - \psi(\varrho_{k-1}, \theta)| < |a_k g_{n_k}[e^{ip_k\theta}]| - 5 > |a_k R_{n_k}| - 5.$$

De là il résulte (voir I et (C)), que pour tous les points $\theta$ de l'ensemble $E$, $\psi(\varrho, \theta)$ ne tend pas vers une limite, $\varrho$ tendant vers l'unité. La contradiction avec le résultat de M. Privaloff démontre le théorème.

**Théoreme II.** *Pour* $1 > \varepsilon > 0$, *on a*

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |g(\theta)|^{1-\varepsilon}\, d\theta < \frac{C}{\varepsilon} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\theta)|\, d\theta,$$

*$C$ étant une constante absolue.*

La démonstration peut se baser sur la remarque suivante: la mesure de l'ensemble, sur lequel $|g(\theta)| > R$, est moindre que la mesure de l'ensemble sur lequel $\left|\frac{1}{\theta}\right| > R$, multipliée par $C \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\theta)|\, d\theta$, et la fonction $\left|\frac{1}{x}\right|^{1-\varepsilon}$ est sommable.

**Théoreme III.** *Si $f(x)$ est une fonction sommable et $S_n$ est la somme des $n$ premiers termes de sa sérle de Fourier, on a*

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi}|f(x)-S_n(x)|^{1-\varepsilon}dx=0 \tag{1}$$

*pour* $1>\varepsilon>0$ [1].

Démonstration. Il est connu, que

$$S_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{f(x+\alpha)}{\alpha}\sin n\alpha\, d\alpha+\omega_n(x),$$

où $\omega_n(x)$ tend vers zéro uniformement. D'une manière analogue on peut écrire:

$$S_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{f(x+\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\sin n\alpha\, d\alpha+\omega_n'(x),$$

$w_n'\to 0$ uniformement.

Donc: $S_n-\omega_n'=$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{f(x+\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\sin n\alpha\, d\alpha=\frac{\cos nx}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{f(x+\alpha)\sin n(x+\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}d\alpha-$$

$$-\frac{\sin nx}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{f(x+\alpha)\cos n(x+\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}d\alpha,$$

les intégrales étant prises comme $\lim\limits_{\varepsilon=0}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}+\int_{+\varepsilon}^{+\pi}$.

Si $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont les fonctions conjuguées de

$$f(x)\sin nx,\ f(x)\cos nx,$$

nous avons:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}|S_n(x)|^{1-\varepsilon}dx<\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\left|\frac{\cos nx}{2\pi}\varphi(x)\right|+\left|\frac{\sin nx}{2\pi}\psi(x)\right|+\left|\omega_n'(x)\right|\right)^{1-\varepsilon}dx<$$

$$<\int_{-\pi}^{+\pi}(|\varphi(x)|^{1-\varepsilon}+|\psi(x)|^{1-\varepsilon}+|\omega_n'(x)|^{1-\varepsilon})\,dx<$$

[1]) Pour $\varepsilon=0$ cela est inexact; voir Steinhaus, „Sur la convergence en moyenne", Comptyrend de l'Acad. de Cracovie, 1918.

$$< \int_{-\pi}^{+\pi} \left( \frac{C}{\varepsilon} |f(x) \sin nx| + \frac{C}{\varepsilon} |f(x) \cos nx| + |\omega'_n(x)^{1-\varepsilon} \right) dx <$$

$$(2) \qquad < \frac{2C}{\varepsilon} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|\, dx + \int_{-\pi}^{+\pi} |\omega'_n(x)|^{1-\varepsilon} dx.$$

On peut pour $h > 0$ arbitraire former deux fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, telles qu'on ait:

1. $f'(x) + f''(x) = f(x)$.
2. $\int_{-\pi}^{+\pi} |f''(x)|\, dx < \frac{h\varepsilon}{4C}, \int_{-\pi}^{+\pi} |f''(x)|^{1-\varepsilon} dx < \frac{h}{2}$.
3. $f'(x)$ est continue; alors elle vérifie la condition (1).

En appliquant la formule (2) à $f''(x)$ et en désignant par $S'_n$, $S''_n$ les sommes partielles des séries de Fourier de $f'(x)$, $f''(x)$, nous avons:

$$\limsup_{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x) - S_n(x)|^{1-\varepsilon} dx < \limsup \int_{-\pi}^{+\pi} |f'(x) - S'_n(x)|^{1-\varepsilon} dx +$$

$$+ \int_{-\pi}^{+\pi} |f''(x)|^{1-\varepsilon} dx + \limsup \int_{-\pi}^{+\pi} |S''_n|^{1-\varepsilon} dx < h.$$

Cela démontre le théorème.

Moscou, Février 1923.