Bemerkung zum Begriff der geordneten Menge.

Von

Adolf Fraenkel (Marburg a. d. Lahn).

Im zweiten Band (1920) der Fundamenta Mathematicae (p. 161) gibt Herr C. Kuratowski zu der Hessenbergschen Definition des Ordnungsbegriffs in der Mengenlehre eine Modifikation an, die eine wesentliche Vereinfachung darstellt und für die Axiomatisierung der Theorie der geordneten Mengen von Bedeutung ist [1]). Er weist bei dieser Gelegenheit darauf hin, dass eine vielbeachtete Wiedergabe der Hessenbergschen Bedingungen (im Anschluss an einen Aufsatz des Herrn Hartogs: Math. Annalen, Bd. 76 [1915], S. 443) unvollständig ist. Dabei bestimmt nämlich eine ordnende Menge von M eine (im üblichen Sinne verstandene) Ordnung von M zwar eindeutig, nicht aber umkehrbar eindeutig; zu der nämlichen Ordnung kann es vielmehr verschiedene ordnende Mengen geben.

Es zeigt sich nun, dass auch das System der vollständigen Bedingungen Herrn Hessenbergs, wie es a. a. O. von Kuratowski wiedergegeben wird, noch den nämlichen Mangel aufweist. Um eine eindeutige Bestimmung der ordnenden Menge zu erzielen, muss man eine (übrigens sehr einfache) weitere Bedingung hinzufügen. Damit erscheint die Herrn Kuratowski zu verdankende Vereinfachung noch wesentlicher.

Um zu zeigen, dass mit der neu anzufügenden Bedingung die Hessenbergsche Definition endgültig vervollständigt ist, werde

[1]) Vgl. meinen Aufsatz *Axiomatische Begründung der geordneten Mengen* in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft, XXIV. Jahrgang (1925).

die Gleichwertigkeit der ergänzten Hessenbergschen und der Kuratowskischen Definition bewiesen, also der folgende Satz:

Eine Menge $\mathfrak{M}$ *von abnehmenden Teilmengen von* M *(de sous-ensembles décroissants de* M*) genügt nach Weglassung der Nullmenge*[1] *dann und nur dann der Kuratowskischen Bedingung* 6 (der Bedingung, eine möglichst umfassende Menge jener Art, zu sein, d. h. von keiner gleichartigen Menge als echte Teilmenge umfasst zu werden), *wenn* $\mathfrak{M}$ *folgende Eigenschaften besitzt:*

1) *Sind* m *und* m' *zwei beliebige Elemente von* M, *so gibt es mindestens ein Element von* $\mathfrak{M}$, *das ein einziges der Elemente* m *und* m' *enthält;*

2) *ist* $\mathfrak{M}'$ *eine beliebige Teilmenge von* $\mathfrak{M}$ *so sind die Vereinigungsmenge* $\mathfrak{S}\,\mathfrak{M}'$ *und der Durchschnitt* $\mathfrak{D}\,\mathfrak{M}'$ *Elemente von* $\mathfrak{M}$;

3) M *selbst und die Nullmenge* 0 *sind Elemente von* $\mathfrak{M}$.

Dass diese Eigenschaften *notwendig* sind, ist in der Note Kuratowskis enthalten. Es ist also nur zu zeigen dass sie auch *hinreichend* sind.

Die Eigenschaft 3) war bisher ausser acht gelassen worden. Sieht man von ihr ab, so ist, falls die geordnete Menge ein erstes (bezw. letztes) Element besitzt, die Menge aller ihrer Reste ausschliesslich M (bezw. ausschliesslich 0) eine ordnende Menge im Hessenbergschen, nicht aber im Kuratowskischen Sinn. Im ersteren Sinn gehören in diesen Fällen zur nämlichen Ordnung von M verschiedene ordnende Mengen.

Der Beweis des obigen Satzes werde auf der axiomatischen Grundlage geführt, auf der ich jüngst die Aequivalenztheorie entwickelt habe[2]. Demgemäss wird namentlich der folgende Hilfssatz verwandet:

Ist $\varphi(x)$ *eine Funktion (in dem a. a. O. gekennzeichneten Sinn), so entsteht aus einer Menge* N, *falls jedes Element* y *von* N *durch* $\varphi(y)$ *ersetzt wird, wiederum eine Menge, vorausgesetzt dass eine Menge* Q *existiert, der alle jene* $\varphi(y)$ *als Elemente angehören.*

$\mathfrak{M}$ sei nun eine Menge von abnehmenden Teilmengen von M,

[1]) Diese Weglassung ist nötig, weil Kuratowski aus äusseren Gründen die Nullmenge ausschliesst.

[2]) Math. Zeitschrift, Bd. 22 (1925), S 250—273. Es handelt sich namentlich um die dortige Fassung des Axioms der Aussonderung. Eine Entwicklung der Theorie der geordneten Mengen auf derselben Grundlage wird im Journal f. d. reine und angew. Math. erscheinen.

die die angeführten drei Eigenschaften besitzt. Ferner bezeichne M' eine sonst beliebige Teilmenge von M mit der Eigenschaft, dass jedes einzelne Element von $\mathcal{M}$ entweder Teilmenge von M' ist oder umgekehrt M' als Teilmenge umfasst. Um die Kuratowskische Bedingung 6 für $\mathcal{M}$ als erfüllt nachzuweisen, ist zu zeigen, dass $M' \varepsilon \mathcal{M}$, wobei wegen Eigenschaft 3) M' als von M und 0 verschieden angenommen werden kann. D' sei der Durchschnitt all der Elemente y von $\mathcal{M}$, die M' als Teilmenge umfassen, also [1]).

$$D' = \mathfrak{D}\, M_{M'\mathfrak{U}\varepsilon y} = \mathfrak{D}\, \overline{M}.$$

Nach Eigenschaft 2) ist $D' \varepsilon \mathcal{M}$, nach 3) ist $\overline{\mathcal{M}} \neq 0$ (da z. B. $M \varepsilon \overline{\mathcal{M}}$), und nach der Definition von D' ist M' Teilmenge von D'. Es soll gezeigt werden, dass $M' = D'$.

m sei ein beliebiges *nicht* zu M' gehörendes, von nun an festes Element von M, von dem also nachzuweisen ist, dass es auch nicht zu D' gehört. Zu jedem Element m' von M' bezeichne $\mathcal{M}'$ die Menge aller der Elemente von $\mathcal{M}$, die m', aber nicht m enthalten; dann ist $\mathcal{M}'$ im erwähnten Sinn eine Funktion von m'. $\mathcal{M}'$ ist ferner für jeden Wert von m' eine von 0 verschiedene Teilmenge von $\mathcal{M}$; denn nach der ersten der vorausgesetzten Eigenschaften gäbe es andernfalls mindestens ein Element μ von $\mathcal{M}$, das umgekehrt zwar m, aber nicht m' enthielte, und es könnte dann weder μ Teilmenge von M' noch M' Teilmenge von μ sein im Widerspruch mit der zu Beginn dieser Seite gemachten Annahme. Schliesslich ist $\mathfrak{S}\mathcal{M}'$ nach Eigenschaft 2) ein Element von $\mathcal{M}$, das ebenfalls m', aber nicht m enthält [2]); als Funktion von m' aufgefasst, sei $\mathfrak{S}\mathcal{M}'$ mit $\varphi(m')$ bezeichnet. Ersetzt man nun in M' jedes Element m' durch $\varphi(m')$, so entsteht nach dem vorausgeschickten Hilfssatz eine Teilmenge $\mathcal{M}_0$ von $\mathcal{M}$, und nach Eigenschaft 2) ist $\mathfrak{S}\mathcal{M}_0$ wieder ein Element von $\mathcal{M}$; $\mathfrak{S}\mathcal{M}_0$ enthält alle Elemente von M', aber nicht m. Nach der Definition von D' ist also D' Teilmenge von $\mathfrak{S}\mathcal{M}_0$, d. h. auch die (im Gegensatz zu $\mathfrak{S}\mathcal{M}_0$ von m unabhängige) Menge D' enthält (wie $\mathfrak{S}\mathcal{M}_0$) m *nicht* als Element. Nach dem Beginn dieses Absatzes besagt das $D' = M'$, q. e. d.

[1]) $\mathfrak{U}N$ bedeutet wie üblich die Menge aller Teilmengen von N; für die Bezeichnung vergleiche man das Axiom der Aussonderung, a. a. O.

[2]) Schon diese Menge $\mathfrak{S}\mathcal{M}'$ hat die Eigenschaft der nachher eingeführten Menge $\mathfrak{S}\mathcal{M}_0$ und könnte zum Abschluss des Beweises dienen. Die Herleitung dieser Tatsache ist indes nicht kürzer als der Umweg über $\mathcal{M}_0$.