Sur les fonctions d'ensemble additives et continues.

Par

Gr. Fichtenholz (Leningrad).

Soit $f(E)$ une fonction d'ensemble, définie pour les sous-ensembles mesurables (L) d'un ensemble borné E_0 de points dans l'espace à m dimensions. Elle est dite *additive* dans E_0, si l'on a toujours la relation

$$f(E_1+E_2)=f(E_1)+f(E_2),$$

quels que soient les sous-ensembles E_1, E_2 de E_0, sans points communs. On appelle la fonction $f(E)$ *continue*, si sa valeur sur un ensemble E tend vers zéro avec le diamètre de E.

M. Sierpiński à montré récemment [1]) qu'une fonction $f(E)$ additive et continue prend toute valeur intermédiaire entre deux de ses valeurs quelconques, en sorte que l'ensemble de toutes ses valeurs est toujours un intervalle fini [2]), fermé ou non. Or, la question, si cet intervalle est toujours fermé, c'est-à-dire, si les bornes supérieure et inférieure de la fonction $f(E)$ sont toujours accessibles, restait ouverte [3]). Je me propose dans cette Note d'en donner la résolution négative. Je vais montrer notamment, en m'appuyant sur le théorème de M. Zermelo, qu'il existe une fonction $f(E)$ d'ensemble mesurable, définie dans un parallélépipède P de mesure 1, additive et continue, mais telle que ses bornes ne sont atteintes pour aucun des sous-ensembles mesurables de P.

[1]) Fundamenta Mathematicae, tome III, pp. 240—246.

[2]) Car, la fonction additive et continue dans un ensemble borné est elle-même bornée. Loc. cit., p. 241.

[3]) Si l'on suppose la fonction $f(E)$ *additive au sens complet* (ce que veut dire que la relation

$$f(E_1+E_2+\ldots)=f(E_1)+f(E_2)+\ldots$$

a lieu aussi pour une infinité dénombrable d'ensembles sans points communs deux à deux), on peut démontrer qu'elle atteint ses bornes supérieure et inférieure; Cf.: H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, Berlin 1921, p. 403, Satz IV a.

D'abord, je développerai une méthode pour construire une fonction $g(E)$ d'ensemble, non-négative et additive.

Soit $\{E_\alpha\}$ $(\alpha < \gamma)$ un ensemble bien ordonné, du type γ, formé de tous les sous-ensembles mesurables du parallélépipède P. Nous allons définir la fonction non-négative $g(E)$ par l'induction transfinie, partant d'une valeur arbitraire $g(E_1) \geqslant 0$ et le faisant de manière que la condition suivante soit satisfaite:

Condition (C): Quels que soient les sous-ensembles $E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_n}$, en nombre fini, si l'on désigne par $\varphi_1(M), \varphi_2(M), \ldots, \varphi_n(M)$ leurs fonctions caractéristiques, l'inégalité

$$c_1 \varphi_1(M) + c_2 \varphi_2(M) + \ldots + c_n \varphi_n(M) \geqslant 0,$$
$$(\text{où } c_1, \ldots, c_n \text{ sont des constantes})$$

supposée vérifiée pour tous les points M de P, entraîne nécessairement la suivate:

$$c_1 g(E_{\alpha_1}) + c_2 g(E_{\alpha_2}) + \ldots + c_n g(E_{\alpha_n}) \geqslant 0.$$

A cet effet, supposons que la fonction $g(E)$ est déjà définie sur les ensembles E_α, pour $\alpha < \alpha_0$, et cela en sorte que la condition ci-dessus est satisfaite, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont $< \alpha_0$. Considérons maintenant deux groupes d'ensembles

$$E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_n};\ E_{\alpha'_1}, E_{\alpha'_2}, \ldots, E_{\alpha'_m} \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha'_m < \alpha_0)$$

et de constantes

$$c_1, c_2, \ldots, c_n;\ c'_1, c'_2, \ldots, c'_m$$

tels qu'on a, pour tous les points M de P

$$c_1 \varphi_1(M) + \ldots + c_n \varphi_n(M) \leqslant \varphi_0(M) \leqslant c'_1 \varphi'_1(M) + \ldots + c'_m \varphi'_m(M)$$

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi'_1, \ldots$ désignant les fonctions caractéristiques correspondantes aux ensembles $F_{\alpha_0}, E_{\alpha_1}, E_{\alpha'_1}, \ldots$. Or, d'après la condition (C),

$$c_1 g(E_{\alpha_1}) + \ldots + c_n g(E_{\alpha_n}) \leqslant c'_1 g(E_{\alpha'_1}) + \ldots + c'_m g(E_{\alpha'_m}),$$

et l'on voit que la borne supérieure (évidemment, non-négative) des sommes du type

$$c_1 g(E_{\alpha_1}) + \ldots + c_n g(E_{\alpha_n})$$

ne surpasse pas la borne inférieure des sommes du type

$$c'_1 g(E_{\alpha'_1}) + \ldots + c'_m g(E_{\alpha'_m}).$$

Par conséquent, nous pouvons toujours choisir la valeur $g(E_{\alpha_0})$ entre ces deux bornes, en posant, p. e., $g(E_{\alpha_0})$ égale à la plus petite d'elles. Avec cette détermination de la valeur $g(E_{\alpha_0}) \leqslant 0$, je dis que la condition (C) demeure vraie dans l'hypothèse que l'un des ensembles $E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_n}$ se confond avec E_{α_0} (p. e., E_{α_1}), tandis que tous les autres le précèdent. En effet, soit

$$c_1 \varphi_1(M) + c_2 \varphi_2(M) + \ldots + c_n \varphi_n(M) \geqslant 0,$$

d'où, si $c_1 > 0$

$$\varphi_0(M) = \varphi_1(M) \geqslant -\frac{c_2}{c_1} \varphi_2(M) - \ldots - \frac{c_n}{c_1} \varphi_n(M).$$

D'après la définition même de $g(E_{\alpha_0})$, il vient

$$g(E_{\alpha_0}) = g(E_{\alpha_1}) \geqslant -\frac{c_2}{c_1} g(E_{\alpha_2}) - \ldots - \frac{c_n}{c_1} g(E_{\alpha_n}),$$

en sorte que l'on a

$$c_1 g(E_{\alpha_1}) + c_2 g(E_{\alpha_2}) + \ldots + c_n g(E_{\alpha_n}) \geqslant 0, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le raisonnement analogue s'applique au cas, où $c_1 < 0$,

La détermination complète de la fonction $g(E)$ sur tous les ensembles E_α $(\alpha < \gamma)$ est donc achevée par induction. Il résulte de la condition (C) que la relation

$$c_1 \varphi_1(M) + c_2 \varphi_2(M) + \ldots + c_n \varphi_n(M) = 0 \cdot$$

implique la suivante:

$$c_1 g(E_{\alpha_1}) + c_2 g(E_{\alpha_2}) + \ldots c_n g(E_{\alpha_n}) = 0;$$

en particulier, si l'ensemble E est la somme de deux ensembles E' et E'' sans points communs, on a toujours

$$g(E) = g(E') + g(E'').$$

(La méthode de construction, développée ici, est **générale**, c'est-à-dire, qu'elle peut conduire à une fonction **quelconque** d'ensemble, non-négative et additive, si l'on choisit convenablement les valeurs de $g(E_\alpha)$ entre les bornes indiquées).

Cela posé, prenons une suite de sous-ensembles de $P: E', E'', \ldots, E^{(i)}, \ldots$, jouissant des propriétés suivantes:

(1) chaque ensemble $E^{(i)}$ contient tous les suivants;

(2) la mesure (L) de $E^{(i)}$, étant non-nulle, tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$;

(3) pour chaque parallélépipède P', contenu dans P, et chaque ensemble $E^{(\nu)}$, le portion de celui-ci comprise dans P' est de mesure non-nulle [1]).

Nous précisons maintenant la définition de la fonction $g(E)$ en posant particulièrement:

(I) $g(P') = mP'$ (mE désignant la mesure lebesguienne de l'ensemble E), pour chaque parallélépipède partiel P' de P, la frontière y comprise ou non;

(II) $g(E) = 0$ pour chaque sous-ensemble E de P, dont la mesure est nulle;

(II) $g(E^{(\nu)}) = mP = 1$, pour tous les ensembles $E^{(\nu)}$, dont il s'agissait tout à l'heure.

Dans la suite bien ordonnée des sous-ensembles mesurables de P:

$$E_1, E_2, \dots, E_\omega, \dots, E_\alpha, \dots,$$

rien n'empêche de placer les parallélépipèdes P', les ensembles de mesure nulle et les ensembles $E^{(\nu)}$ avant tous les autres. Or, pour qu'on puisse continuer de proche en proche la détermination des valeurs de $g(E)$, comme il a été décrit plus haut, en partant des valeurs déjà définies ci-dessus, il suffit de prouver que la propriété fondamentale (C) est vérifiée pour les sous-ensembles de P considérés.

A cet effet, prenons à volonté quelques uns d'eux, en nombre fini. On trouve, en général, dans le groupe choisi d'ensembles, des parallélépipèdes, soit $P_1, P_2, \dots, P_k$, des ensembles de mesure nulle, soit $E_1, E_2, \dots, E_l$, enfin, des ensembles $E^{(\nu)}$, soit $E^{(\nu_1)}, E^{(\nu_2)}, \dots, E^{(\nu_m)}$. Désignons, resp., par $\varphi_\varkappa(M)$ $[\varkappa = 1, 2, \dots, k]$, $\chi_\lambda(M)$ $[\lambda = 1, 2, \dots, l]$, $\psi_\mu(M)$ $[\mu = 1, 2, \dots, m]$ les fonctions caractéristiques correspondantes et supposons qu'on a, pour tous les points M de P, l'inégalité

$$(*)\quad (a_1\varphi_1 + \dots + a_k\varphi_k) + (b_1\chi_1 + \dots + b_l\chi_l) + (c_1\psi_1 + \dots + c_m\psi_m) \geqslant 0$$

(a, b, c étant des constantes). Il faut démontrer que cette relation

[1]) Il est très facile de construire une telle suite d'ensembles. On peut, p. e., en numérotant dans un ordre quelconque tous les points à coordonnées rationnelles, comprises dans l'intérieur de P:

$$M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$$

enfermer le point M_n dans un parallélépipède $P_n^{(\nu)}$, contenu dans P, de centre M_n et de mesure $\leqslant \frac{1}{2^{\nu+1}}$ (le plus grand possible) et définir $E^{(\nu)}$ comme l'ensemble-somme de tous les $P_n^{(\nu)}$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$

implique la suivante (v. (I), (II), (III)).

$$a_1\, m\, P_1 + \ldots + a_k\, m\, P_k + c_1 + \ldots + c_m \geqslant 0.$$

En décomposant, au besoin, les parallélépipèdes $P_1, \ldots, P_k$, nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que tous ces parallélépipèdes sont sans points intérieurs communs, deux à deux. La question de leurs frontières est sans importance, vu la possibilité de les compter parmi les ensembles E_λ.

Cela posé, prenons le point M de façon qu'il appartienne à la fois à l'intérieur du parallélépipède P_α et à tous les ensembles $E^{(i_1)}, \ldots, E^{(i_m)}$, mais non pas aux ensembles E_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ de mesure nulle, ce qui est possible en vertu des propriétés (1) et (3) de $E^{(i)}$. Dans cette hypothèse l'inégalité (*) nous donne

$$(**) \qquad a_\varkappa + (c_1 + \ldots + c_m) \geqslant 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots k)$$

Si la somme de parallélépipèdes $P_1, \ldots, P_k$ se confond avec P à l'ensemble de mesure nulle près, il nous suffit de multiplier chaque inégalité du type (**) par $m\, P_k$ et les sommer membre à membre, pour obtenir l'inégalité à démontrer. Dans le cas contraire, on peut choisir le point $M =$ tel qu'il appartienne à tous les $E^{(i_\mu)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$, mais non pas aux E_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ et P_k $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ ce qui nous donne

$$c_1 + \ldots + c_m \geqslant 0.$$

En ajoutant dans ce cas à l'inégalité déjà obtenue celle qui précède, multipliée par $m\,(P - \Sigma P_\varkappa)$, on obtient le résultat désiré.

On voit sans peine que la fonction non-négative et additive $g(E)$, dont la définition vient d'être précisée, est continue. En effet, si d est le diamètre d'un sous-ensemble E de P, on peut enfermer E dans un parallélépipède partiel P', contenu dans P et de mesure $\leqslant (2\,d)^m$. Il en résulte (v. (I)) que

$$g(E) \leqslant g(P') = m\, P' \leqslant (2\,d)^m,$$

ce qui entraîne la continuité de la fonction $g(E)$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'exemple de la fonction jouissant des propriétés signalées au début. Posons à cet effet, pour tous les sous-ensembles mesurables E de P,

$$f(E) = g(E) - m\, E.$$

Cette fonction est additive est continue, avec $g(E)$ et $m(E)$. En particulier, si $\mathrm{C}E$ désigne le complément de E par rapport à P, on a toujours (vu (I)):

$$f(\mathrm{C}E) = f(P) - f(E) = -f(E)$$

Les valeurs de $g(E)$ et mE ne surpassant pas l'unité, on voit que

$$-1 \leqslant f(E) \leqslant 1.$$

Comme $mE^{(i)}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$ (v. (2)) et $g(E^{(i)}) = 1$ (v. (III)), $f(E^{(i)})$ tend vers 1 et en même temps $f(\mathrm{C}E^{(i)})$ tend vers -1, lorsque i croît indéfiniment, en sorte que 1 et -1 effectivement sont les bornes de la fonction $f(E)$. Cependant ces bornes ne sont pas accessibles. Car, si $mE > 0$, on a évidemment, $g(E)$ ne surpassant pas l'unité

$$f(E) = g(E) - mE < 1;$$

or, cette inégalité a lieu aussi pour un ensemble de mesure nulle, car dans ce cas $f(E) = 0$, en vertu de la propriété (II) de g. De même, on a toujours

$$f(E) = -f(\mathrm{C}E) > -1, \qquad \text{c. q. f. d.}$$