Sur les fonctions continues à un nombre dérivé sommable.

Par

S. Saks (Varsovie).

1. Le but de cette Note est de donner des conditions suffisantes et nécessaires pour qu'une fonction continue soit absolument continue, respectivement à variation bornée. Les énoncés qui vont suivre se rattachent en particulier à la question suivante posée par M. Hahn à la fin de son oeuvre *„Theorie der rellen Funktionen"*: *une fonction continue et à variation bornée $y=f(x)$ faisant correspondre à chaque ensemble des valeurs x de mesure nulle l'ensemble des valeurs y de la même mesure, est-elle nécessairement absolument continue?* La réponse affirmative découle immédiatement de la théorie de la totalisation de M. Denjoy; récemment elle a été prouvée directement, et par une voie élémentaire, par M. Banach [1]. Le théorème 2 (§ 4) de la Note présente fournit évidemment une généralisation de ce résultat, la notion de la fonction à un nombre dérivé sommable étant, d'après le théorème classique, plus large que celle de la fonction à variation bornée.

2. Soit $\bar{x}=f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $I=(a,b)$. F étant un ensemble quelconque contenu dans cet intervalle, nous désignerons par $\overline{F}$ l'ensemble des valeurs de $\bar{x}$ correspondant à $x \varepsilon F$.

On dit que *la fonction $f(x)$ vérifie la condition (N)* [2], *lorsque F étant un ensemble parfait contenu dans I, $|F|=0$ entraîne $|\overline{F}|=0$* [3].

[1]) voir: Banach: ce volume, p. 225—236.

[2]) voir: Lusin. *L'intégrale et la série trigonométrique*, (en russe). Moscou. 1915. p. 109.

[3]) A étant un ensemble. $|A|$ désigne sa mesure (extérieure).

Nous dirons qu'*elle vérifie la condition* (N'), *lorsqu'il existe un nombre* M *tel que, pour toute suite finie* $(F_1, F_2, \dots, F_n \subset I)$ *des ensembles parfaits disjoints* [1]) *et de mesure nulle, on a:*

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{F_i}| \leqslant M.$$

On voit de suite que la condition (N) est plus restrictive que (N').

On peut mettre la condition (N') sous des autres formes qui équivalent à la précédente; à savoir: $\{F_n\}$ *étant une suite quelconque (dénombrable) des ensembles parfaits, disjoints et de mesure nulle, la série* $\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{F_n}|$ *converge vers une valeur finie;* ou bien: $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ *étant une décomposition quelconque en des portions disjointes* [2]) *d'un ensemble quelconque* $F \subset I$ *de mesure nulle, les sommes* $\sum_{k=1}^{n} |\overline{F_k}|$ *sont bornées uniformément.*

3. Lemme. $\lambda(x)$ étant un nombre dérivé [3]) d'une fonction $f(x)$ continue dans un intervalle $I = (a, b)$, on a:

$$(1) \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant \int_a^b |\lambda(x)|\, dx + m(I),$$

$m(I)$ désignant la borne supérieure des valeurs $|\overline{F}|$, lorsque F est un ensemble parfait de mesure nulle contenu dans I et d'ailleurs quelconque [4]).

D é m o n s t r a t i o n: la proposition est évidente lorsque $\lambda(x)$ n'est pas sommable, c.-à-d. lorsque $\int_a^b |\lambda(x)|\, dx = +\infty$. Nous pouvons donc supposer que l'intégrale envisagée admet une valeur finie.

Soit ε un nombre positif et d'ailleurs quelconque. Posons, pour abréger l'écriture: $l_i = \dfrac{\varepsilon i}{b-a}$, et: $E_i = \underset{x}{E}\, [l_i \leqslant \lambda(x) < l_{i+1}]$

[1]) c.-à-d. $F_i \times F_k = 0$, pour $i, k = 1, 2, \dots, n$ et $i \neq k$.

[2]) On appelle une p o r t i o n d'un ensemble linéaire F toute partie de cet ensemble contenue dans un intervalle quelconque.

[3]) On appelle λ un nombre dérivé (médian) d'une fonction $f(x)$ en un point x_0, lorsqu'il existe une suite $\{x_n\}$ tendant vers x_0 et telle que $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ tende vers λ.

[4]) l'évaluation fournie par (1) ne peut être abaissée, l'égalité ayant lieu dans le cas où $f(x)$ est une fonction monotone.

$(i=0,1,2,\ldots)$. Soit enfin $\{O_i\}$ la suite des ensembles ouverts tels que:

$$E_i < O_i, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |O_i - E_i|\, l_{i+1} \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

Posons:

$$R = I - \sum_{i=0}^{\infty} E_i$$

$\lambda(x)$ étant par hypothèse, sommable R est de mesure nulle.

Nous allons établir maintenant, par l'induction, une suite des intervalles $\{\delta_n\}$ ouverts [1]) et disjoints l'un à l'autre. Supposons pour cela qu'on choisit déjà les p premiers de ces intervalles: $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_p$. Désignons par Δ_p la collection de tous les intervalles ouverts δ jouissant des propriétés suivantes:

(4) une, au moins, des extrémités x, y de l'intervalle δ appartient à un des ensembles E, soit à E_i;

$$E_i \text{ établi d'après (4): } \delta \subset O_i. \tag{5}$$

$$|f(x) - f(y)| < l_{i+1}\, |\delta| = l_{i+1}\, |y - x|. \tag{6}$$

$$\delta \times \sum_{k=1}^{p} \delta_k = 0. \tag{7}$$

Soit M_p la borne supérieure des longueurs des intervalles $\delta \,\varepsilon\, \Delta_p$. Nous determinons δ_{p+1} de façon que les conditions

$$\delta_{p+1} \,\varepsilon\, \Delta_p, \quad 2\,|\delta_{p+1}| \geqslant M_p \tag{8}$$

soient vérifiées, ce qui est évidemment possible. La suite $\{\delta_n\}$ est ainsi établie par l'induction. Nous affirmons que

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} O_i - \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \right| = 0. \tag{9}$$

Pour le prouver, supposons, par l'impossible, que (9) ne subsiste pas. Soit:

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} O_i - \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i - R.$$

R étant de mesure nulle, on a, en vertu de notre hypothèse:

$$|S| > 0.$$

[1]) c.-à-d. des extrémités exclues.

Il existe donc, dans S, un point x qui en est un point de densité; par conséquent, la densité de $\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i$ est nulle à ce point. D'autre part x n'appartenant pas à R, il est contenu dans un ensemble $E_i \subset O_i$. On peut donc y faire correspondre un autre point y de façon que l'intervalle ouvert $\delta = (x, y)$ satisfasse aux conditions (4, 5, 6) et que de plus:

$$(10) \qquad 2 \left| \delta \times \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \right| < |\delta|;$$

on peut encore choisir y de manière qu'il n'appartienne à aucun des intervalles δ_i.

Soit maintenant δ_{p+1} le premier des intervalles δ_i se contenant dans δ. p ainsi établi, on voit que δ satisfait aussi à la condition (7) et que, par suite, $\delta \,\varepsilon\, \Delta_p$, donc

$$M_p \geqslant |\delta|.$$

Or, d'après (10): $2|\delta_{p+1}| < |\delta|$, donc, en vertu de l'inégalité précédente: $2|\delta_{p+1}| < M_p$ ce qui est contradictoire avec (8) et qui justifie, par suite, l'égalité (9).

Posons:

$$U = I - \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i;$$

$U \subset R + S$ est un ensemble fermé et, d'après le précédent, de mesure nulle. Soit $F + N$ sa décomposition en le noyau parfait F et l'ensemble fini ou dénombrable N. On a:

$$I = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i + F + N.$$

Donc, en tenant compte de la continuité de $f(x)$ et de (6), (7), (5), (2) et (3):

$$(11) \qquad \begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} l_{i+1} |O_i| + |\overline{F}| + |\overline{N}| \\ &\leqslant \int_a^b |\lambda(x)|\, dx + |\overline{F}| + |\overline{N}| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Or, N et, par suite, $\overline{N}$ étant dénombrables et ε étant un nombre positif quelconque, on tire de (11):

$$|f(b)-f(a)| \leqslant \int_a^b |\lambda(x)|\, dx + |\overline{F}|$$
$$\leqslant \int_a^b |\lambda(x)|\, dx + m(I).$$

ce qui prouve notre lemme.

4. Théorème 1. *Pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit à variation bornée dans un intervalle $I=(a, b)$, il faut et il suffit qu'elle y admette nn nombre dérivé $\lambda(x)$ sommable et qu'elle vérifie la condition (N').*

Démonstration: on conclut de suite d'après les propriétés bien connues des fonctions à variation bornée, que les conditions de notre théorème sont nécessaires; nous nous bornons donc à démontrer qu'elles sont, à la fois, suffisantes.

En effet, ces conditions vérifiées, soit $I=\sum_{k=1}^{n} I_k$ $(I_k=(a_k, a_{k+1}),$ $a_0=a$, $a_{k+1}=b)$ une décomposition de l'intervalle I en un nombre fini des intervalles n'empiétant pas. D'après la condition (N'), il existe un nombre fixe M tel que pour chaque décomposition:

$$\sum_{k=1}^{n} m(I_k) \leqslant M$$ [1];

donc, d'après le lemme précédént:

$$\sum_{k=0}^{n} |f(a_{k+1})-f(a_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\lambda(x)|\, dx + \sum_{k=0}^{n} m(I_k)$$
$$\leqslant \int_a^b |\lambda(x)|\, dx + M,$$

ce qui prouve notre théorème.

5. Théorème 2. *Pour qu'une fonction continue $f(x)$ soit absolument continue, il faut et il suffit qu'elle admette un nombre dérivé $\lambda(x)$ sommable et qu'elle satisfasse à la condition (N).*

Démonstration: la nécessité des conditions énoncées dans notre théorème est bien connue; s'il s'agit de la réciproque, il suffit de reprendre le raisonnement du § précédent en y posant $M=0$.

[1]) nous conservons le sens du symbole $m(I)$ établi dans l'énoncé du lemme du § 3.

6. Nous terminerons cette Note par signaler quelques théorèmes qui rentrent dans le même ordre d'idées et qui sont valables pour transformations univoques des ensembles punctuelles situés dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions.

Soit notamment

$$\overline{p} = p(t) \tag{12}$$

une telle [1] transformation transformant un carré K situé, pour fixer l'idée, dans le plan, en un ensemble $\overline{K}$.

Nous appellerons le jacobien supérieur [2] $J(p)$ en un point p la limite supérieure de l'expression $|\overline{\delta}| : |\delta|$, où δ désigne une carré quelconque contenant p et tendant vers 0.

Les conditions (N), (N'), ainsi que le symbole $m(K)$ conserverons le sens tout-à-fait analogue à celui que nous y avons attribué dans les §§ précédents.

Céci étant, les propositions suivantes ont lieu:

I. $|\overline{K}| \leqslant \int\limits_K J(p)\,dp + m(K)$.

II. *le jacobien supérieur étant fini en tout point $p \varepsilon K$, on a:* $m(K) = 0$.

La propositon (I) est analogue au lemme du § 3; elle fournit, ensemble avec (II), une généralisation à un théorème de M. Lusin [3] sur les valeurs d'une fonction ou la dérivée s'annule.

III. *pour que la transformation* (12) *soit à variation bornée, respectivement absolument continue* [4], *il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition (N), respectivement (N'), et que le jacobien supérieur $J(p)$ soit sommable.*

[1] c.-à-d. univoque, mais non nécessairement biunivoque ou continu.

[2] Cf. Banach, l. c. p. 283.

[3] Lusin, l. c. p. 105; cf. aussi: Saks, *Fund. Math.* t. VI. p. 111.

[4] le lecteur consultera l'ouvrage cité de M. Banach pour la définition de ces notions.