Démonstration nouvelle d'un théorème de M. Banach sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables.

Par

Herman Auerbach (Lwów).

Théorème. *Les fonctions dérivées de Dini d'une fonction $f(x)$ finie et mesurable (L) dans un intervalle (a, b) sont mesurables (L) dans cet intervalle* [1].

Démonstration. Posons $f(x)=0$ en dehors de (a, b). On a évidemment $\overline{f'_+}(x)=\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{M(x+h)-f(x)}{h}$, $M(x)$ étant le maximum de $f(x)$ au point x (Baire).

Désignons par $\varphi(x, h)$ la fonction $\frac{M(x+h)-f(x)}{h}$ et par $\varphi(x; h_1, h_2)$ sa borne supérieure pour $0<h_1\leqslant h\leqslant h_2$. On a $\overline{f'_+}(x)=\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\varphi\left(x; \frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right)$. Il suffit donc de prouver que $\varphi(x; h_1, h_2)$ est mesurable.

Or, $f(x)$ étant mesurable, il existe dans (a, b) un ensemble fermé $F(\varepsilon)$ de mesure $>b-a-\varepsilon$ dans lequel $f(x)$ est continue [2]. $\varphi(x, h)$ est semi-continue supérieurement dans l'ensemble fermé (plan) $G(\varepsilon): x\subset F(\varepsilon)$, $0<h_1\leqslant h\leqslant h_2$. L'ensemble (plan) $G(\varepsilon).E[\varphi(x, h)>a]$ est donc une somme dénombrable des ensembles fermés. Par conséquent sa projection sur l'axe des x l'est aussi. Mais cette projection est évidemment $F(\varepsilon).E[\varphi(x; h_1, h_2)<a]$. $\varphi(x; h_1, h_2)$ est donc mesurable dans $F(\varepsilon)$ et, ε étant quelconque, aussi dans $b-a$.

[1] St. Banach. Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables. *Fund. Math.* III, p. 128—132.

[2] V. p. e. *Fund. Math.* t. III, p. 320.