Sur un ensemble ouvert, tel que la somme de toutes les droites qu'il contient est un ensemble non mesurable *(B)*.

Par

Otton Nikodym et Wacław Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer qu'*il existe un ensemble ouvert* (dans l'espace à 3 dimensions), *tel que l'ensemble-somme de toutes les droites* (illimitées) *qu'il contient entièrement est non mesurable* (*B*).

Soit E un ensemble (A) de M. Souslin linéaire donné, situé à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$ de l'axe $0x$. Il existe, comme on sait, un ensemble plan H qui est un G_δ situé dans le carré (ouvert) $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, tel que la projection orthogonale de H sur l'axe $0x$ est E. L'ensemble H peut être évidemment écrit sous la forme $H = G_1 G_2 G_3 \ldots$, où G_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles ouverts, situés dans le carré $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, et tels que $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots$ Plaçons l'ensemble H, ainsi que les ensembles G_n, sur le plan $z = 1$: l'ensemble E sera évidemment une projection orthogonale de l'ensemble H sur l'axe $0x$.

n étant un nombre naturel donné, désignons par S_n l'ensemble-somme de toutes les droites (de l'espace à 3 dimensions) rencontrant l'ensemble G_n et l'axe $0x$ et perpendiculaires à cet axe. Nous aurons évidemment $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots$ Soit T_n l'ensemble de tous ces points de S_n dont la coordonnée z satisfait à l'inégalité $z < n$, et soit R l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace, tels que $0 < x < 1$, $-1 < y < 1$, $z < 1$. On voit sans peine que l'ensemble

$$(1) \qquad U = R + T_1 + T_2 + T_3 + \ldots$$

est ouvert.

Soit V l'ensemble-somme de toutes les droites de l'espace, dont tous les points appartiennent à U, et désignons par X l'ensemble de tous les points de l'axe $0x$. Nous prouverons que $VX = E$.

Soit $p(x_0, 0, 0)$ un point donné quelconque de l'ensemble E. Il résulte de la propriété de l'ensemble H qu'il existe un nombre réel y_0, tel que le point $q(x_0, y_0, 1)$ appartient à H. Soit D la droite passant par les points p et q: elle est évidemment perpendiculaire a l'axe $0x$. Nous affirmons que $D \subset U$. Soit D_n la partie de D formée de tous les points (x, y, z) de D, tels que $z < n$: il suffira évidemment de prouver que $D_n \subset U$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Soit donc n un indice donné. De $q \,\varepsilon\, H$ résulte que $q \,\varepsilon\, G_n$, et il s'ensuit de la définition de l'ensemble S_n que la droite pq fait partie de S_n, donc $D \subset S_n$. Par conséquent (d'après les définitions de T_n et D_n): $D_n \subset T_n$ et, d'après (1), à plus forte raison $D_n \subset U$, c. q. f. d. Nous avons ainsi démontré que $D \subset U$, et parsuite que $D \subset V$. Or, nous avons $p \,\varepsilon\, D$ et $p \,\varepsilon\, X$: donc $p \,\varepsilon\, VX$. Il est ainsi démontré que

$$E \subset VX. \tag{2}$$

D'autre part, soit p un point de l'ensemble VX. De $p \,\varepsilon\, V$ et de la définition de l'ensemble V résulte qu'il existe une droite $D \subset U$, telle que $p \,\varepsilon\, D$. Nous affirmons que la droite D est perpendiculaire à l'axe $0x$. En effet, les points (x, y, z) des ensembles H et R satisfaisant à la condition $0 < x < 1$, il résulte sans peine de la définition de l'ensemble U que U, et, à plus forte raison la droite D, et contenue entre les plans $x = 0$ et $x = 1$. Or, il est évident que toute droite passant par l'axe $0x$ et contenue entre les plans $x = 0$ et $x = 1$ est perpendiculaire à l'axe $0x$.

Or, de la définition de l'ensemble U résulte que l'ensemble de tous les points communs à U et au plan $z = 0$ est le rectangle (ouvert) $0 < x < 1$, $-1 < y < 1$: la droite $D \subset U$ ne peut donc être contenue dans le plan $z = 0$. La droite D passant par le point p de $0x$ et étant perpendiculaire à $0x$, il en résulte qu'il existe pour tout n naturel un point $r_n(x_n, y_n, z_n)$ de la droite D, tel que $z_n \geqslant n$. Il s'ensuit donc de $D \subset U$ et de (1) que $r_n \,\varepsilon\, (T_{n+1} + T_{n+2} + \ldots)$ (puisque la coordonnée z des points de l'ensemble $R + T_1 + \ldots + T_n$ est toujours $< n$, et $z_n \geqslant n$): donc $r_n \,\varepsilon\, S_{n+1}$ (puisque $T_k \subset S_k$ et $S_{k+1} \subset S_k$, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$). Il résulte donc de la définition de l'ensemble S_{n+1} qu'il existe une droite contenue dans S_{n+1}, passant par le point r_n et par l'axe $0x$ et perpendiculaire à cet axe, et on voit tout de suite, qu'elle ne peut être différente de D (puisqu'il existe une seule droite passant par le point r_n et par l'axe $0x$, perpendiculaire à cet axe). Donc $D \subset S_{n+1}$, et il résulte de la définition de S_{n+1}, que D rencontre l'ensemble G_{n+1}, soit en le point q_{n+1}. Les points q_{n+1} ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont donc des points de D situés dans le plan $z = 1$ (puisque les ensembles G_n sont tous situés dans le plan $z = 1$): or, la droite D rencontre évidemment le plan $z = 1$ dans un seul point q: nous avons donc $q_{n+1} = q$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, et il résulte de $q_{n+1} \varepsilon G_{n+1}$ et de $H = G_1 G_2 G_3 \ldots$ (où $G_1 \supset G_2 \supset \ldots$) que $q \varepsilon H$. La droite D rencontre donc l'ensemble H; or, l'ensemble E étant une projection orthogonale de l'ensemble H sur l'axe $0x$, la droite D étant perpendiculaire à cet axe, et p étant le point où D rencontre $0x$, nous en concluons que $p \varepsilon E$. Nous avons ainsi démontré que l'hypothèse $p \varepsilon VX$ entraîne: $p \varepsilon E$, c'est-à-dire que $VX \subset E$, ce qui donne, d'après (2), la formule $VX = E$, c. q. f. d.

Dans le cas où E est un ensemble (A) non mesurable (B), (et il existe, comme on sait, de tels ensembles E, situés a l'intérieur de l'intervalle $(0.\ 1)$), V est un ensemble non mesurable (B) (puisque autrement l'ensemble $E = VX$ serait mesurable (B)). Nous avons ainsi démontré l'existence d'un ensemble ouvert dans l'espace à 3 dimensions, tel que l'ensemble somme de toutes les droites qu'il renferme totalement est non mesurable (B). Observons qu'on pourrait aussi démontrer l'existence d'un ensemble ouvert plan, jouissant d'une propriété analogue, mais la démonstration serait beaucoup plus compliquée.

D'autre part on pourrait démontrer que l'ensemble-somme de toutes les droites contenues dans un ensemble ouvert, ou, plus généralement, dans un ensemble G_δ de l'espace à $m > 1$ dimensions est toujours un ensemble (A) (ceci n'étant pas vrai pour les ensembles F_σ).

Nous donnerons ici une esquisse de la démonstration pour $m = 2$ [1].

Soit U un ensemble plan G_δ donné, V—l'ensemble somme de toutes les droites contenues dans U. Soit $T = CU$ le complémentaire de U (par rapport au plan): ce sera donc un ensemble F_σ et nous pouvons écrire $T = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$, ou F_n ($n = 1, 2\ 3, \ldots$) sont des ensembles plans fermés et bornés.

Désignons par U^*, resp. par F_n^* l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace, tels que $(x, y) \varepsilon U$, resp. $(x, y) \varepsilon F_n$. Soit $P_n(z_0)$ l'ensemble-somme de

[1]) Une autre démonstration se trouve chez O. Nikodym, ce volume, p. 257.

toutes les droites du plan $z = z_0$ parallèles à la droite $x = t \cos z_0$, $y = t \sin z_0$, $z = z_0$ et rencontrant l'ensemble F_n^*, et posons $P_n = \sum P_n(z)$, la sommation s'étendant à tous les nombres réels z. On démontre que les ensembles P_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont fermés: l'ensemble $P = P_1 + P_2 + \ldots$ est donc un F_σ. Or, soit $Q(z_0)$ l'ensemble-somme de toutes les droites du plan $z = z_0$ parallèles à la droite $x = t \cos z_0$, $y = t \sin z_0$, $z = z_0$ et contenues dans l'ensemble U^*, et posons $Q = \sum Q(z)$, la sommation s'étendant à tous les nombres réels z. On voit sans peine que $Q = CP$: donc Q est un G_δ. Or, on prouve sans difficulté que l'ensemble V est la projection de l'ensemble Q sur le plan $z = 0$. Donc, en tant que projection d'un G_δ, V est un ensemnle (A), c. q. f. d.