Sur les points linéairement accessibles des ensembles plans

Par

Otton Nikodym (Cracovie).

Soit E un ensemble plan donné: on dit, d'après M. Urysohn[1]) qu'un point p de E est *linéairement accessible* s'il existe un segment rectiligne $\overline{pq}$ tel que tous ses points (le point p excepté) soient étrangers à E. Désignons généralement par $a(E)$ l'ensemble de tous les points linéairement accessibles d'un ensemble plan E donné. Il se pose naturellement le problème d'étudier la nature des ensembles $a(E)$ pour des classes d'ensembles E données.

Nous développerons ici une méthode qui permet de résoudre ce problème pour plusieurs classes d'ensembles. En particulier nous prouverons, en appliquant notre méthode, que si E est un ensemble (F_σ), $a(E)$ est toujours un ensemble (A) de M. Souslin, et que si E est un ensemble (A), $a(E)$ est une image univoque et continue d'un ensemble complémentaire à un ensemble (A).

Nous nous servirons dans la suite d'une notion de l'accessibilité linéaire, qui est un peu plus large que la notion de M. Urysohn. Soit E un ensemble plan, p un point quelconque du plan considéré; nous dirons que p est linéairement accessible dans E, s'il existe un segment rectiligne ouvert, contenu tout entier dans E et ayant l'une de ses extrémités en p.

Notations.

1. (C) désigne le type des ensembles complémentaires aux ensembles (A).

2. Si R est une correspondance biunivoque, on désigne par $\breve{R}$ la correspondance inverse à R.

3. R étant une correspondance univoque entre des points, E un ensemble de points, R pro E représente l'image de l'ensemble E produite par R.

[1]) *Fund. Math.* t. V, p. 337 (*Problème* 29).

4. $\widehat{x, r, \varphi}\{\ldots\}$ désigne l'ensemble de tous les points ayant les coordonnées x, r, φ qui satisfaient à la condition spécifiée dans les paranthèses { }.

5. $\langle a\, b \rangle$ désigne un intervalle fermé, $(a\, b)$ un intervalle ouvert.

6. $\langle E \rangle$ désigne $E + E'$, ou E' est la dérivé de l'ensemble E.

7. (E) désigne l'ensemble de points intérieurs de E, par rapport à l'éspace considere.

8. $\operatorname{co} E$ désigne le complémentaire de E par rapport à l'espace considéré.

9. Le signe $\overline{\overline{df}}$ signifie: identique par définition.

1. Soit (R) le plan Euclidien pourvu d'un système des coordonnées réctangulaires ξ, η. Envisageons une courbe Peanienne remplissant le plan (R) tout entier, à savoir une fonction $p = f(z)$, définie pour tous les nombres réels z, partout continue et ayant pour ses valeurs les points remplissants (R).

Envisageons l'espace euclidien (V) à trois dimensions pourvu d'un système des coordonnées rectangulaires x, y, z. — Nous allons définir pour chaque point z_0 de l'axe z de (V), une correspondance R_{z_0} définie comme il suit:

Marquons dans (R) le point p_0, où $p_0 = f(z_0)$ et désignons ses coordonnées planes par ξ_0, η_0; à chaque point $p\,(\xi, \eta)$ du plan (R) faisons correspondre le point:

$$x = \xi - \xi_0, \quad y = \eta - \eta_0, \quad z = z_0 \tag{1}$$

de l'espace (V); la correspondance que l'on obtient ainsi sera désignée par R_{z_0}.

Tous les R_z sont des congruences au sens Euclidien, et par conséquent elles sont biunivoques et bicontinues. On voit que l'image du plan (R) produit par la correspondance R_{z_0} est un plan α_{z_0} perpendiculaire au point z_0 à l'axe z de l'espace (V). E étant un ensemble arbitraire dans (R), posons

$$E^* \overline{\overline{df}} \sum_z R_z \text{ pro } E \tag{2}$$

la sommation étant faite pour tous les points z de l'axe z.

Si l'on considère les plans α_z comme des ensembles de points, on a évidemment

$$\alpha_{z_1} \cdot \alpha_{z_2} = 0 \text{ pour } z_1 \neq z_2$$

et

$$R_z \text{ pro } E \subset \alpha_z \text{ pour tous les } z \tag{3}$$

Pour tous les ensembles E et tous les nombres z on a évidemment:

$$E^* . a_z = R_z \text{ pro } E \tag{4}$$

2. Voilà quelques propriétés de l'opération „$*$".

Si μ est une classe d'ensembles situés dans (R), on a:

I. $$(\sum_{M\varepsilon\mu} M)^* = \sum_{M\varepsilon\mu} M^*$$

II. $$(\prod_{M\varepsilon\mu} M)^* = \prod_{M\varepsilon\mu} M^*.$$

I est évident et II se démontre facilement à l'aide de (4).

III. Si M est fermé, M^* est aussi fermé.

La démonstration de cette propriété n'offre pas de difficulté.

IV. Si M est un ensemble (A), M^* est aussi un ensemble (A).

En effet, soit M un ensemble (A) et

$$\{\Delta_{i_1, i_2, \dots i_k}\} \; k = 1, 2, \dots; \; i_1, i_2, i_k = 1, 2, \dots$$

son système déterminant composé d'ensembles fermés.

D'après I et II on a

$$M^* = \Big(\sum_{i_1, i_2 \dots} \Delta_{i_1} . \Delta_{i_1, i_2} \dots\Big)^* = \sum_{i_1, i_2 \dots} (\Delta_{i_1} \; \Delta_{i_1, i_2} \dots)^* = \sum_{i_1, i_2 \dots} \Delta^*_{i_1} . \Delta^*_{i_1, i_2} \dots$$

M^* est donc un ensemble (A), comme noyan du système déterminant $\{\Delta^*_{i_1, i_2, \dots i_k}\}$ formé d'ensembles fermés (d'après III).

V. Si M est un ensemble (F_σ), M^* est aussi un ensemble (F_σ).

La démonstration s'appuit sur I et III.

3. Soit maintenant M un ensemble (A), resp. (F_σ) situé dans le plan (R).

Envisageons un nouveau système de coordonnées dans l'espace (V), à savoir le système cylindrique, dont l'axe principle Z coïncide avec l'axe z; le demi plan principal soit situé dans le plan x, z, de sorte qu'on ait pour un point arbitraire $p\,(x, y, z)$ non situé sur l'axe z:

$$Z = z, \; R = \sqrt{x^2 + y^2}, \; \sin \Phi = \frac{y}{R}, \; \cos \Phi = \frac{x}{R}.$$

On a $(\Phi, R, Z) = (\Phi + 2n\pi, R, Z)$.

Faisons ensuite à chaque point $(x, y, z) = (\Phi. R, Z)$, où $R \neq 0$. correspondre tous les points:

$$x_1 = \Phi + 2\pi n, \quad y_1 = R, \quad z_1 = Z \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Cette correspondance T qui est multivoque transforme la portion de V: $\widehat{xyz}\{x^2 + y^2 \neq 0\}$ en $\widehat{xyz}\{y > 0\}$

T étant localement biunivoque et continue, transforme l'ensemble (A) resp. (F_σ): $M^* - \widehat{xyz}\{x^2 + y^2 = 0\}$ en un ensemble M^{**} qui est aussi du type (A), resp. (F_σ).

Pour s'en convaincre, il suffit de partager l'espace (V) (sans l'axe z) en parties fermés convenables et observer que la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (A), resp. (F_σ) est aussi un ensemble (A), resp. (F_σ).

Envisageons l'ensemble $M^{**}(\varrho)$ de tous les points de M^{**}, dont la coordonnée y est $< \varrho$, où ϱ désigne un nombre positif pris arbitrairement. Projettons orthogonalement $M^{**}(\varrho)$ sur le plan (x, z) et désignons l'ensemble ainsi obtenu par $F(\varrho)$. Projettons ensuite l'ensemble co $F(\varrho)$ (c'est-à-dire l'ensemble complémentaire de $F(\varrho)$ par rapport au plan (x, z)) sur l'axe z: soit $G(\varrho)$ cette projection.

4. Passons à l'étude de l'ensemble $G(\varrho)$. Soit z_0 un point de $G(\varrho)$. Ce point est la projection d'un certain point $q\,(x_0, z_0)$ de co $F(\varrho)$. Donc il n'y a aucun point de $M^{**}(\varrho)$ dont les coordonnées x, y, z vérifiaient les conditions:

$$x = x_0, \; 0 < y < \varrho, \; z = z_0.$$

Nous en concluons qu'il n'existe aucun point de M^*, pour lequel on ait:

$$\Phi = x_0, \; 0 < R < \varrho, \; Z = z_0.$$

Donc, si l'on considère dans le plan α_{z_0} le segment rectiligne ouvert l de longueur ϱ. dont la direction est $\Phi = x_0$ et dont l'origine est située sur l'axe z, il n'y a pas sur l de points de $M^* . \alpha_{z_0}$. Donc, si l'on revient au plan (R) et si l'on y considère l'image de $M^*. \alpha_{z_0}$ produit par la correspondance $R_{z_0}^{-}$, on voit que sur le segment $R_{z_0}^{-}$ pro l il n'existe aucun point de M. Le segment $R_{z_0}^{-}$ pro l a l'une de ses extrémités au point $f(z_0)$; sa longueur est égale à ϱ et sa direction (on prend convenablement dans (R) un système des coordonnées polaires dont le centre est en $f(z_0)$) est $\varphi = x_0$

Il s'en suit que chaque point de l'ensemble $Q(\varrho) \underset{df}{=} f$ pro $G(\varrho)$ est linéairement accesible dans co M par un segment ouvert de longueur $\geqq \varrho$.

Nous allons montrer, que réciproquement, si P est un point, linéairement accesible dans co M par un segment l ouvert de longueur $\geqq \varrho$, chaque nombre z, tel que $P = f(z)$, appartient à $G(\varrho)$. En effet, supposons qu'on a $P = f(z_0)$ et envisageons la correspondance R_{z_0}. Désignons la direction de l par $\varphi + 2n\pi$; l se transforme en un segment $l_1 = R_{z_0}$ pro l de la même longueur et de la même direction $\Phi = \varphi + 2n\pi$; l'origine de l_1 se trouve sur l'axe z dans le point z_0. Dans M^* il n'y a pas de points, dont les coordonnées dans le système cylindrique seraient:

$$\Phi = \varphi + 2n\pi, \ 0 < R < \varrho, \ Z = z_0 .$$

Il s'en suit que dans M^{**} il n'y a pas de points, dont les coordonnées seraient

$$x = \varphi + 2n\pi. \ 0 < y < \varrho, \ z = z_0 .$$

Donc, dans le plan (xz) le point $(x = \varphi + 2n\pi, \ z = z_0)$ appartient à $co\, F(\varrho)$, de ce qui suit que le point $z = z_0$ situé sur l'axe z appartient à $G(\varrho)$.

Nous avons donc établi que l'ensemble $Q(\varrho)$, de tous les points de (R) qui sont linéairement accessibles dans $co\, M$ par des segments de longueur $\geqq \varrho$ est identique avec f pro $G(\varrho)$. Il s'en suit que l'ensemble:

$$M_1 \underset{df}{=} a(M) = M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} Q\left(\frac{1}{n}\right) \tag{7}$$

est l'ensemble de tous les points de M qui sont linéairement accessibles dans $co\, M$.

5. Pour étudier le caractére de l'ensemble M_1, faisons quelques remarques préliminaires. $g(s)$ étant une fonction continue quelconque, S l'ensemble de valeurs de s que nous supposons fermé, où la fonction est déterminée, U l'ensemble de valeurs de $g(s)$, soit E un ensemble donné contenu dans U.

Posons

$$E' \underset{df}{=} \hat{s}\,\{g\,(s)\, \varepsilon\, E\}.$$

En vértu de continuité de la fonction $g(s)$ on voit que: I'. Si E est fermé, E' est aussi fermé.

μ étant une classe d'ensembles contenus dans U, on a:

II'. $$(\sum_{E \epsilon \mu} E)^f = \sum_{E \epsilon \mu} E^f$$

et

III'. $$(\prod_{E \epsilon \mu} E)^f = \prod_{E \epsilon \mu} E^f \text{ }^{1)}.$$

IV'. Soit E un ensemble (A) contenu dans U; nous démontrerons que E^f est aussi (A).

En effet, soit $\{E_{i_1, i_2, \dots i_k}\}$, un système déterminant composé d'ensembles fermés contenus dans U; E soit le noyau de ce système.

On a:

$$E = \sum_{i_1, i_2 \dots} E_{i_1} . E_{i_1, i_2} \dots;$$

donc

$$E^f = \sum_{i_1, i_2 \dots} (E_{i_1} . E_{i_1, i_2} \dots)^f = \sum_{i_1, i_2 \dots} E^f_{i_1} . E^f_{i_1, i_2} \dots .$$

E^f est donc un ensemble (A), comme noyau du système déterminent $\{E^f_{i_1, i_2, \dots i_k}\}$, composé d'ensembles fermés. Si E est un ensemble (F_σ), E^f est aussi (F_σ).

6. Cela posé, on a évidemment

$$G(\varrho) = [Q(\varrho)]^f$$

la fonction $f(z)$ étant continue dans l'ensemble fermé de tous les nombres réels. Donc d'après (7) II' et III', on a:

$$(M_1)^f = M^f . \sum_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{1}{n}\right);$$

or

$$M_1 = f \text{ pro} \left[M^f . \sum_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

$G\left(\frac{1}{n}\right)$ étant la projection de $co\, F\left(\frac{1}{n}\right)$, l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{1}{n}\right)$ est la projection de $\sum_{n=1}^{\infty} co\, F\left(\frac{1}{n}\right)$ qui de son coté est le complémentaire de $\prod_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right)$.

1) Cf. W. Sierpiński *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 192.

Les ensembles $F\left(\frac{1}{n}\right)$ sont des ensembles (A), resp. (F_σ), comme projections des ensembles $M^{**}\left(\frac{1}{n}\right)$ qui sont (A) resp. (F_σ). Donc $\prod_{n}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right)$ est un ensemble (A), resp. (F_σ), d'où résulte que $\sum_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{1}{n}\right)$ est une projection d'un ensemble (C), resp. (G_δ) plan. — Il en resulte que dans le cas où M est un ensemble (F_σ), $(M_1)^\gamma$ est un ensemble (A). Donc, M_1, comme image univoque et continue de M_1, est aussi un ensemble (A). Dans le cas où M est un ensemble (A), l'ensemble $(M_1)^\gamma$ peut être regardé comme projection d'une différence de deux ensembles (A) plans, à savoir

$$\widehat{x, z}\,\{z \,\varepsilon\, M^\gamma\} - \prod_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or, M Sierpiński a démontré que les projections des différences de deux ensembles (A) plans sont des images continues des ensembles (C) linéaires [1]). Donc, dans notre cas, M_1 est une image continue d'un ensemble (C) linéaire.

7. M. C. Kuratowski a donné une démonstration très simple du théorème pour les ensembles (F_σ) situés dans l'espace Euclidien à $n \geqslant 2$ dimensions. — Nous donnerons ici sa démonstration pour $n = 2$ pour simplifier le langage. Faisons d'abord deux remarques.

I. Si $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$ sont des ensembles, convexes bornés et ayant le diamètre $> a > 0$, le produit $M_1 . M_2 \ldots\ldots$ est aussi convexe et ne se réduit pas à un seul point.

II. Si F est fermé et $< p, q >. F$ est vide ou se compose d'un seul point, il existe pour chaque $\eta > 0$ un rectangle P, tel que $< p, q > \subset (P)$ et le diamètre $\delta(P.F) < \eta$. — On peut même supposer que les coordonnées des sommets de P sont des nombres algèbriques, et choisir P de sorte qu'il se trouve tout entier dans l'intérieur d'un rectangle (R). contenant $< pq >$ et donné à l'avance.

Soit maintenant un ensemble plan E du type (F_σ). On a $E = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$ ou F_n sont fermés et $F_n \subset F_{n+1}$.

Envisageons tous les rectangles de diamètre $> \frac{1}{k}$ dont les sommets ont des coordonnées algébriques.

Soient $P_1 P_2 \ldots$ tous ceux, pour lesquels $\delta(P.F_1) < 1$; P_{1_1}, P_{1_2} définissons comme rectangles P pour lesquels $P \subset P_1$ et $\delta(P.F_2) < \frac{1}{2}$ etc

[1]) Cf. ce volume, p. 238.

Nous en obtenons un système déterminant $\{P_{i_1 i_2 \dots i_k}\}$ composé des rectangles et on a:

$$P^k_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}} \subset P^k_{i_1 i_2 \dots i_k}$$

et

$$\delta(P^k_{i_1 i_2 \dots i_k} \cdot F_l) < \frac{1}{l}.$$

Soit V_k le noyau de ce système. On démontre facilement que:

$$a(E) = E \cdot \sum_{k=1}^{\infty} V_k;$$

d'où il suit que $a(E)$ est un ensemble (A).

Par une modification légère du raisonnemment des §§ 1–6 on peut traiter le problème suivant, posé par M. Sierpiński et M. Mazurkiewicz. E étant un ensemble plan du type donné p. e. (F_σ) ou (A), soit L l'ensemble de toutes les droites illimitées, qui n'ont pas de points communs avec E. Désignons par $d(E)$ l'ensemble somme de toutes ces droites, quand on les regarde comme des ensembles de points. Il s'agit d'étudier le type de $d(E)$.

Pour atteindre ce but, projettons sur le plan xz l'ensemble M^{**} au lieu de $M^{**(a)}$ et envisageons l'ensemble $F_1 \underset{df}{=} (co\, F) \cdot S\,\mathrm{pro}\,(co\, F)$, où F désigne la projection mentionnée et S une translation du plan xz dans la direction de l'axe y et de grandeur π. Désignons par G la projection de F_1 sur l'axe z; l'ensemble f pro $(G - E')$ est l'ensemble cherché.

On obtient ainsi que, si E est un ensemble (F_δ), $d(E)$ est un ensemble (A), et si E est un ensemble (A), $d(E)$ est l'image univoque et continue d'un ensemble (C) linéaire.

Par une méthode analogue (un peu modifiée) on peut traiter les questions analogues pour des ensembles situés dans l'espace Euclidien à plusieures dimensions et on obtient des résultats analogues.

Il est intéressant qu'il existe un ensemble fermé E (dans l'espace à 3 dimensions) pour lequel $a(E)$ n'est pas mesurable (B). Nous en donnerons un exemple (la démonstration paraîtra dans le volume VIII de „Fund. Math.") [1].

[1] M. Alexandroff écrit dans sa lettre du 4. I. 1925 que P. Urysohn a construit un tel ensemble sur une surface de Riemann à une infinité de feuilles. L'idée de cette construction est en quelques points semblable à celle que nous employons ci-dessous.

Soit M un ensemble (A) non mesurable (B), situé sur l'axe x d'un système des coordonnées cylindriques (x, r, φ) de l'espace Euclidien à 3 dimensions.

Soit

$$\{\delta_{i_1, i_2, \dots i_k}\} \qquad (i_1, i_2, \dots i_k = 1, 2, \dots; \ k = 1, 2, \dots)$$

un système déterminant, (dont le noyau est M), formé des intervalles fermés $\delta_{i_1, i_2, \dots i_k}$, situés sur l'axe x et régulier, c'est-à-dire: $\delta_{i_1, i_2, \dots i_{k+1}} \subset \subset \delta_{i_1, i_2, \dots i_k}$, et la longueur de $\delta_{i_1, i_2, \dots i_k} \leqslant {}^1/_k$. Posons $\delta_{i_1, i_2, \dots i_k} = \, = \langle a_{i_1, i_2, \dots i_k}; \ b_{i_1, i_2, \dots i_k} \rangle$ et formons un nouveau système déterminant composé des intervalles ouverts: $\delta'_{i_1, i_2, \dots i_k} = (a_{i_1, i_2, \dots i_k} - {}^1/_k, b_{i_1, i_2, \dots i_k} + {}^1/_k)$. Définissons $\varphi_{i_1, i_2, \dots i_k}$ comme l'ensemble de tous les nombres irrationnels > 0 et < 1, dont le développement en une fraction continue et infinie (ayant les numérateus $= 1$ et dénominateurs naturels) commence par $\frac{1|}{|i_1} + \frac{1|}{|i_2} + \dots + \frac{1|}{|i_k}$. Envisageons dans l'espace x, r, φ le système des ensembles ouverts:

$$\Delta_{i_1, i_2, \dots i_k} \underset{df}{=} \widehat{x r \varphi} \left\{ \begin{matrix} \dfrac{1}{k+2} < r < \dfrac{1}{k}, \ x \,\varepsilon\, \delta'_{i_1, i_2, \dots i_k} \\ \varphi \,\varepsilon\, (\langle \varphi_{2i_1, 2i_2, \dots 2i_k} \rangle) \end{matrix} \right\}$$

$$(i_1, i_2, \dots i_k = 1, 2, \dots), \ (k = 1, 2, \dots)$$

et posons

$$N \underset{df}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, i_2, \dots i_k = 1, 2, \dots} \Delta_{i_1, i_2, \dots i_k}$$

L'ensemble fermé $E \underset{df}{=} co\, N$ a la propriété en question.

Il suffit de démontrer que $M = a(E) \,.\, \widehat{x r \varphi} \{r = 0\}$.

Or, nous avons trouvé avec M. Sierpiński un ensemble E plan du type (G_δ), pour lequel $a(E)$ n'est pas un ensemble (A). Pour l'espace à 3 dimensions on peut même définir un ensemble E du type (G_δ) et tel que l'ensemble $a(E) \,.\, \widehat{x y z} \{y = z = 0\}$ est homéomorphe (à un ensemble dénombrable près) avec un ensemble linéaire, qui est la projection d'un ensemble (C) plan arbitrairement pris à l'avance.