Über kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen.

Von

P. Veress (Budapest).

Unter einer kompakten Menge von Funktionen versteht man [1]) eine Menge, deren jede Untermenge eine gleichmässig konvergente Teilfolge enthält. — Von Arzelà [2]) ist ein Kriterium dafür angegeben worden, dass eine gegebene Menge von stetigen Funktionen kompakt sei. Dieses Kriterium lautet folgendermassen:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Menge A der in (a, b) definierten, gleichmässig beschränkten, stetigen Funktionen f kompakt sei, ist die, dass zu jeder gegebenen $\varepsilon > 0$. eine Zahl $\delta > 0$ sich bestimmen lasse, so dass für zwei Punkte x und y mit $[x - y] < \delta$ auch $[f(x) - f(y)] < \varepsilon$ sei für alle Funktionen der Menge A".

Für gewisse Untersuchungen über Funktionaloperationen erschien es notwendig ein entsprechendes Kriterium für eine Menge von messbaren Funktionen anzugeben. Das habe ich in meiner Dissertation [3]) getan. Der dort angegebene Satz lässt sich mit Benutzung von gewissen Sätzen über Bairesche Klassen, die ich anderswo veröffentliche [4]). weiter verschärfen. Daraus ergeben sich einige einfachen

[1]) M. Fréchet: *Thèse* und „Sur les fonctionelles continues". *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.* 1910.

[2]) Arzelà: Sulle funzioni di linee. *Memorie d. R. Accad. d. Scienze di Bologna* 1895.

[3]) Kolozsvár, 1917. Vgl. Egy Arzelà-féle Bétel àltalánositàsa. *Math. és Term. Tud. Ertesito.* Budapest 1918

[4]) Die hier gemeinte Veröffentlichung bleib aus, da die inzwischen erschienene Arbeit »Sur une propriété des ens. ambigus« (*Fund. Math* t. VI, 1924) des Herrn W. Sierpiński schon dieselben Resultate bringt (*Anm. während der Korrektur*).

Konsequenzen über die Baireschen Funktionen, die ich in dieser Note auseinandersetzen will.

Da die oben genannte Erweiterung des Arzelàschen Satzes nur in ungarischer Sprache erschienen ist, sei es mir erlaubt ihren Beweis hier zuerst kurz wiederzugeben (§ 1). Dann will ich von meinen Untersuchungen über die Baireschen Klassen berichten (§ 2), schliesslich in § 3 die aus der Vereinigung der Sätze von §§ 1 und 2 sich ergebenden Schlussfolgerungen ziehen.

1. Sämtliche hier in Betracht gezogenen Funktionen seien auf einer perfekten Menge M definiert und im Lebesgue schen Sinne messbar. Für die Kompaktheit einer Menge A von solchen Funktionen ist es notwendig, dass alle Funktionen der Menge unter derselben Schranke liegen. Enthält nämlich A eine — im Maximum des absoluten Wertes — unbegrenzt wachsende Folge, so lässt sich aus dieser Folge keine gleichmässig konvergente Teilfolge aussondern.

Wir nehmen also gleich an, dass sämtliche Funktionen der Menge A dieselbe endliche Schranke haben

Satz I. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Kompaktheit einer Menge A von gleichmässig beschränkten, messbaren Funktionen ist die, dass zu jeder vorgegebenen positiven Zahl ε eine Einteilung der Grundmenge M in endlich viele elementenfremde, messbare Untermengen möglich sei:*

$$M = e_1 + e_2 + \dots + e_n,$$

so dass für sämtliche f, die Schwankung von f auf e_i, d. h.

$$\text{Obere Grenze } [f(x) \quad f(x')] = V(f, e_i) < \varepsilon \text{ sei} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Für eine beschränkte, messbare Funktion lässt sich immer eine solche Einteilung angeben (genau so für endlich viele); ist die Menge A kompakt, so existiert eine solche Einteilung für alle Funktionen von A.

Ich beweise zuerst, dass die Bedingung hinreichend ist.

Nehmen wie also zu, dass es für die Funktionenmenge C zu jedem ε eine der Bedingung entsprechende Einteilung $E(\varepsilon)$:

$$M = \sum_{i=1}^{n_1} e_i$$

existiert. Bedeute $\psi(P; e_i)$ die charakteristische Funktion der Menge e_i

und sei $y_0, y_1, \dots, y_m$ eine Kette von wachsenden Zahlen mit $|y_i - y_{i-1}| \leqslant \varepsilon$, wo y_0 und y_m die gemeinsame untere bzw. obere Schranke der Funktionenmenge bezeichnen. Jede Funktion der Menge C lässt sich durch eine Treppenfunktion der Form $\Sigma y^{(i)}(f) . \psi(P; e_i)$, die ich kurs mit $\Sigma y . \psi$ bezeichne, mit der Genaunigkeit ε darstellen, wenn $y^{i)}(f)$ eine der Zahlen $y_0, \dots, y_m$ ist. Nachdem es nur endlich viele Werte y gibt, müssen in jeder unendlich viele Funktionen enthaltenden Teilmenge von C unendlich viele solche Funktionen sein, für welche sämtliche $y^{(i)}(f)$ die gleichen sind. Für je zwei dieser Funktionen f und g besteht die Ungleichung:

$$|f(P) - g(P)| < \varepsilon.$$

Bezeichne $f_1(P)$ eine beliebige dieser Funktionen. Zu $\varepsilon/2$ gehört nach der Annahme auch eine entsprechende Einteilung und es lassen sich wieder aus der Menge der vorhin ausgewählten Funktionen mit gleichen $y^{(i)}(f)$, unendlich viele auswählen, von denen je zwei höchstens eine Differenz $\varepsilon/2$ ergeben. Unter diesen sei f_2 eine von f_1 verschiedene Funktion. Die Auswahl auf dieser Weise für die Zahlen $\varepsilon, \varepsilon/2, \varepsilon/4, \dots, \varepsilon/2^n, \dots$ fortsetzend, erhält man aus jeder unendlichen Teilmenge von C eine gleichmässig konvergente Folge $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$ Es besteht nähmlich

$$|f_n - f_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

wenn p eine natürliche Zahl ist.

Nun soll angenommen werden, dass die Menge C kompakt ist. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert eine der Bedingung entsprechende Einteilung, oder aber existiert für irgendeine Einteilung E_1 eine Funktion f_1 mit:

$$\text{Max.}\, |f_1(P) - \sum_{E_1} y . \psi| > \varepsilon,$$

wie man auch die y-Werte wählen sollte.

Für diese Funktion f_1 gibt es aber eine Einteiluug E_1' mit

$$\text{Max.}\, |f_1(P) - \sum_{E_1'} y . \psi| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Man bilde das Produkt der Einteilungen E_1 und E_1', d. i. die Einteilung, deren Untermengen alle Mengen mit den charakteristischen Funktionen $\psi(P, e_i) . \psi(P, e_k)$ sind ($i = 1, 2, \dots n_1$; $k = 1, 2, \dots, n_1'$).

Entweder genügt schon diese Einteilung $E_2 = E_1 . E_1'$ der Bedingung, oder es existiert eine Funktion f_2 mit

$$\text{Max.}\ |f_2(P) - \sum_{E_2} y \cdot \psi| > \varepsilon.$$

Im letzten Falle nehme man die Einteilung E_2', die für f_2 eine Darstellung durch eine Treppenfunktion auf die Genauigkeit $\varepsilon/2$ liefert und bilde das Produkt $E_3 = E_2 . E_2'$. Diese Einteilung entspricht schon der Bedingung, oder bestimmt wie früher die Funktion f_3 und die Einteilung $E_4 = E_3 . E_3'$.

Auf dieser Weise gewinnt man die Folge

$$f_1, f_2, f_3, \ldots$$

Ist die Folge endlich, dann entspricht die letzte Einteilung E_{n+1} der Bedingung. Ist die Menge C kompakt, so kann der entgegensezte Fall nicht eintreten, denn die unendliche Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n \ldots$ enthält keine gleichmässig konvergente Teilfolge, da die maximale Differenz je zweier von ihren Funktionen im absoluten Werte mindestens $\varepsilon/2$ ist.

Hiermit ist der Satz I vollständig bewiesen.

Man ersieht aber aus den Beweise noch folgende Korolläre:

„Alle Funktionen der kompakten Menge C können durch endlich viele Treppenfunktionen auf die Genanigkeit ε dargestellt werden". — „Alle Funktionen der Kompakten Menge C können durch abzählbar unendlich viele Treppenfunktionen gleichmässig approximiert werden".

2. **Satz II.** *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Funktion f der α-ten Baireschen Klasse angehört, ist die folgende: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Einteilung der Grundmenge in elementenfremde Teilmengen der Klasse α so dass die Variation von f auf jeder Teilmenge $< \varepsilon$ ist.*

Ich will hier knrz den Beweisgang angeben, für weiteres verweise ich an die in S. 244 Anm. [4]) angegebene Arbeit.

Eine Funktion f der Klasse α, ist entweder von der Ordnung G_α oder g_α, oder gleichzeitig $G_{\alpha+1}$ und $g_{\alpha+1}$ [1]), Ist sie eine G_α (resp. g_α), so sind die Mengen $f > y$ (resp. $f \geqslant y$) Mengen der Ordnung F_α (resp. D_α); also Mengen der Klasse α. Und so auch die Mengen $y \leqslant f < y + \varepsilon$ als Differenzen von Mengen der Kasse α. Ist f

[1]) H. Hahn: *Reelle Funktionen.*

beschränkt, so sei n eine natürliche Zahl, für welche Max f — min $f < n.\varepsilon$, dann sind die gesuchten Teilmengen die Mengen, für welche

$$\begin{aligned} \text{Min } f = y_0 < f \leqslant y_0 + \varepsilon \quad &\text{resp.} \quad y_0 \leqslant f < y_0 + \varepsilon \\ y_0 + \varepsilon < f \leqslant y_0 + 2\varepsilon \quad &\text{„} \quad y_0 + \varepsilon \leqslant f < y_0 + 2\varepsilon \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ y_0 + (n-1)\varepsilon < f \leqslant y_0 + n\varepsilon \ &\text{resp.} \ y_0 + (n-1)\varepsilon \leqslant f < y_0 + n\varepsilon. \end{aligned}$$

Ist aber die Funktion f gleichzeitig eine $G_{\alpha+1}$ und $g_{\alpha+1}$, so benutzen wir einen Einschiebungssatz des Herrn Hausdorff [1]). Laut diesem Satz kann man zwischen zwei Mengen $V_{\alpha+1} \supset D_{\alpha+1}$ eine Menge M einschieben, so dass M Teilmenge von $V_{\alpha+1}$ ist, aber D_{+1} als Teilmenge enthält: $V_{\alpha+1} \supset M \supset D_{\alpha+1}$, und M gleichzeitig $V_{\alpha+1}$ und D_{+1}, also von der Klasse α ist.

Durch diese eingeschobenen Mengen lässt sich die gesuchte Einteilung wie vorhin gewinnen.

3. Nun sei eine kompakte Menge K von Baireschen Funktionen gegeben, so dass die höchste Klassenzahl der Funktionen von K gleich α ist. Diese Menge nenne ich eine kompakte Funktionenmenge der Klasse α. Unter einer *Einteilung der Klasse* α verstehe ich eine Einteilung der Grundmenge M in Teilmengen, die der Klasse α oder niedrigeren Klassen angehören. Es gilt der

Satz III: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Funktionenmenge K kompakte Menge der Klasse α sei, ist die, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Einteilung der Klasse α existiere*

$$M = e_1 + e_2 + \ldots + e_n,$$

so dass

$$V(f;\, e_i) < \varepsilon$$

sei für alle f von K $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Um zu sehen, dass die Bedingung notwendig ist, braucht man nur den Beweis der Satzes I zu wiederholen mit dem Zusatze, dass die Einteilungen $E_1, E_2, \ldots$ und $E_1', E_2', \ldots$ Einteilungen der Klasse α sind.

Die Hinlänglichkeit der Bedingung sieht man so ein: Ist die

[1]) F. Hausdorff: *Über halbstetige Funktionen u. deren Verallgemeinerung.* Math. Zeitschrift Bd. 5 (1919) p. 309. Dort ist der Satz für Funktionen ausgesprochen, durch die charakteristische Funktion gewinnt man ihn auf die Mengen. Cf W. Sierpiński: *Fund. Math.* t. VI, p. 1.

Bedingung von einer Menge K erfüllt, so ist diese Menge laut Satz I kompakt und laut Satz II sind sämtliche Funktionen von K höchstens von der Klasse α. also ist K eine kompakte Menge der Klasse α.

Als Konsequenz des Satzes II erkennt man noch: „Eine Bairesche Funktion der Klasse α ist durch Treppenfunktionen derselben Klasse beliebig approximierbar", — ein Satz, den H. de la Vallée Poussin für die erste Funktionenklasse bewiesen hat [1]).

Als Folgen der Sätze II und III ergeben sich noch folgende Sätze (s. die Korolläre aus Satz I, § 1):

„Ist K eine kompakte Funktionenmenge der Klasse α so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Treppenfunktionen der Klasse α, die sämtliche Funktionen von K bis zu einer Genauigkeit von ε approximieren".

„Ist K eine kompakte Funktionenmenge der Klasse α, so gibt es eine abzählbare Folge von Treppenfunktionen der Klasse α, deren Teilfolgen sämtliche Funktionen von K gleichmässig approximieren".

[1]) *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire* Paris 1916, p. 118, § 116. Vgl. W. Sierpiński *Fund. Math.* t. VI (1924), p. 4.