# Sur une classe d'ensembles

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Je définirai dans cette Note, par des conditions très simples et naturelles, une classe $\mathcal{K}_0$ d'ensembles linéaires, dont la nature est très difficile à étudier. Notre classe $\mathcal{K}_0$ contiendra seulement un ensemble de puissance du continu d'ensembles, mais elle sera très étendue, en contenant tous les ensembles $(A)$ de M. Souslin ainsi que leurs complémentaires, et encore d'autres ensembles de nature plus compliquée. En particulier, nous ne saurons pas déterminer la puissance des ensembles formant $\mathcal{K}_0$; nous ne saurons non plus décider si ces ensembles sont mesurables $(L)$ et s'ils jouissent de la propriété de Baire.

Soit $\mathcal{K}_0$ la plus petite classe $\mathcal{K}$ d'ensembles linéaires satisfaisant aux trois conditions suivantes:

1) Tout ensemble linéaire fermé appartient à $\mathcal{K}$.

2) Tout ensemble linéaire dont le complémentaire appartient à la classe $\mathcal{K}$, appartient à $\mathcal{K}$.

3) Tout ensemble linéaire qui est une image univoque et continue d'un ensemble appartenant à la classe $\mathcal{K}$, appartient à $\mathcal{K}$.

$\mathcal{K}$ étant une classe donnée quelconque d'ensembles linéaires, nous désignerons par $c(\mathcal{K})$ la classe de tous les ensembles linéaires dont les complémentaires appartiennent à $\mathcal{K}$, et par $\varphi(\mathcal{K})$ — la classe de tous les ensembles linéaires qui sont images univoques et continues des ensembles de la classe $\mathcal{K}$.

Désignons par $\mathcal{F}$ la classe de tous les ensembles linéaires fermés et posons

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{F}, \mathcal{K}_2 = \varphi(\mathcal{K}_1), \mathcal{K}_3 = c(\mathcal{K}_2), \ldots, \mathcal{K}_{2n} = \varphi(\mathcal{K}_{2n-1}), \mathcal{K}_{2n+1} = c(\mathcal{K}_{2n}), \ldots$$

On voit sans peine que la classe

$$(1) \qquad \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \dots$$

est la plus petite classe $\mathcal{H}$ satisfaisant aux conditions 1), 2) et 3). La formule (1) fournit en même temps une classification d'ensembles formant $\mathcal{H}_0$ en une infinité dénombrable de classes.

La première classe $\mathcal{H}_1$ est formée de tous les ensembles linéaires fermés. Nous prouverons que la classe $\mathcal{H}_2$ coïncide avec la classe de tous les ensembles $F_\sigma$ linéaires; en d'autres mots nous prouverons la proposition suivante:

*Pour qu'un ensemble linéaire soit un $F_\sigma$, il faut et il suffit qu'il soit une image univoque et continue d'un ensemble linéaire fermé.*

En effet, tout ensemble fermé étant une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés et bornés, et toute image univoque et continue d'un ensemble fermé et borné étant fermée, on voit qu'une image univoque et continue d'un ensemble fermé (borné ou non) est toujours une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, c'est a-dire un $F_\sigma$. Or, soit $E$ un ensemble linéaire qui est un $F_\sigma$. Nous pouvons évidemment regarder $E$ comme une somme $E = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$, où $F_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ sont des ensembles fermés aux diamètres $< 1$ (en décomposant en portions, s'il faut, les ensembles fermés dont la somme est l'ensemble $E$). Désignons par $\Phi_n$ l'ensemble superposable avec $F_n$ et contenu à l'intérieur de l'intervalle $(n-1, n)$. On voit sans peine que l'ensemble $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots$ sera fermé et que l'ensemble $E$ sera une image univoque et continue (en général non biunivoque) [1] de l'ensemble $\Phi$.

Nous avons ainsi démontré que la classe $\mathcal{H}_2$ coïncide de avec la classe de tous les ensembles $F_\sigma$ linéaires. Par coséquent, la classe $\mathcal{H}_3 = c(\mathcal{H}_2)$ coïncide avec la classe de tous les ensembles $G_\delta$ linéaires. Les images univoques et continues des ensembles $G_\delta$ linéaires sont les ensembles $(A)$ de M. Souslin [2]: donc, la classe $\mathcal{H}_4 = \varphi(\mathcal{H}_3)$ coïncide avec la classe de tous les ensembles $(A)$ linéaires, et parsuite la classe $\mathcal{H}_5 = c(\mathcal{H}_4)$ — avec la classe de tous les ensembles linéaires, complémentaires aux ensembles $(A)$. La classe

[1] Dans le même ordre d'idées fut établi le théorème suivant: pour qu'un ensemble de l'espace à $n$ dimension soit un $F_\sigma$, il faut et il suffit qu'il soit une image *biunivoque* et continue d'un ensemble fermé à $n+1$ dimensions (Voir C. Kuratowski et W. Sierpiński: *Tôhoku Math. Journ.* 1921).

[2] Voir p. e. *Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie* 1918, p. 163. ss.

$\mathscr{H}_6 = \varphi(\mathscr{H}_5)$ et donc la classe de toutes les images univoques et continues des ensembles complémentaires aux ensembles $(A)$.

Remarquons que *les ensembles linéaires qui sont images univoques et continues des ensembles complémentaires aux ensembles* $(A)$ *linéaires coïncident avec les projections orthogonales des ensembles plans, complémentaires aux ensembles* $(A)$.

En effet, soit $E = \mathrm{C}\,H$, où $H$ est un ensemble $(A)$ linéaire, et soit $f(x)$ une fonction définie pour les points de l'ensemble $E$ et continue dans $E$. Désignons par $\Pi$ l'image de la fonction $f(x)$ (c'est-à-dire l'ensemble de tous les points $(x, y)$ du plan, où $x \varepsilon E$ et $y = f(x)$), et posons $\overline{\Pi} = \Pi + \Pi'$. Or, désignons par $P$ l'ensemble de tous les points $(x, y)$ du plan, tels que $x \varepsilon E$; $\mathrm{C}\,E$ étant un ensemble $(A)$ (linéaire), on voit sans peine que $\mathrm{C}\,P$ sera un ensemble $(A)$ plan. La fonction $f(x)$ étant continue dans $E$, nous trouvons sans peine

$$\Pi = P\overline{\Pi},$$

d'oú résulte tout de suite ($P$ étant un ensemble plan, dont le complémentaire est un ensemble $(A)$ et $\overline{\Pi}$ étant fermé) que $\Pi$ est un ensemble complémentaire d'un ensemble $(A)$ plan.

Or, il est évident que la transformée $f(E)$ de l'ensemble $E$ à l'aide de la fonction $f(x)$ coïncide avec la projection de l'ensemble plan $\Pi$ sur l'axe d'ordonnées.

Nous avons ainsi démontré que tout ensemble linéaire qui est une image univoque et continue d'un ensemble complémentaire à un ensemble $(A)$ linéaire est une projection d'un ensemble complémentaire à un ensemble $(A)$ plan. Nous prouverons maintenant la réciproque.

Il suffira évidemment de prouver que tout ensemble plan, dont le complémentaire est un ensemble $(A)$ plan, est une image univoque et continue d'un ensemble linéaire, dont le complémentaire est un ensemble $(A)$ linéaire.

Soit donc $E$ un ensemble plan, dont le complémentaire est un ensemble $(A)$: on voit sans peine que, sans diminuer la généralité de notre démonstration, nous pouvons supposer que l'ensemble $E$ est situé dans le carré $K$ aux sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ $(1, 1)$. Soit $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ la courbe continue de M. Peano, remplissant le carré $K$. Désignons par $F$ l'ensemble de tous les points $(x, y, z)$ de l'espace, tels que $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$ et $0 \leqslant z \leqslant 1$: ce sera évidemment un ensemble fermé. Or, désignons par $Q$ l'ensemble de tous les points $(x, y, z)$ de l'espace, tels que $(x, y) \varepsilon \mathrm{C}\,E$; $\mathrm{C}\,E$ étant un ensemble $(A)$ plan, $Q$ sera un ensemble $(A)$ dans l'espace à 3 dimensions, ainsi que l'ensemble $P = FQ$. Désignons par $H$ l'ensemble de tous les nombres réels $t$ de $(0, 1)$, tels que $(\varphi(t), \psi(t)) \varepsilon \mathrm{C}\,E$: on voit sans peine que $H$ est la projection sur l'axe $0Z$ de l'ensemble $P$: c'est donc un ensemble $(A)$ linéaire (une projection sur un axe d'un ensemble $(A)$ dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions étant toujours un ensemble $(A)$). Par conséquent l'ensemble $\mathrm{C}\,H$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres réels $t$ de $(0, 1)$, tels que $(\varphi(t), \psi(t)) \varepsilon E$, est un complémentaire à un ensemble $(A)$ linéaire: les fonctions $\varphi$ et $\psi$ étant continues, il en résulte que $E$ est une image univoque et continue d'un ensemble linéaire, complémentaire à un ensemble $(A)$ (notamment à $H$).

Notre proposition est ainsi démontrée complétement.

Les ensembles $(A)$, ainsi que leurs complémentaires, étant, comme on sait, sommes de $\aleph_1$ ensembles mesurables $(B)$, et les images univoques et continues des ensembles mesurables $(B)$ étant des ensembles $(A)$, on voit sans peine que les ensembles formant la classe $\mathcal{K}_6$ sont sommes de $\aleph_1$ ensembles mesurables $B$. Il en résulte qu'ils ne peuvent avoir aucune puissance qui serait comprise entre $\aleph_1$ et $2^{\aleph_0}$.

Quant aux ensembles de la classe $\mathcal{K}_7$, remarquons qu'on les obtient à partir des ensembles $(A)$ plans de la manière suivante. $E$ étant un ensemble plan donné, désignons par $\psi(E)$ l'ensemble de tous les nombres réels $b$, tels que la droite $y = b$ est contenue dans $E$. La classe $\mathcal{K}_7$ est constituée par tous les ensembles $\psi(E)$ correspondant aux ensembles plans $E$ qui sont des ensembles $(A)$ (La démonstration résulte immédiatement de la remarque que $\mathcal{K}_6$ est la classe de toutes les projections des ensembles complémentaires aux ensembles $(A)$ plans sur l'axe d'ordonnées).

On peut démontrer sans peine que chacune des classes $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_4$, $\mathcal{K}_5$, $\mathcal{K}_6$ contient des ensembles qui n'appartiennent pas aux classes précédentes. P. e. l'ensemble de tous les nombres rationnels appartient à $\mathcal{K}_2$ sans appartenir à $\mathcal{K}_1$; l'ensemble de tous les nombres irrationnels appartient à $\mathcal{K}_3$ sans appartenir à $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$. Ceux des ensembles $(A)$ qui ne sont ni des $F_\sigma$ ni des $G_\delta$ appartiennent à $\mathcal{K}_4$ sans appartenir à $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3$. Or, soit $E$ un ensemble $(A)$ dont le complémentaire $CE$ n'est pas un ensemble $(A)$[1]: l'ensemble $CE$ appartiendra évidemment à $\mathcal{K}_5$ sans appartenir à $\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3 + \mathcal{K}_4$. Soient maintenant $E_1$ et $E_2$ deux ensembles $(A)$ dont les complémentaires ne sont pas de ensembles $(A)$, tels que $E_1$ est situé dans l'intervalle $(-1, 0)$ et $E_2$ dans l'intervalle $(0, 1)$. et soit $H_1$ le complémentaire de $E_1$ par rapport à l'intervalle $(-1, 0)$.

[1] L'existence de tels ensembles a été prouvée par M. Souslin: *Comptes Rendus*, t. 164, note du 8 janvier 1917; v. aussi N. Lusin et W. Sierpiński: *Journal de Mathématiques* 7e série t. II. (1923), p 65; W. Sierpiński: *Fund. Math.* t. VII, p. 201.

L'ensemble $E = H_1 + E_2$ appartiendra à $\mathscr{K}_6$ sans appartenir à $\mathscr{K}_1 + \dots + \mathscr{K}_5$. En effet, $H_1$ appartient à $\mathscr{K}_5$ et est situé dans l'intervalle $(-1, 0)$, et $E_2$, comme ensemble $(A)$, est une image univoque et continue de l'ensemble $X$ de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$ [1], donc d'un ensemble appartenant à $\mathscr{K}_5$, d'où résulte sans peine que l'ensemble $E = H_1 + E_2$ est une image univoque et continue de l'ensemble $H_1 + X$, ensemble qui appartient à $\mathscr{K}_5$ (la somme de deux ensembles de $\mathscr{K}_5$ étant un ensemble de $\mathscr{K}_5$). Donc l'ensemble $E$ appartient à $\mathscr{K}_5$. Or, la portion $H_1$ de $E$ n'appartient pas à $\mathscr{K}_4$ (d'après la définition de $E_1$) et la portion $E_2$ de $E$ n'appartient pas à $\mathscr{K}_5$, d'où résulte que l'ensemble $E$ n'appartient pas à $\mathscr{K}_4 + \mathscr{K}_5$, donc non plus à $\mathscr{K}_1 + \dots + \mathscr{K}_5$. La classe $\mathscr{K}_6$ contient donc des ensembles qui n'appartiennent pas aux classes précédentes.

On pourrait démontrer que chacune des classes $\mathscr{K}_n$ contient des ensembles qui n'appartiennent pas aux classes précédentes. Nous nous bornerons à prouver cela encore pour les classes $\mathscr{K}_7$ et $\mathscr{K}_8$.

J'ai démontré dans ce volume (p. 201) l'existence d'un ensemble $(A)$ plan dont les intersecti ns par les droites parallèles à l'axe d'abscisses donnent tous les ensembles $(A)$ linéaires situés dans l'intervalle $(0, 1)$. En modifiant un peu ma démonstration. on pourrait prouver l'existence d'un ensemble $(A)$ dans l'espace à 3 dimensions, soit $E$, dont les intersections par des plans parallèles au plan $z = 0$ donnent tous les ensembles $(A)$ plans. L'intersection de l'ensemble $E$ par le plan $y = z$ est un ensemble $(A)$, $E_1$: désignons par $H_1$ son complémentaire par rapport au plan $y = z$ et par $P_1$ la projection de $H_1$ sur la droite $y = z$, $x = 0$: ce sera évidemment un ensemble de la classe $\mathscr{K}_6$ (comme projection d'un ensemble complémentaire d'un ensemble $(A)$ plan). Or, soit $H$ le complémentaire de $E$ par rapport à l'espace à 3 dimensions, et désignons par $P$ la projecti n de $E$ sur le plan $x = 0$. Il résulte tout de suite de la propriété de l'eusemble $E$ que les intersections de l'ensemble $H$ par les plans $z =$ Const. donnent tous les ensembles complémentaires aux ensembles $(A)$ plans, et il s'en suit que les intersections de l'ensemble $P$ par les droites parallèles à l'axe $0y$ donnent tous les ensembles de la classe $\mathscr{K}_6$. Il en résulte tout de suite par le raisonnement bien connu de diagonale que la projection $\Pi_1$ de $P_1$ sur l'axe $0y$ est un

[1] *Bull. Acad. Cracovie* l. c.

ensemble de la classe $\mathcal{H}_6$ dont le complémentaire (par rapport à cet axe) n'appartient pas à $\mathcal{H}_6$, et parsuite appartient à $\mathcal{H}_7$. Or, la classe $\mathcal{H}_6$ contenant toutes les classes précédentes, nous avons obtenu un ensemble de la classe $\mathcal{H}_7$ qui n'appartient à aucune des classes précédentes. Une méthode analogue à celle d'après laquelle nous avons démontré l'existence d'un ensemble de la classe $\mathcal{H}_6$ qui n'appartient pas aux classes précédentes, permettrait de démontrer l'existence d'un ensemble de la classe $\mathcal{H}_8$ qui n'appartient pas aux classes antérieures.

Du fait que les classes $\mathcal{H}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont toutes différentes résulte sans peine que la somme et le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles de $\mathcal{H}_0$ ne sont pas nécessairement des ensembles de $\mathcal{H}_0$.

On peut démontrer que les ensembles formant les classes $\mathcal{H}_4$ et $\mathcal{H}_5$ sont mesurables $(L)$ [1]) et qu'ils jouissent de la propriété de Baire [2]); or, on ne sait pas si tout ensemble non dénombrable appartenant à $\mathcal{H}_5$ contient un sous-ensemble parfait. Or, je ne sais pas si les ensembles de la classe $\mathcal{H}_6$ sont tous mesurables $(L)$ et s'ils jouissent de la propriété de Baire.

Remarquons qu'en posant

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{F},\ \mathcal{L}_2 = c(\mathcal{L}_1),\ \mathcal{L}_3 = \varphi(\mathcal{L}_2), \ldots,\ \mathcal{L}_{2n} = c(\mathcal{L}_{2n-1}),\ \mathcal{L}_{2n+1} = \varphi(\mathcal{L}_{2n}), \ldots$$

nous aurons

$$\mathcal{L}_n = \mathcal{H}_{n-1} \qquad \text{pour } n \geqslant 5.$$

En effet, $\mathcal{L}_2$ est évidemment la classe de tous les ensembles ouverts. L'ensemble de tous les nombres rationnels, comme image univoque et continue d'un ensemble ouvert (p. e. du complémentaire d'un ensemble parfait non dense) appartient à la classe $\mathcal{L}_3$, donc son complémentaire, l'ensemble $N$ de tous les nombres irrationnels, appartient à $\mathcal{L}_4$. Tout ensemble $(A)$ étant une image univoque et continue de l'ensemble $N$, la classe $\mathcal{L}_5$ contient tous les ensembles $(A)$ linéaires. Or, les ensembles formant $\mathcal{L}_2$, comme ouverts, sont des $F_\sigma$. Une image univoque et continue d'un $F_\sigma$ étant un $F_\sigma$, nous en concluons que les ensembles formant $\mathcal{L}_3$ sont encore des $F_\sigma$, et parsuite les ensembles formant $\mathcal{L}_4$ sont des $G_\delta$. Une image uni-

[1]) N. Lusin et W. Sierpiński: Bull. Acad. Cracovie 1918, p. 44.

[2]) N. Lusin et W. Sierpiński: Journal de Mathématiques 7e série t. I. (1923), p. 68 ss.; aussi O. Nikodym: ce volume, p. 153.

voque et continue d'un $G_\delta$ étant un ensemble $(A)$, il en résulte que tout ensemble de la classe $\mathfrak{L}_5$ est un ensemble $(A)$.

Nous avons donc démontré que la classe $\mathfrak{L}_5$ coïncide avec la classe de tous les ensembles $(A)$ linéaires, c'est-à-dire que $\mathfrak{L}_5 = \mathscr{K}_0$, d'où résulte tout de suite la formule (2). La classification $\mathscr{K}_0 = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3 + \dots$ ne diffère donc pas essentiellement de la classification $\mathscr{K}_0 = \mathscr{K}_1 + \mathscr{K}_2 + \mathscr{K}_3 + \dots$.