Sur le prolongement des fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes.

par

Maurice Fréchet

(Université de Strasbourg).

PREMIERE PARTIE.

Les définitions de l'aire et de la longueur.

Dans sa Thèse, M. Lebesgue a adopté la définition suivante de l'aire d'une surface courbe: c'est la plus petite des limites vers lesquelles tendent les aires des surfaces polyédrales qui convergent vers la surface donnée.

Si l'on essaie de retracer le chemin qui l'a conduit à cette définition, les indications qu'il donne à ce sujet semblent pouvoir se résumer ainsi: le but est de donner une définition plus générale que celles où l'on suppose essentiellement l'existence et la continuité des plans tangents et une définition qui soit aussi analogue que possible à la définition de la longueur d'une courbe. Etant donnée l'objection bien connue de Schwarz à l'ancienne méthode d'approximation de l'aire d'une surface courbe par l'aire d'une surface polyédrale inscrite [1]), M. Lebesgue est amené à formuler une définition de la longueur d'un arc de courbe ne faisant pas intervenir directement les lignes polygonales inscrites dans l'arc, et pourtant équivalente à la définition ordinaire qui les fait intervenir. Il s'exprime ainsi (page 54): „Si l'on veuit qu'il y ait quelque analogie

[1]) Nous avons montré ailleurs que cette objection s'applique même si l'on ne compare entre elles que les seules surfaces polyédrales (Ann. Soc. Math. Polonaise, t. III. 1924, p. 229).

entre le sens vulgaire et le sens mathématique du mot longueur, il ne faut essayer de définir la longueur d'une courbe C, que s'il existe une suite de lignes polygonales ayant C pour limite et telle que la suite correspondante de longueurs n'augmente pas indéfiniment...... Soit une courbe C, considérons l'ensemble des suites formées des longueurs des lignes polygonales tendant uniformément vers C. La plus grande des limites de l'ensemble est infinie. Il en est de même de la plus petite si C n'est pas rectifiable. Au contraire si C est rectifiable, la plus petite des limites est finie. Nous appellerons longueur d'une courbe C la plus petite des limites vers lesquelles tendent les longueurs des lignes polygonales tendant uniformément vers C".

Un peu plus loin M. Lebesgue remarque en note (page 56) „Si l'on considère la longueur comme fonction de la courbe, on peut dire que la fonction est partout égale à son minimum ou encore semi-continue inférieurement".

Enfin, page 76, M. Lebesgue définit aire d'une surface courbe la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales qui tendent vers une surface donée [1]).

Ainsi pour M. Lebesgue la détermination de l'aire s'introduit par la plus petite limite des surfaces polyédrales voisines parceque c'est un mode de définition qui comprend comme cas particulier les définitions classiques, qui conserve le parallélisme des notions d'aire et de longueur et qui coïncide dans le cas de la longueur avec la définition la plus générale connue.

Il n'est peut être pas sans intérêt de montrer *qu'on peut être amené par une autre voie à ce même mode de définition de l'aire et de la longueur*.

Ce n'est pas sans intérêt d'abord parce que ces notions ont une importance assez grande pour qu'il ne soit pas superflu de chercher de nouvelles raisons pour justifier le choix des définitions adoptées, définitions qui comportent nécessairement un peu d'arbitraire. Que ce ne soit pas superflu M. W. H. Young le montre dans un travail assez récent — où il obtient d'ailleurs des résultats très

[1]) Il s'impose en outre de n'employer le mot aire tout court que dans une famille de surfaces où l'aire sera une fonctionnelle additive, invariante dans les déplacements; dans le cas général le nombre défini plus haut sera »l'aire intérieure« suivant la dénomination de M. Jordan. On remarquera que l'aire intérieure est évidemment invariante par déplacement.

remarquables — et où il croit pouvoir préférer à la définition par la plus petite limite des surfaces polyédrales voisines une définition basée comme celle de Peano sur la notion „d'aire minima d'une courbe fermée". Et une de ses raisons est que l'on ne saurait utilement définir l'aire d'une surface dans un cas plus général que celui où son expression habituelle sous la forme d'intégrale a un sens.

A notre avis la géométrie peut se permettre de précéder l'analyse. Si par exemple une courbe rectifiable $x=f(t)$, $y=g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ est représentée paramétriquement par des fonctions qui ne sont pas absolument continues nous ne savons pas toujours ce que signifie l'intégrale classique

$$s=\int_0^1 \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\, dt.$$

Mais la géométrie peut venir au secours de l'analyse et suggérer de définir l'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{dx^2+dy^2}$$

de la même façon que l'intégrale de Stieltjes, c'est à dire comme la limite de

$$\sum \sqrt{[x(t_{i+1})-x(t_i)]^2+[y(t_{i+1})-y(t_i)]^2} \qquad (0=t_1<t_2\ldots<t_n=1)$$

lorsque la plus grande des quantités $(t_{i+1}-t_i)$ tend vers zéro. La représentation analytique

$$s=\int_0^1 \sqrt{dx^2+dy^2}$$

découle alors de la définition géométrique au lieu de la précéder.

Le même fait se reproduit relativement à l'aire des surfaces.

Mais surtout notre but est de rattacher les définitions de la longueur et de l'aire à l'application d'un procédé général utile dans bien d'autres questions. C'est le procédé de prolongement d'une fonction d'un champ donné à un champ plus étendu par la construction d'une fonction égale à la fonction dans le champ donné et conservant dans le champ étendu une ou plusieurs propriétés importantes de la fonction donnée.

La géométrie élémentaire elle même nous fournit de nombreux exemples de cette méthode. Pour définir la mesure d'un segment, on définit la mesure des segments commensurables avec l'unité de longueur, puis on impose à la mesure des segments quelconques la condition d'être une fonction continue qui soit égale, dans le cas des segments commensurables, à la mesure déjà définie.

Il serait naturel de définir de même l'aire d'une surface comme une fonction de surface qui est égale dans le cas d'une surface polyédrale à l'aire définie par les procédés de la géométrie élémentaire et qui est continue dans tout le champ des surfaces continues.

Seulement ici une difficulté se présente: déjà dans le champ restreint des surfaces polyédrales l'aire est une fonction discontinue (Voir la note à la page 216). Il faut donc être moins exigeant sur la régularité du prolongement.

Dans le cas actuel, c'est la notion de semi-continuité due à M. Baire qui va nous servir de base. La propriété mentionnée dans la note précédemment citée de M. Lebesgue pourrait conduire à formuler la définition suivante: la longueur d'une courbe est une fonction semi continue inférieurement de la courbe, fonction assujettie à être égale dans le cas des lignes polygonales à la valeur de la longueur définie par la géométrie élémentaire.

Mais trois questions se posent au sujet d'une telle définition: 1° pourquoi ne pas imposer à la longueur d'une courbe la même condition que l'on pose en géométrie élémentaire pour définir la mesure des segments: à savoir que ce soit une fonction continue?

2° si l'on n'impose que la semi-continuité inférieure, pourquoi celle-ci plutôt que la semi-continuité supérieure?

3° si l'on n'impose que la semi-continuité inférieure, n'y a-t-il qu'une seule solution?

La réponse à la première question est que si une fonction continue d'une courbe continue existait, qui fut égale à la longueur classique dans le cas des lignes polygonales, il faudrait au moins que cette fonction fut déjà continue dans le champ des seules lignes polygonales. On sait qu'il n'en est pas ainsi.

La réponse à la seconde question s'obtient de la même facon: s'il existait une fonction semi-continue supérieurement sur le champ des courbes continues qui soit la longueur dans le cas des lignes polygonales cette fonction ne serait peut être pas semi-continue dans le champ des seules lignes polygonales, mais il serait impossible de trouver une suite de lignes polygonales P_n convergeant vers la ligne polygonale P et telle que la limite des longueurs des P_n fut supérieure à la longueur de P. Or il est clair que cela est possible.

La réponse à la troisième question est aussi nette. Il est parfaitement possible de construire une fonction de courbe continue qui est semi-continue inférieurement, qui est égale à la longueur ordinaire dans le cas des lignes polygonales et qui dans le cas général n'est pas égale à la valeur donnée par la définition généralement adoptée.

Il suffit pour construire une telle fonction de la prendre égale à la longueur telle qu'elle est généralement définie sauf dans le cas de certaines courbes égales formant un ensemble parfait P et dont aucune n'est polygonale, cas où on prendra pour valeur de la fonction la moitié par exemple de la longueur ordinaire. L'ensemble parfait P sera par exemple composé de toutes les demi circonférences de rayon égal à l'unité.

Nous voyons donc qu'il n'y a pas lieu de substituer un autre genre de continuité à la semi-continuité inférieure mais qu'il n'est pas possible d'adopter purement et simplement le premier essai indiqué plus haut de définition par cette même semi-continuité inférieure.

Il nous suffira cependant de compléter convenablement ce premier essai pour donner la nouvelle justification annoncée de la définition de M. Lebesgue, au moyen des remarques suivantes que nous ferons en même temps pour la longueur et pour l'aire.

1° *Dans le champ e des lignes polygonales* la longueur l est une fonction de ligne qui est semi-continue inférieurement.

2° Dans le champ f des lignes polygonales et de leurs limites c'est à dire dans le champ des courbes continues, il existe une fonction de ligne, b, qui est sur le champ e égale à la fonction l précédemment définie, qui est, sur le champ étendu f,

1° *Dans le champ E des surfaces polyédrales*, l'aire A est une fonction de surface qui est semi-continue inférieurement.

2° Dans le champ F des surfaces polyédrales et de leurs limites, c'est à dire dans le champ des surfaces continues, il existe une fonction de surface, B qui est sur le champ E, égale à la fonction A précédemment définie, qui est, sur le champ étendu semi-continue inférieurement *et qui est la moins discontinue de toutes les fonctions de cette espèce.*

3° Cette fonction particulière a pour valeur pour chaque courbe continue, c, la plus petite des limites des valeurs de l sur les lignes polygonales qui tendent vers la courbe c, c'est à dire que c'est la longueur au sens généralement adopté et sous la forme même proposée par M. Lebesgue.

F, semi-continue inférieurement *et qui est la moins discontinue de toutes les fonctions C de cette espèce.*

3° Cette fonction particulière B a pour valeur pour chaque surface continue, s, la plus petite des limites des valeurs de A sur les surfaces polyédrales qui tendent vers la surface s, c'est à dire l'aire au sens de M. Lebesgue.

Définitions. Il y a lieu de préciser la portée de ces remarques en indiquant exactement le sens des locutions employées.

Une courbe continue et une surface continue sont entendues ici comme les images d'un intervalle linéaire et d'un cercle, c'est à dire qu'elles peuvent être représentées par des relations de la forme

$$M = f(m)$$

désignant une transformation univoque et continue d'un point m en un point M, m décrivant soit l'intervalle soit le cercle.

Une suite de courbes continues $c, c_2 \ldots$ (ou de surfaces continues $s, s_2 \ldots$) converge vers une courbe continue c (ou une surface continue s) lorsqu'on peut établir entre les points de c_n de c (ou de s_n et de s) une correspondance biunivoque et bicontinue telle que la distance de deux points correspondants converge uniformément. (Le voisinage entre c_n et c, ou s_n et s, est donc ici le voisinage qualifié d'ordre zéro dans le calcul des variations).

Une fonction U de lignes (ou de surfaces) est semi-continue inférieurement en c_0 sur un champ g de courbes c (en s_0 sur un champ H de surfaces) si sa valeur en c_0 (en s_0) est égale à la plus petite des limites de ses valeurs quand c tend vers c_0 en restant sur g (quand s tend vers s_0 en restant sur H).

En disant que par exemple B est la moins discontinue des fonctions C nous voulons dire que l'oscillation de B en s sur H est au plus égale à celle de C et qu'en particulier pour toute surface s pour laquelle $B(s) \neq C(s)$ la première oscillation est inférieure à la seconde et réciproquement. Mais comme ici la plus grande des limites de chacune des fonctions $C(s)$ au voisinage d'une surface quelconque est toujours infinie, on ne peut plus mesurer l'oscillation par un nombre fini ni la représenter par la longueur d'un segment fini. On peut toutefois la représenter par une demi-droite et alors la demi droite relative à B sera comprise dans celle relative à C.

Démonstration. Je ne sais si la remarque 1° a été déjà faite et prouvée explicitement; sa démonstration peut être obtenue sans difficulté en utilisant un mode de démonstration employé par M. Baire dans son traité d'Analyse (page 206); elle sera du reste publiée ailleurs [1]).

Cette remarque 1° est la seule qui nécessite une démonstration séparée pour la longueur et pour l'aire. Les deux autres remarques peuvent être établies par un seul et même raisonnement. Et même ce raisonnement peut s'étendre à un cas infiniment plus général. C'est cette proposition générale que nous allons maintenant énoncer et démontrer.

SECONDE PARTIE.

Prolongement d'une fonctionnelle semi-continue inférieurement sur un ensemble abstrait.

Définitions. L'aire et la longueur sont des fonctions dont les variables ne sont pas des nombres et qui rentrent dans la catégorie des fonctions appelées fonctionnelles par M. Hadamard.

Considérons d'une façon générale une fonctionnelle $A(s)$ dont la valeur est finie et bien déterminée pour chaque éléments d'un *ensemble abstrait* E, c'est à dire d'un ensemble dont nous ne précisons pas la nature des éléments.

Pour définir la semi-continuité de $A(s)$ sur E, nous devons nécessairement supposer que l'ensemble E fait partie d'une classe d'éléments pour laquelle une définition des ensembles dérivés a été donnée.

Nous allons en outre supposer, pour assurer la validité de notre

[1]) Fréchet, *La semi-continuité en géométrie élémentaire;* Nouvelles Annales de mathématiques, p. 1, t. III 1924.

théorème [1]) que cette classe est ce que nous avons appelé une classe (H) c'est à dire que la dérivation des ensembles y satisfait aux conditions suivantes:

α) La dérivation est distributive: $(E+F)' = E' + F'$.

β) L'ensemble dérivé d'un ensemble fini (c.-à-d. composé d'un nombre fini d'éléments) est vide.

γ) Tout ensemble dérivé est fermé (c.-à-d. comprend son propre ensemble dérivé).

Bien entendu, la classe des surfaces continues est une classe (H) quand on y adopte la définition de la convergence précisée précédemment (Selon l'usage, nous appelons ensemble dérivé d'un ensemble E l'ensemble des éléments d'accumulation de E, chacun de ceux-ci étant par définition tel dans ce cas qu'il existe une suite d'éléments de E qui sont distincts et convergent vers cet élément d'accumulation).

Nous pouvons considérer comme *voisinage* d'un élément s_0 de la classe tout ensemble V_{s_0} (d'éléments de la classe) auquel s_0 est intérieur. On pourrait même supposer que V_{s_0} est un ensemble ouvert.

Soit alors s_0 un élément de E' dérivé de E; il y aura dans tout voisinage V_{s_0} de s_0 une infinité d'éléments distincts appartenant à E.

Considérons la borne inférieure des valeurs de $A(s)$ sur les éléments, distincts de s_0, qui appartiennent à l'ensemble $E \cdot V_{s_0}$ commun à E et à V_{s_0}. La borne supérieure de cette borne inférieure quand V_{s_0} est un voisinage variable de s_0 pourra être appelée le *minimum de A en s_0 sur E* et désignée par $A_E(s_0)$. On définira de même le maximum $A^E(s_0)$ et par suite l'*oscillation* $A^E(s_0) - A_E(s_0)$ de A en s_0 sur E

[1]) La démonstration que nous allons donner serait la même dans le cas moins général où la classe considérée est celle que M. Hausdorff appelle espace topologique. (A notre avis d'ailleurs cette expression s'appliquerait plus justement à un espace où la dérivation des ensembles est définie d'une manière entièrement quelconque). Elle serait au contraire un peu simplifiée dans le cas moins général encore des classes (S) c'est à dire des classes (H) où la dérivation des ensembles est définie par l'intermédiaire de la notion de convergence d'une suite infinie d'éléments.

Les simplifications ne seraient pas accrues par la restriction des raisonnements au cas des classes (D): celles où la convergence est définie par l'intermédiaire d'une distance. Mais par contre ce cas se prête mieux à l'introduction de la notion de continuité uniforme et par suite à la généralisation d'un théoréme de M. Bouligand (Bull. Sc. Mathem., 1923) dont nous avons eu connaissance en terminant le présent mémoire. Nous publions séparément cette généralisation. (Prolongement des fonctionnelles continues sur un ensemble abstrait, Bull. Sc. Math., t. 48, 1924, p. 1—12).

On démontre facilement que le minimum de A en s_0 sur E peut être défini également comme la plus petite des limites de A en s_0 sur E en appelant limite de A en s_0 sur E tout nombre qui est pour tout voisinage V_{s_0} de A une des valeurs limites des valeurs prises sur les éléments en nombre infini communs à E et V_{s_0}.

Le minimum A_E pourrait être infini, mais dans ce cas il serait infini d'un signe déterminé. Pour simplifier le raisonnement considérons d'abord le cas où le minimum A_E est partout fini sur E', c'est en particulier ce qui aurait lieu si A était borné sur E. Ceci étant nous voyons que $A(s)$ étant définie sur E, son minimum $A_E(s)$ est bien défini sur l'ensemble E' dérivé de E.

Prolongement. On pourrait être tenté de considérer A_E comme le *prolongement* de A sur E'. Cela n'aurait d'intérêt que si E' n'était pas une partie de E, c'est-à-dire si E n'était pas fermé. Mais si E n'est pas fermé, il peut arriver que certains éléments de E soient communs à E et E' et alors si A et A_E sont les valeurs d'une même fonction sur E et sur E', ces valeurs doivent être égales sur l'ensemble $E.E'$ commun à E et à E'.

Donc nous sommes amenés à *ne considérer A_E comme le prolongement de A sur E' que si 1° E n'est pas fermé 2° A est semi-continue inférieurement sur* E, c'est-à-dire est égal à son minimum A_E partout où celui-ci est défini en même temps que lui c'est-à-dire sur $E.E'$.

Ces conditions nécessaires sont suffisantes mais il est moins évident qu'il ne parait, qu'elles le soient.

Nous prolongeons l'ensemble E; nous le remplaçons par l'ensemble $F = E + E'$ et nous substituons à A une fonctionnelle que nous pouvons désigner par $B(s)$ et qui est définie sur F comme égale sur E à A et sur E' à son minimum A_E.

Pour que la fonctionnelle B puise être considérée comme le prolongement de A sur F, il faut évidemment qu'elle garde sur F la seule propriété attribuée jusqu'ici à A sur E, à savoir d'être semi-continue inférieurement.

Il est vrai que si s_0 appartient à F' — c'est à dire à E' — chaque limite de A en s_0 sur E est aussi — puisque $B = A$ sur E — une limite de B en s_0 sur $E + E'$. Mais cela prouve seulement que $A_E(s_0) \geqq B_F(s_0)$ et par conséquent que $B(s_0) \geqq B_F(s_0)$. Il faut montrer que l'inégalité est impossible. Or soit V_{s_0} un voisinage ouvert de s_0; $B_F(s_0)$ est une des limites des valeurs de B sur $F.V_{s_0}$, c'est à dire qu'on a $B_F(s_0) = \lim B(s_n)$, où $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ sont des éléments de F distincts et appartenant à V_{s_0}. Ou bien une infinité des s_n appartiennent à E et alors on aurait: $\lim B(s_n) = \lim A(s_n)$ et par suite $B_F(s_0)$ serait une des limites de A sur $E.V_{s_0}$. Ou bien en supprimant au besoin les premiers s_n, toute la suite des s_n appartiendrait à E' et chacun d'eux étant intérieur à V_{s_0}, il y aurait un voisinage V_{s_n} de s_n appartenant à V_{s_0}. Comme $B(s_n) = A_E(s_n)$, il y aurait dans V_{s_n} un élément s'_n de E tel que $|B(s_n) - A(s'_n)| < \frac{1}{n}$. Les éléments $s'_1, s'_2, \ldots$ appartiennent à V_{s_0} et on peut les supposer distincts en choisissant convenablement $V(s_n)$ — disjoint de $s'_1, \ldots s'_{n-1}$. Donc $B_F(s_0)$ serait encore une des limites de A sur V_{s_0}. Ceci ayant lieu dans les deux cas, pour tout voisinage V_{s_0} de s_0, $B_F(s_0)$ serait une des limites de A en s_0 sur E, d'où $B_F(s_0) \geqslant A_E(s_0) = B(s_0)$.

Finalement, les deux relations en sens contraire obtenues nous donnent $B_F(s_0) = B(s_0)$, c'est à dire que B est semi-continue inférieurement sur F.

Unicité du prolongement. Ce résultat semble décisif. Cependant, il nous prouve seulement: qu'il existe au moins *une* fonctionnelle semi-continue inférieurement sur $F = E + E'$ et égale à $A(s)$ sur E, à savoir $B(s)$. Mais n'y en a-t-il pas d'autres? Il est facile de voir que $B(s)$ n'est pas nécessairement la seule fonctionnelle répondant à cette condition. Nous en avons donné déjà un exemple pour la longueur; on formerait un exemple analogue pour l'aire. On peut même donner un exemple d'une autre nature dans le cas d'ensembles de points d'une droite.

Supposons que la classe considérée soit celle qui a pour éléments les points d'un segment de droite I, avec la définition ordinaire des éléments d'accumulation — (c'est donc bien une classe H). Et prenons pour E l'ensemble des points d'abscisses rationnelles et pour $A(s)$ l'ensemble des valeurs sur E d'une fonction de s, $f(s)$ continue sur I. La fonction $A(s)$ est bien semi-continue inférieurement (et même continue) sur E. L'ensemble $F = E + E'$ n'est autre ici que le segment I. Le minimum de $A(s)$ en chaque point s de E' est égal à $f(s)$; la fonction $B(s)$ n'est autre que $f(s)$. Mais il existe d'autres fonctions que $f(s)$ qui sont semi-continues inférieurement sur F et qui coïncident avec $A(s)$ sur E. Considérons par exemple l'ensemble G étudié par M. Borel [1]) des points n'ap-

[1]) Leçons sur la théorie des fonctions, 2e édition, 1914; p. 39.

partenant à aucun des intervalles $\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^3}, \frac{p}{q}+\frac{1}{q^3}\right)$ où $\frac{p}{q}$ est un nombre rationnel quelconque $(p<q)$ et H l'ensemble des points intérieurs à l'un de ces intervalles. M. Borel a montré que l'ensemble G existe et est même parfait. Prenons $C(s)=f(s)$ sur H et $C(s)=f(s)-1$ sur G. Comme H comprend E, $C(s)$ est bien égale à $A(s)$ sur E. D'autre part comme G existe et comme $C(s)<f(s)$ sur G, la fonction $C(s)$ est bien distincte de $B(s)$. Il reste à montrer que $C(s)$ est semi-continue inférieurement sur F c'est à dire partout sur I. En effet si s_0 appartient à H, s_0 est intérieur à un intervalle entièrement composé de points de H. Donc $C(s)$ et $f(s)$ coïncident, non seulement sur s_0 mais dans tout intervalle assez petit comprenant s_0. Par suite $C(s)$ est semi-continue inférieurement en tout point s_0 de H comme $f(s)$. D'autre part si s_1 appartient à G, comme G est parfait, il y a dans tout intervalle comprenant s_1, des points de G. Donc si cet intervalle est assez petit, $C(s)$ sera en chacun de ses points égal à $f(s)$ ou $f(s)-1$ et par suite voisin de $f(s_1)$ ou de $f(s_1)-1$ et il contiendra sûrement des points où $C(s)$ sera voisin de $f(s_1)-1$. Donc le minimum de $C(s)$ en s_1 est $f(s_1)-$ $-1=C(s_1)$. Ainsi $C(s)$ est bien semi-continue inférieurement sur tout F.

Cependant nous voyons bien sur cet exemple même que la fonction $B(s)$ convient mieux que $C(s)$ pour représenter le prolongement de $A(s)$.

Quelle est sa supériorité dans le cas général: elle tient à ce que *c'est la moins discontinue* de toutes les fonctions $C(s)$.

Pour expliquer ce que nous entendrons par là et pour le démontrer en revenant au cas général, faisons d'abord quelques remarques.

Soit $C(s)$ une quelconque des fonctions semi-continues inférieurement sur $F=E+E'$ et égales à $A(s)$ sur E. (Il en existe au moins une, à savoir $B(s)$). Soit s_0 un élément de $F'=E'$. Toute limite de $A(s)$ en s_0 sur E est une des limites de $C(s)$ en s_0 sur F, puisque E est une partie de F sur laquelle $C=A$.

On a donc $A^E(s_0)\leqslant C^F(s_0)$ et $A_E(s_0)\geqslant C_F(s_0)$, ou $B(s_0)\geqslant C(s_0)$. Comme on a sur E $B=C$, on voit qu'on a partout sur F

$$C(s)\leqslant B(s).$$

Il en résulte qu'on a aussi $C^F(s_0)\leqslant B^F(s_0)$ en tout élément s_0 de E', d'où:

$$A^E(s_0)\leqslant C^F(s_0)\leqslant B^F(s_0).$$

Nous aurons prouvé l'égalité de ces trois quantités si nous démontrons que l'inégalité $A^E(s_0) < B^F(s_0)$ est impossible. En effet admettons cette inégalité pour un instant et intercalons un nombre l, de sorte que

$$A^E(s_0) < l < B^F(s_0).$$

Il y aurait au moins un voisinage V_{s_0} de s_0 tel que la borne supérieure de A sur $E.V_{s_0}$ fut inférieure à l. Sur ce voisinage, $B^F(s_0)$ est une des limites des valeurs prises par B, donc il y a un élément au moins σ appartenant à $F.V_{s_0}$ et tel que $B(\sigma) > l$. Ou bien σ appartient à E et alors il y aurait un élément σ de $E.V_{s_0}$ sur lequel $A(\sigma) = B(\sigma) > l$. Ou bien σ appartient à E' et comme on peut supposer d'avance que V_{s_0} est ouvert, il existe un voisinage V_σ de σ appartenant entièrement à V_{s_0}. Comme $B(\sigma) = A_E(\sigma)$; $B(\sigma)$ est l'une des limites des valeurs prises par A sur $E.V_\sigma$ et par suite sur $E.V_{s_0}$. Il y a donc au moins un élément σ' de $E.V_{s_0}$ sur lequel $A(\sigma') > l$. Dans les deux cas la borne supérieure de A sur $E.V_{s_0}$ serait supérieure ou égale à l, d'où contradiction.

Ainsi nous avons bien prouvé qu'en tout élément s_0 de E'

$$A^E(s_0) = C^F(s_0) = B^F(s_0).$$

Comparons les oscillations de C et de B en s_0 sur F. Leur différence est

$$[C^F(s_0) - C_F(s_0)] - [B^F(s_0) - B_F(s_0)] = B(s_0) - C(s_0) \geqslant 0$$

Donc l'oscillation de B n'est nulle part supérieure à celle de C; elle est la même là où $B = C$ et inférieure, là où $B \neq C$. Si donc B et C sont deux fonctionnelles distinctes, l'oscillation de B n'est nulle part supérieure à celle de C et elle est même inférieure à celle de C en au moins un élément s_0 de F. C'est en ce sens que $B(s)$ *est la moins discontinue* de toutes les fonctionnelles $C(s)$. On peut ajouter en outre qu'elle posséde à un certain point de vue les mêmes discontinuités que A, bien qu'elle soit définie sur un champ plus étendu, puisqu'on a en tout élément s_0 de E'

$$B^F(s_0) - B_F(s_0) = A^E(s_0) - A_E(s_0).$$

Prolongement infini. Nous avons supposé dans ce qui précéde que la fonctionnelle $A(s)$ semi-continue inférieurement sur E a un maximum et un minimum fini en tout élément de $E.E'$. Examinons les modifications à introduire aux raisonnements et aux résultats précédents dans le cas contraire.

On peut se placer à un premier point de vue. On peut considérer une fonctionnelle comme bien définie si en certains éléments de son champ d'existence on lui attribue une valeur infinie d'un signe déterminé. Alors les résultats précédents subsistent sans changement.

Ou bien on peut désirer n'envisager que les fonctionnelles qui ont en tout élément de leur champ d'existence une valeur finie.

Alors le prolongement de $A(s)$ ne sera possible au dela de E que sur la partie de E' où $A_E(s)$ est fini. *Appelons f l'ensemble* des éléments de E et de ceux des éléments de E' *où le minimum de A sur E est fini.* Et soit $b(s)$ la fonctionnelle égale à $A(s)$ sur E et à $A_E(s)$ sur $f.E'$. Si l'on revoit les raisonnements précédents, on voit qu'ils s'appliquent aussi bien à $b(s)$ et f qu'à $B(s)$ et F. Seulement l'ensemble f n'est pas nécessairement fermé et le maximum $b^f(s)$ de b en s sur f peut être infini. Dans ce cas, en disant que $b(s)$ est la moins discontinue de toutes les fonctionnelles $c(s)$ semi-continues inférieurement sur f qui prolongent $A(s)$, on entendra que $c_f(s) \leqslant b_f(s)$ puisque $c^f(s)$ et $b^f(s)$ étant égaux à $+\infty$, aucune des deux oscillations ne peut plus être mesurée par un nombre fini.

C'est en particulier ce qui se passe pour la longueur et pour l'aire.

Prolongement d'une fonctionnelle continue. Nous dirons qu'une fonctionnelle $V(s)$ est continue sur un ensemble G si elle est semi-continue à la fois supérieurement et inférieurement sur G; c'est à dire si l'on a en tout élément s_0 de $G.G'$:

$$V_G(s_0) = V(s_0) \quad \text{et} \quad V^G(s_0) = V(s_0); \tag{1}$$

c'est à dire encore si V a une seule limite en s_0 sur G et si cette limite est égale à $V(s_0)$.

Quelle que soit la fonctionnelle $A(s)$ définie sur une partie E de G comme égale à $V(s)$, on aura évidemment en tout élément s_0 de E'

$$V_G(s_0) \leqslant A_E(s_0) \leqslant A^E(s_0) \leqslant V^G(s_0). \tag{2}$$

Si donc $A(s)$ peut être prolongée de E sur G par une fonctionnelle $V(s)$ continue sur G, $A(s)$ elle même est continue sur E. Car on tire des égalités (1) et (2)

$$A_E(s_0) = A^E(s_0) = V(s_0) \quad \text{sur } G.E' \tag{3}$$

et comme, sur E, $V(s_0) = A(s_0)$, on a sur $E.E'$: $A_E(s_0) = A(s_0) = A^E(s_0)$.

Inversement donnons-nous une fonctionnelle $A(s)$ continue sur E et voyons si elle peut être prolongée par une fonctionnelle $V(s)$ continue sur un ensemble G plus étendu que E. Nous supposerons comme plus haut que nous prenons pour G l'ensemble $F=E+E'$ ou si cela n'est pas possible nous prendrons pour G une partie de F. Remarquons que si G qui comprend E est compris dans $F=E+E'$; G' qui comprend E' sera compris dans $F'=E'$; donc G' est identique à E'. Alors d'après les égalités (3), on devra avoir, si V existe:

$$A_E(s_0)=A^E(s_0) \quad \text{sur } G.E'.$$

Donc: il ne suffit pas que $A(s)$ soit continue sur E *pour qu'on puisse prolonger A par une fonctionnelle continue sur un champ G plus étendu; il faut encore qu'en tout élément G de ce champ où A n'est pas définie: son minimum A_E et son maximum A^E relativement à E*, qui eux, y sont définis, *soient égaux.*

En d'autre terme le prolongement d'une fonctionsnelle $A(s)$ continue sur un ensemble E n'est possible au dela de E dans une partie du champ $F=E+E'$ que dans cette partie où $A_E(s)=A^E(s)$. Appelons *élément normal* relativement à l'ensemble E et à la fonctionnelle $A(s)$ continue sur E, tout élément s_0 qui appartient à E ou qui, appartenant à E', est tel que $A_E(s_0)=A^E(s_0)$ et soit F_0 *l'ensemble de tels éléments. Si le prolongement visé est possible, il a lieu au plus dans F_0* — qui comprend E et qui est compris dans F — et *la fonctionnelle cherchée*, $V(s)$, y est déterminée: *égale à $A(s)$ sur E et à $A_E(s_0)=A^E(s_0)$* sur tout élément s_0 de $E'.F_0$.

Réciproquement; *cette fonctionnelle $V(s)$*, déterminée sur un ensemble F_0 déterminé est en effet *continue sur cet ensemble.* Elle est en effet égale sur F_0 à la moins discontinue $B(s)$ des fonctionnelles semi-continues inférieurement sur F et égales à A sur E, et à la moins discontinue $D(s)$ des fonctionnelles semi-continues supérieurement sur F et égales à A sur E. On voit même qu'en prenant $V(s)=B(s)$ sur tout F on prolonge la fonctionnelle A continue sur E par une fonctionnelle $V(s)$ continue sur l'ensemble plus étendue F_0, semi-continue inférieurement sur l'ensemble plus étendu encore $F=E+E'$ et la moins discontinue de toutes les fonctionnelles de cette espèce.

Bien entendu le prolongement ne sera effectif sur F_0 que si F_0 déborde E ce qui n'a pas lieu nécessairement. Mais s'il n'a pas lieu on est d'autre part certain qu'on a atteint sur E lui même le champ maximum d'extension de la fonctionnelle $A(s)$ continue sur E par une fonctionnelle continue sur une partie plus étendue de $F = E + E'$.

17 Janvier 1924.