Sur un ensemble fermé conduisant à un ensemble non mesurable (B).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Nous avons démontré avec M. Mazurkiewicz dans ce journal [1]) qu'il existe un ensemble plan fermé F_0, tel que l'ensemble de toutes les droites parallèles à l'axe $0x$ qui rencontrent F_0 en une infinité non dénombrable de points est non mesurable (B). Le but de cette Note est de donner un exemple effectif d'un tel ensemble.

L'ensemble de tous les cercles rationnels du plan (c'est-à dire cercles dont le rayon est rationnel et dont le centre a des coordonnées rationnelles) est, comme on sait, effectivement énumérable: nous savons donc construire effectivement une suite infinie

$$K_1,\ K_2,\ K_3, \ldots,$$

formée de tous les cercles rationnels du plan. Soit Q_n l'intérieur du cercle K_n.

Désignons par H l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Soit z un nombre irrationnel donné de l'intervalle $(0, 1)$,

$$z = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \frac{1|}{|n_3} + \ldots \tag{1}$$

son développement en fraction infinie. Posons

$$P(z) = H\,\mathrm{C}(Q_{n_1} + Q_{n_2} + Q_{n_3} + \ldots) \tag{2}$$

— ce seront évidemment des ensembles plans fermés, déterminés pour tout nombre z de l'intervalle $(0, 1)$.

[1]) *Fund. Math.* t. VI. p. 161 ss.

Désignons maintenant par M l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace, tels que z est un nombre irrationnel de l'intervalle $(0, 1)$, et (x, y) est un point du plan appartenant à l'ensemble $P(z)$.

Posons

$$F = M + M' \tag{3}$$

— je dis que l'ensemble F_0 qu'on obtient en coupant F par le plan $y = z$ jouira des propriétés désirées.

D'après (3) l'ensemble F est fermé. Or, soit Φ un ensemble fermé donné quelconque, situé dans le carré H. Je dis qu'il existe un plan parallèle au plan $z = 0$ qui coupe F en un ensemble de points dont la projection sur le plan $z = 0$ est l'ensemble Φ.

Pour le prouver remarquons d'abord que tout ensemble plan ouvert est une somme d'une suite infinie d'ensembles tirés de la suite

$$Q_1, \; Q_2, \; Q_3 \ldots. \tag{4}$$

Donc, $C\Phi$ étant un ensemble plan ouvert (puisque Φ est fermé et borné), il existe une suite infinie d'ensembles tirés de (4), soit $Q_{n_1^0}, Q_{n_2^0}, Q_{n_3^0} \ldots,$ telle que

$$C\Phi = Q_{n_1^0} + Q_{n_2^0} + Q_{n_3^0} + \ldots. \tag{5}$$

Posons

$$z_0 = \frac{1|}{|n_1^0} + \frac{1|}{|n_2^0} + \frac{1|}{|n_3^0} + \ldots \tag{6}$$

et désignons par E l'ensemble de points en lesquels le plan $z = z_0$ rencontre l'ensemble F. Je dis que la projection Π de E sur le plan $z = 0$ est l'ensemble Φ.

En effet, Φ étant un ensemble contenu dans H, il résulte de (6) et (7), d'après la définition des ensembles $P(z)$, que.

$$P(z_0) = H\Phi = \Phi. \tag{7}$$

Or, il résulte tout de suite de la définition de l'ensemble M, d'après $F \subset M$, que Π contient l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $(x, y) \,\varepsilon\, P(z_0)$, c'est-à-dire que $\Pi \supset P(z_0)$: d'après (7) nous trouvons donc

$$\Pi \supset \Phi. \tag{8}$$

Or, soit (x_0, y_0) un point de Π. De la définition de l'ensemble Π résulte donc que (x_0, y_0, z_0) est un point de F. D'après (3),

(x_0, y_0, z_0) est donc un point de M ou bien un point limite de M: toutefois il existe une suite infinie de points de M, (x_k, y_k, z_k) $(k=1, 2, \ldots)$ qui converge vers le point (x_0, y_0, z_0). Il en résulte que

$$\lim_{k=\infty} z_k = z_0. \tag{9}$$

Admettons que (x_0, y_0) n'est pas un point de Φ: ce serait donc un point de $C\,\Phi$ et, d'après (5), il existerait un indice p, tel que

$$(x_0, y_0) \,\varepsilon\, Q_{n_p^0}. \tag{10}$$

Or, il existe, comme on sait, pour le nombre irrationnel z_0 et pour le nombre naturel p, un nombre positif δ, tel que tout nombre irrationnel z, satisfaisant à l'inégalité $|z - z_0| < \delta$, donne un développement en fraction continue ayant le même $p^{ième}$ dénominateur que le nombre z_0. Désignons par

$$z_k = \frac{1|}{|n_1^k} + \frac{1|}{|n_2^k} + \frac{1|}{|n_3^k} + \ldots \tag{11}$$

le développement en fraction continue du nombre z_k: d'après (9) nous aurons donc

$$n_p^k = n_p^0 \quad \text{pour } k > \mu,$$

donc

$$Q_{n_p^k} = Q_{n_p^0} \quad \text{pour } k > \mu. \tag{12}$$

Or, la suite (x_k, y_k, z_k) $(k=1, 2, \ldots)$ convergeant vers le point (x_0, y_0, z_0), nous avons, d'après (10):

$$(x_k, y_k) \,\varepsilon\, Q_{n_p^0} \quad \text{pour } k > \nu,$$

donc, d'après (12):

$$(x_k, y_k) \,\varepsilon\, Q_{n_p^k} \quad \text{pour } k > \mu + \nu$$

ce qui prouve, d'après (11) et d'après la définition des ensembles $P(z)$, que (x_k, y_k) ne peut être un point de $P(z_k)$ pour k suffisamment grands, et parsuite (x_k, y_k, z_k) ne peut être pour ces k un point de M, contrairement à la définition de la suite (x_k, y_k, z_k).

Il est donc impossible qu'il soit à la fois $(x_0, y_0) \,\varepsilon\, \Pi$ et (x_0, y_0) non $\varepsilon\, \Phi$. Il en résulte que $\Pi \subset \Phi$, ce qui donne, d'après (8), $\Pi = \Phi$, c. q. f. d.

Nous avons ainsi démontré que l'ensemble fermé F jouit de la propriété suivante: *Quel que soit l'ensemble plan fermé Φ, situé dans* *le carré H, il existe un plan parallèle au plan $z=0$, dont l'intersection avec F a Φ comme projection sur le plan $z=0$* [1]).

Soit maintenant N l'ensemble-somme de toutes les droites de l'espace parallèles à l'axe $0x$ qui rencontrent F en une infinite non dénombrable de points, et désignons par R l'ensemble qu'on obtient en coupant N par le plan $x=0$.

Nous avons démontré avec M Mazurkiewicz (l. c. p. 163) que, E étant un ensemble (A) de M. Souslin donné quelconque, situé dans l'intervalle $(0, 1)$, il existe un ensemble plan fermé Φ (dont on peut évidemment supposer qu'il est contenu dans le carré H), tel que E est l'ensemble de tous les nombres réels b pour lesquels la droite $y=b$ rencontre l'ensemble Φ en une infinité non dénombrable de points [2]).

Il en résulte sans peine, en vertu de la propriété démontrée de l'ensemble F, que *les sections de l'ensemble R par les droites parallèles à l'axe $0y$ donnent comme projections sur cet axe tous les ensembles (A) situés dans l'intervalle* $(0, 1)$. On en déduit aisément que la section de l'ensemble R par la droite $y=z$, $x=0$ donne l'ensemble S, dont le complémentaire CS (par rapport à cette droite) n'est pas un ensemble (A).

En effet, si CS était un ensemble (A), sa projection T sur l'axe $0y$ serait aussi un ensemble (A), et il existerait une droite $z=z_0$, $x=0$, coupant l'ensemble R suivant l'ensemble T_0 dont la projection sur l'axe $0y$ est T. Or, on déduit tout de suite de la définition des ensembles T_0 et S que le point $(0, z_0, z_0)$ appartient à T_0 ou non, en même temps qu'à S. D'autre part T_0 est évidemment la projection de l'ensemble CS sur la droite $z=z_0$, $x=0$, d'où résulte tout de suite (CS étant situé sur la droite $y=z$, $x=0$) que le point $(0, z_0, z_0)$ appartient à T_0 ou non en même temps qu'à CS. Nous avons ainsi une contradiction, ce qui prouve que CS ne peut être un ensemble (A).

[1]) Remarquons que M. Ważewski a construit (ce journal, t. IV, p. 214—245) un continu à trois dimensions dont toutes les sections par un plan mobile parallèle au plan $z=0$ se projettent sur ce plan suivant un ensemble fermé se changeant d'une façon continue avec la position du plan secant et parcourant tous les sous-ensembles fermés du carré H.

[2]) Notre démonstration utilisait seulement la propriété suivante des ensembles (A), propriété qu'on peut prendre comme définition des ensembles (A): Les ensembles (A) sont des images univoques et continues de l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$.

Remarquons que nous avons ainsi démontré *l'existence d'un ensemble linéaire dont le complémentaire n'est pas un ensemble* (A), en partant de la définition des ensembles (A) comme images continues de l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$, et *n'utilisant pas d'autres propriétés de ces ensembles.* En s'appuyant maintenant sur la propriété que tout ensemble mesurable (B) est un ensemble (A), nous concluons que l'ensemble S n'est pas mesurable (B) (son complémentaire CS n'étant pas un ensemble (A)).

Or, désignons par N_0 l'ensemble qu'on obtient en coupant l'ensemble N par le plan $y=z$. On voit sans peine que N_0 est l'ensemble-somme des droites parallèles à l'axe $0x$ dont l'intersection avec le plan $x=0$ donne l'ensemble S; S étant non mesurable (B), nous en concluons que N_0 est un ensemble non mesurable (B). Or, on voit sans peine que N_0 est l'ensemble-somme de toutes les droites parallèles à l'axe $0x$ qui rencontrent l'ensemble fermé F_0 en une infinité non dénombrable de points. L'ensemble F_0 jouit ainsi de toutes les propriétés désirées.

Observons encore qu'il s'ensuit des résultats de notre note citée que S est un ensemble (A): nous avons ainsi un exemple effectif d'un ensemble (A), dont le complémentaire n'est pas un ensemble (A)[1]. Pareillement on conclut que R est un ensemble (A) plan, dont le complémentaire n'est pas un ensemble (A).

[1]) Le premier exemple d'un tel ensemble, trouvé en 1917 par Souslin et simplifié par Lusin, n'a pas été publié (Outre les propriétés des ensembles (A), utilisées dans notre raisonnement, l'exemple de M. M. Souslin et Lusin fait usage du théorème que l'opération A effectuée sur un système d'ensembles (A) donne toujours un ensemble (A). Un autre exemple de même nature se trouve dans le mémoire de N. Lusin et W. Sierpiński: *Sur un ensemble non mesurable B* (Journal de Mathématiques 1923, p. 65). (La démonstration y fait usage des nombres transfinis).