Sur un problème de M. R. L. Wilder.

Par

Bronisław Knaster (Varsovie).

Dans son ouvrage récent [1]) M. R. L. Wilder a posé le problème de l'existence *sur le plan* [2]) de trois ensembles de points M, G et H tels que

(1) *M soit un ensemble connexe,*

(2) $$G + H \subset M,$$

(3) $$G . H = 0,$$

(4) *$M - G$ et $M - H$ soient des ensembles dispersés*

et

(5) *G et H soient irréductibles relativement à la propriété* (4), c'est à dire tels que, I et J satisfaisant aux conditions

$$G \neq I \subset G \text{ et } H \neq J \subset H,$$

chacun des ensembles $M - I$ et $M - J$ contienne au moins un ensemble connexe.

Je me propose de donner dans cette Note une solution du problème précité, en définissant un ensemble situé sur le plan et en démontrant qu'il satisfait aux conditions (1) — (5).

Je me servirai à ce but de l'ensemble biconnexe S, tel qu'il fut décrit par M. Kuratowski et moi dans l'ouvrage „*Sur les ensembles connexes*" (Fund. Math. II, p. 241—244). J'en rappelle ici la définition.

[1]) *On the dispersion sets of connected point-sets.* Fund. Math. VI, p. 216.

[2]) et a déclaré de l'avoir résolu par l'affirmative pour l'espace à 3 dimensions.

Soit C un ensemble non-dense parfait, situé sur le segment $[0, 1]$ de l'axe X (admettons, pour fixer les idées, que ce soit l'ensemble des points $(x, 0)$ où X peut être écrit dans le système de numération à base 3 sans faire usage de chiffre 1).

Désignons par d_0 le point $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, par P l'ensemble de tous les points de C qui sont des extrémités des intervalles de l'axe x contigus à C, par V l'ensemble de tous les points à ordonnée *rationnelle* situés sur les segments de droite à extrémités d_0 et c, pour tout $c \varepsilon P$, et par W l'ensemble de tous les points à ordonnée *irrationnelle* situés sur les segments de droite à extrémités d_0 et c, pour tout $c \varepsilon C - P$. Posons:

$$S_0 = V + W.$$

Ainsi défini,

(6) *l'ensemble* S_0 *est biconnexe.*

et

(7) *l'ensemble* $S_0 - (d_0)$ *est dispersé* [1]).

En vertu de (6) et (7) le points d_0 est le seul point qui disperse l'ensemble S_0 [2]), mais l'ensemble (d_0) n'est pas le seul sous-ensemble dispersant (*dispersion set* de M. Wilder) de S_0. Soit, en effet, $D(S_0)$ l'ensemble composé de tous les points de S_0 situés sur les droites $y_k = 2^{-1} - 2^{-k}$ pour tout $k > 1$. On a; $D(S_0) \subset S_0$ et

(8) d_0 *non* - $\varepsilon D(S_0)$,

cependant

(9) $S_0 - D(S_0)$ *est un ensemble dispersé.*

En effet, pour tout point $(x, y) \neq d_0$ de $S_0 - D(S_0)$ il existe un k tel que $y_k > y$ et, par conséquent, que la droite $y = y_k$ coupe le plan entre (x, y) et d_0. Ainsi aucun sous-ensemble connexe de $S_0 - D(S_0)$ ne peut admettre simultanément le point d_0 et un point quelconque de $S_0 - D(S_0) - (d_0)$ comme éléments. Or, d_0 appartenant à tout sous-ensemble connexe de S_0 [3]), l'ensemble $S_0 - D(S_0)$ ne contient aucun sous-ensemble connexe.

L'idée directrice de l'exemple que je vais construire consiste à utiliser cette dernière propriété de S_0.

[1]) l. c., p. 244.

[2]) J. R. Kline, *A theorem concerning connected point sets*, Fund. Math. III, p. 238.

[3]) l. c., p. 244.

Etant donné, d'une façon générale, un ensemble biconnexe quelconque S semblable (au sens de Géometrie) à S_0, désignons par $D(S)$ l'image de $D(S_0)$ dans S et considérons une famille d'ensembles $S(d)$ définis pour tout $d \varepsilon D(S)$ et assujettis aux conditions suivantes:

(10) $$S(d) \textit{ est semblable à } S_0,$$

(11) $$S(d) - (d) \textit{ est dispersé}$$

et, $T(d)$ étant le plus petit triangle qui contient $S(d)$,

(12) $$S(d) . S = T(d) . \overline{S} = (d).$$

(13) $$S(d) . \sum_{a \varepsilon D(S) - (d)} S(a) = T(d) . \sum_{a \varepsilon D(S) - (d)} T(a) = 0.$$

$S(d)$ peut être obtenu, par exemple, de la façon suivante.

Etant donné un point quelconque d de $D(S)$, désignons par L le segment de droite contenu dans $\overline{S}$ et contenant d et par N la normale à L en ce point. Or, d étant une des extrémités du segment de la droite N contigu sur elle à l'ensemble parfait non-dense $N . \overline{S}$ et l désignant la longueur de ce segment, considérons sur la droite parallèle à L qui passe par N à la distance $3^{-1} . l$ de L les deux points b et c qui sont situés à la distance $3^{-1} . l$ de N.

On peut définir alors l'ensemble $S(d)$ comme l'image de S_0 dans le triangle b, c, d regardé lui-même comme image de la *transformation semblable* du triangle $(0, 0)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

La démonstration des conditions (10) — (13) est dans ce cas élémentaire.

Ceci établi, soient $\{D_n\}$ et $\{S_n\}$ $(n \geqslant 0)$ les suites données par les formules:

(14) $$D_0 = (d_0), \quad S_0 = S(d_0)$$

et pour $n > 0$

(15) $$D_n = \sum_{d \varepsilon D_{n-1}} D(S(d)), \qquad S_n = \sum_{d \varepsilon D_d} S(d).$$

Posons:

(16) $$M = \sum_{n \geq 0} S_n$$

et

(17) $$G = \sum_{n \geq 0} D_{2n} \textit{ et } H = \sum_{n \geq 0} D_{2n+1}.$$

Je vais montrer que les ensembles M, G et H ainsi définis satisfont aux conditions du problème.

En vertu des formules (14) et (15) on déduit pour tout $n \geqslant 0$: de (8) que

(18) $$D_n \cdot D_{n+1} = 0,$$

de (10) que

(19) *chacun des ensembles $S(d)$ où $d \varepsilon D_n$ est biconnexe*

et de (12) que

(20) $$S_n \cdot S_{n+1} = D_{n+1}.$$

Les propositions (6), (19) et (20) impliquent par induction que pour tout $n \geqslant 0$ l'ensemble $\sum_{0 \leq m \leq n} S_m$ est connexe, comme somme de l'ensemble connexe $\sum_{0 \leq m < n} S_m$ et de l'infinité d'ensembles connexes $S(d)$ où $d \varepsilon D_n$, dont chacun a des points communs avec lui [1]). Par conséquent, l'ensemble M peut être regardé suivant (16) comme somme d'une suite croissante d'ensembles connexes, ce qui entraîne la condition (1).

La condition (2) résulte immédiatement de (17), (20) et (16) et la condition (3) de (17) et (18).

La condition (4) peut être déduite des considérations suivantes.

Pour tout $n \geqslant 0$ fixe l'ensemble $S_n - D_n$ se trouve contenu en vertu de (12) et (15) *à l'intérieur* des triangles de la somme $\sum_{d \varepsilon D_n} T(d)$, tandis que l'ensemble $\sum_{0 \leq m < n} S_m - D_n$ est situé *à l'extérieur* de chacun d'eux. Il en résulte donc selon (16) que

(21) *aucun sous-ensemble connexe de $M - D_n$ n'admet à la fois de points de $\sum_{0 \leq m < n} S_m$ et de S_n comme éléments.*

J'aurai recours, en outre, à la propriété suivante de M:

(22) *aucun sous-ensemble connexe de $\sum_{0 \leq m \leq n} S_m - D_{n+1}$ n'admet simultanément de points de $\sum_{0 \leq m < n} S_m$ et de $S_n - D_n$ comme éléments.*

La condition (12) implique, en effet, par induction que pour tout $d \varepsilon D_n$ on a

(23) $$T(d) \cdot \overline{\sum_{0 \leq m < n} S_m} = (d).$$

[1]) l. c., p. 210, corollaire V.

D'autre part, l'ensemble d'accumulation de triangles semblables disjoints se confondant avec celui d'accumulation de leurs sommets, on a

$$\overline{\sum_{d \varepsilon D_n} T(d)} = \sum_{d \varepsilon D_n} \overline{T(d)} + \overline{D_n},$$

d'où

$$T(d) \cdot \overline{\sum_{a \varepsilon D_n - (d)} T(a)} = T(d) \cdot \sum_{a \varepsilon D_n - (d)} \overline{T(a)} + T(d) \cdot \overline{D_n}.$$

Le premier sommande de cette somme est nul en vertu de (13) et comme on a $D_n \subset S_{n-1} \subset \sum_{0 \leq m < n} S_m$, donc $\overline{D_n} \subset \sum_{0 \leq m < n} S_m$, le second se réduit en vertu de (23) à (d). On a par conséquent

$$T(d) \cdot \overline{\sum_{a \varepsilon D_n - (d)} T(a)} = (d). \tag{24}$$

Or, envisageons la partie de l'ensemble $S_n - D_{n+1}$ située dans un trapèze quelconque T que les images de droites parallèles y_k découpent dans le triangle $T(d)$.

Comme $\overline{T} = T \subset T(d)$ et d *non-ε* T, on conclut de (23) et (24) que

$$\overline{T} \cdot \overline{\sum_{0 \leq m \leq n} S_m - T(d)} = 0,$$

ce qui prouve à plus forte raison que $T \cdot (S_n - D_{n+1})$ est séparé de la partie de $\sum_{0 \leq m \leq n} S_m$ située en dehors du triangle $T(d)$. Comme d'autre part le produit considéré est par définition disjoint de D_{n+1}, il n'a aucun point commun avec les images des y_k, puisque aucun point de $M - D_{n+1}$ n'est situé sur elles. Or, le trapèze T ne communiquant avec le reste du triangle $T(d)$ que par ces parallèles, l'ensemble $T \cdot (S_n - D_{n+1})$ se trouve en conséquence séparé de la partie de $S_n - D_{n+1}$ située dans $T(d) - T$. Il est ainsi séparé de tout son complémentaire dans $\sum_{0 \leq m \leq n} S_m$. Tout point de $S_n - D_n$ appartenant à un trapèze T et tout point de $\sum_{0 \leq m < n} S_m$ appartenant à son complémentaire dans $\sum_{0 \leq m \leq n} S_m$, ces deux points ne peuvent donc être unis par aucun sous-ensemble connexe de $\sum_{0 \leq m \leq n} S_m - D_{n+1}$, ce qui prouve la propriété (22).

Enfin, la condition (13) implique que tout ensemble $S(d)$ où $d \varepsilon D_n$ est séparé de tout ensemble $S(a)$ où $a \varepsilon D_n - (d)$, puisqu'ils sont situés dans deux triangles disjoints. Selon (15) aucun sous-ensemble connexe de S_n ne peut donc admettre à la fois de points de ces deux ensembles comme éléments. Or, comme en vertu de (11) tout $S(d)-(d)$ et, en vertu de (9) et (10), tout $S(d) - D(S(d))$ est un ensemble dispersé, on en conclut que pour tout $n \geqslant 0$

(25) $$S_n - D_n \textit{ est un ensemble dispersé,}$$

et

(26) $$S_n - D_{n+1} \textit{ est un ensemble dispersé.}$$

Ceci établi, supposons que $M - G$ ou $M-H$ contienne un ensemble connexe E (ne se réduisant pas à un point). Abstraction faite de $S_0 G$ ou $S_0 - H$, qui en vertu de (7) et de (9) ne peuvent contenir E, la proposition (21) implique aussitôt d'après (17) l'existence d'un nombre naturel $n = n_0$ tel que

(27) $$E \subset (S_{n_0} - D_{n_0}) + (S_{n_0+1} - D_{n_0+2}).$$

Or, en posant $n = n_0 + 1$ dans (22) et (26) et $n = n_0$ dans (25), on voit que E ne peut ni admettre à la fois de points de ces deux sommandes comme éléments, ni être contenu entièrement dans un d'eux, contrairement à l'inclusion (27).

La condition (4) est par conséquent établie.

Passons à la dernière condition. L'égalité (20) entraîne l'inclusion $D_n \subset S_{n-1}$, d'où $S(d) \cdot D_n \subset S(d) \cdot S_{n-1}$, quel que soit $S(d)$. Comme d'après (12) on a $S(d) \cdot S_{n-1} = (d)$, il vient $S(d) \cdot D_n \subset (d)$, donc

(28) $$S(d) - (d) \subset S(d) - D_n.$$

Comme en vertu de (17) on a $S(d) - D_n - D_{n+1} \subset M - G - H \subset \subset M - I$, l'inclusion (28) implique que

(29) $$S(d) - (d) - D_{n+1} \subset M - I.$$

Soit maintenant $d \varepsilon D_n$ un point quelconque de $G - I$. Par suite, on a d'une part en vertu de (17) l'inclusion $D_{n+1} \subset M - G$, d'où, à plus forte raison,

(30) $$D_{n+1} \subset M - I,$$

et d'autre part, comme $G - I \subset M - I$:

(31) $$(d) \subset M - I.$$

L'addition des inclusions (29), (30) et (31) membre à membre donne: $S(d) \subset M - I$, ce qui prouve suivant (6) et (10) que $M - I$ contient un ensemble connexe. Comme par raison de symétrie il en est de même de $M - J$, la condition (5) et par conséquent, toutes les conditions du problème se trouvent réalisées.

Il est à remarquer que dans l'exemple qui précède les ensembles G et H, tout en étant disjoints, ne sont pas séparés. On a même $\overline{G} = \overline{H}$. Il est possible cependant de construire un exemple analogue, en remplaçant la condition (3) du problème par celle *que les ensembles G et H soient séparés*. On peut prendre à ce but:

1° comme S_0 l'ensemble biconnexe formé du point $(0, -1)$ — qui le disperse — et des courbes

$$y = cx + \sin \frac{\pi}{x}$$

à ordonnée *rationnelle* pour $(c, 0) \varepsilon P$ et à ordonnée *irrationnelle* pour $(c, 0) \varepsilon C - P$.

2° comme $D(S_0)$ l'ensemble des points de S_0 situés sur la droite $y = \frac{1}{2}$.

3° comme $S(d)$ et $T(d)$ où $d \varepsilon D_n$ les images homéomorphes respectivement à S_0 et au plus petit rectangle (à coté parallèle à l'axe des x) contenant S_0, déformées de façon qu'elles remplissent les conditions (11) — (13) et que les ensembles D_{n+1} viennent se placer pour tout $n > 0$ sur les droites à ordonnées $y \pm 3^{-n}$, y prenant les valeurs de celle de chaque point de D_n. L'ensemble des ordonnées de $G + H$ sera alors isolé.

Les principales formules et la marche générale des raisonnements restent également valables pour cet exemple.

Formia 1924.