Sur un ensemble non dénombrable dont tout homéomorphe est de mesure nulle.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans le vol. VI de ce journal (p. 154) M. Lavrentieff a démontré que si la puissance du continu est *aleph-un*, il existe un ensemble linéaire non dénombrable N, tel que tout ensemble linéaire homéomorphe de N est de mesure lebesguienne nulle. Le but de cette Note est de prouver l'existence d'un tel ensemble N *sans admettre l'hypothèse que la puissance du continu est aleph-un.*

Soit E un ensemble (A) de M. Souslin, dont le complémentaire $\complement E$ n'est pas un ensemble (A) [1]). L'ensemble $\complement E$ est alors, comme on sait, une somme de $\aleph_1$ ensembles non vides mesurables (B) sans points communs deux à deux,

$$(1)\quad \complement E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_\omega + E_{\omega+1} + \ldots + E_\xi + \ldots, \quad (\xi < \Omega)$$

jouissant de la propriété suivante: tout ensemble fermé F (ou, plus généralement, tout ensemble (A)) contenu dans $\complement E$ est contenu dans une somme partielle de la série (1). (C'est-à-dire pour tout ensemble fermé $F \subset \complement E$ il existe un indice $\mu < \Omega$, tel que $FE_\xi = 0$ pour $\xi \geqslant \mu$) [2]).

Soit N un ensemble contenant un et un seul point de chacun des ensembles E_ξ $(\xi < \Omega)$: ce sera évidemment un ensemble non

[1]) Quant à l'existence d'un tel ensemble voir p. e. N. Lusin et W. Sierpiński: *Journal de Mathématiques* t. II. (1923) p. 65.

[2]) N. Lusin et W. Sierpiński l. c. p. 60; aussi *Bull. Acad. Cracovie* 1918. p. 40.

dénombrable (de puissance $\aleph_1$). Je dis que *tout ensemble linéaire homéomorphe de N est de mesure nulle* [1]).

Soit donc H un ensemble homéomorphe de N. D'après le théorème fondamental de M. Lavrentieff [2]) l'homéomorphie entre N et H peut être étendue aux ensembles N^* et H^* qui sont des G_δ, tels que $N^* \supset N$ et $H^* \supset H$. Q étant un sous-ensemble de N^*, désignons généralement par $\varphi(Q)$ l'ensemble correspondant à Q dans l'homéomorphie entre N^* et H^*. Il sera donc $H = \varphi(N)$.

L'ensemble $N^* \mathrm{C} E$, comme produit d'un ensemble mesurable (B) par un ensemble complémentaire à un ensemble (A), est un ensemble complémentaire d'un ensemble (A): son homéomorphe $\varphi(N^* \mathrm{C} E)$ est donc aussi un ensemble complémentaire à un ensemble (A) [3]): c'est donc un ensemble mesurable (L) [4]). Par conséquent nous pouvons poser

$$(2) \qquad \varphi(N^* \mathrm{C} E) = Q + F_1 + F_2 + F_3 + \dots,$$

où Q est un ensemble de mesure nulle et F_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sont des ensembles fermés et bornés.

Or, il résulte de (1) que

$$(3) \quad \varphi(N^* \mathrm{C} E) = \varphi(N^* E_1) + \varphi(N^* E_2) + \dots + \varphi(N^* E_\xi) + \dots \quad (\xi < \Omega).$$

D'après (2) nous avons $F_n \subset \varphi(N^* \mathrm{C} E) \subset H^*$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$ Soit Φ_n le sous-ensemble de N^* correspondant à F_n dans l'homéomorphie entre H^* et N^* (donc tel que $\varphi(\Phi_n) = F_n$): l'ensemble Φ_n sera fermé, comme homéomorphe d'un ensemble fermé et borné. Or, de $F_n \subset \varphi(N^* \mathrm{C} E)$ résulte que $\Phi_n \subset N^* \mathrm{C} E \subset \mathrm{C} E$. D'après la propriété de la série (1) il existe donc un indice $\mu_n < \Omega$, tel que $\Phi_n E_\xi = 0$ pour $\xi \geqslant \mu_n$. L'ensemble N contenant un seul point de chacun des ensembles E_ξ $(\xi < \Omega)$, il en résulte tout de suite (d'après (1)) que l'ensemble $N \Phi_n$ est au plus dénombrable. Son homéomorphe $\varphi(N \Phi_n) = H F_n$ est donc aussi au plus dénombrable et parsuite de mesure nulle. L'ensemble Q étant de mesure nulle, il résulte

[1]) En 1918 nous avons démontré avec M. Lusin (*Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 44) que l'ensemble N se transforme en un ensemble de mesure nulle par toute transformation biunivoque et continue de l'intervalle qui le contient.

[2]) *Fund. Math.* t. VI, p. 149.

[3]) P. Alexandroff: *Fund. Math.* t. V: p. 164; M. Lavrentieff: *Fund. Math.* t. VI, p. 154.

[4]) N. Lusin et W. Sierpiński: *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 44.

de (2) que l'ensemble $\varphi(N^* \cdot E)$ est de mesure nulle. Or, $N \subset N^* \cdot E$, ce qui donne $H = \varphi(N) \subset \varphi(N^* \cdot E)$: l'ensemble H est ainsi de mesure nulle, c. q. f. d.

Or, le problème suivant reste encore ouvert: Existe-t-il un ensemble linéaire non dénombrable, dont toute image univoque et continue est de mesure nulle?