Quelques théorèmes sur les alephs.

Par

Alfred Tarski (Varsovie).

Les théorèmes établis dans cette Note concernent les puissances et les produits infinis des alephs. Dans le § 1 je donne *une généralisation de la formule de recurrence de M. Hausdorff et du théorème connu de M. Bernstein*[1] (*„Bernsteiner Alephsatz“*). Le § 2 contient des formules, qui complètent la formule mentionnée de M. Hausdorff, ainsi que l'application de ces formules à l'étude des puissances des certains nombres cardinaux. Dans le § 3 j'établis des formules qui concernent le produit transfini des alephs, notamment les formules suivantes:

$$\prod_{\xi<\alpha} \aleph_\xi = \aleph_\alpha^{\bar{\alpha}} \text{ \textit{pour tout} } \alpha \text{ \textit{de} } 2^{\text{de}} \text{ \textit{espèce différent de} } 0;$$

$$\prod_{\xi\leq\alpha} \aleph_\xi = \aleph_\alpha^{\bar{\alpha}} \text{ \textit{pour tout} } \alpha \text{ \textit{différent de} } 0.$$

Notations.

Les lettres grècques: α, β, μ, ξ... désignent les nombres ordinaux. α étant un nombre de 1re espèce, $\alpha-1$ est le nombre qui le précède immédiatement. α étant un nombre transfini de 2de espèce et (σ_ξ) une suite croissante du type α, le

[1]) Pour les notions et les théorèmes utilisés dans cette Note on pourra consulter les ouvrages suivants:

F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

A. Schoenflies, *Entwickelung der Mengenlehre...*, Leipzig und Berlin 1913 (surtout: I Abs., Kap. IV, Kap. VIII).

W. Sierpiński, *Zarys teorji mnogości* (*Éléments de la Théorie des Ensembles*), I, Warszawa 1923 (*en polonais*).

plus petit nombre ordinal qui suit tous les termes de cette suite est dit limite de la suite (σ_ξ); je le désigne par le symbole: $\lim\limits_{\xi<\alpha}\sigma_\xi$.

ω_α désigne le nombre initial tel que l'ensemble de tous les nombres initiaux qui le précèdent forme une suite croissante du type α; en particulier: $\omega_0=\omega$, $\omega_1=\Omega$.

α et β étant des nombres de 2de espèce, on dit que β est confinal avec α, s'il existe une suite (σ_ξ) telle que $\beta=\lim\limits_{\xi<\alpha}\sigma_\xi$. Soit ω_γ le plus petit nombre initial avec lequel β est confinal; je pose alors: $\gamma=cf(\beta)$ [1].

A étant un ensemble, $\overline{\overline{A}}$ est le nombre cardinal qui lui correspond (la puissance de A). $W(\alpha)$ désigne l'ensemble de tous les nombres ordinaux qui précèdent α. Je pose: $\overline{\alpha}=\overline{\overline{W(\alpha)}}$, $\aleph_\alpha=\overline{\overline{W(\omega_\alpha)}}$.

Le sens d'autres symboles, tels que: $\alpha+\beta$, $\alpha\,.\,\beta$, $\sum\limits_{\xi<\alpha}\aleph_\xi$ etc., n'exige pas d'explication.

§ 1. La généralisation des théorèmes de MM. Hausdorff et Bernstein.

M. Hausdorff a établi [2] le théorème suivant, appelé parfois „formule de recurrence":

Quels que soient α et β, on a

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\,.\,\aleph_{\alpha+1}.$$

A l'aide de ce théorème nous allons démontrer le suivant

Théorème 1. *Si* $\overline{\gamma}\leqslant\aleph_\beta$, *on a*

$$\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\,.\,\aleph_{\alpha+\gamma}^{\overline{\gamma}}.$$

Démonstration. Nous allons appliquer par rapport à γ le principe d'induction transfinie.

a) Le théorème est vrai pour $\gamma=0$. Car on peut poser par définition:

$$\aleph_\alpha^{\overline{0}}=\overline{1}\ ^{3)}.$$

b) Si un nombre γ vérifie le théorème, le nombre $\gamma+1$ le vérifie aussi. Pour le prouver, supposons que

[1] Il résulte des recherches de M. Hausdorff (op. cit., p. 129—132) que le nombre $\omega_{cf(\beta)}$ existe pour tout nombre transfini β de 2de espèce et qu'il est le plus petit parmi tous les nombres ordinaux avec lesquels β est confinal.

[2] F. Hausdorff, *Der Potenzbegriff in der Mengenlehre*, Jahresberichte d. D. M.—V. 13, 1904, p. 569.

[3] Si l'on veut éviter le cas d'exposant égal à 0, il faut dans l'hypothèse du théorème faire la restriction: $\gamma\geqslant 1$ et vérifier le théorème directement pour $\gamma=1$.

$$(1) \qquad \overline{\gamma+1} \leqslant \aleph_\beta;$$

il en résulte aussitôt que le nombre γ satisfait aussi à l'hypothèse du théorème:

$$\overline{\gamma} \leqslant \aleph_\beta,$$

d'où

$$(2) \qquad \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}^{\overline{\gamma}}.$$

Selon la formule de M. Hausdorff, on obtient:

$$(3) \qquad \aleph_{\alpha+\gamma+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma+1}$$

et

$$(4) \qquad \aleph_{\alpha+\gamma+1}^{\overline{\gamma+1}} = \aleph_{\alpha+\gamma}^{\overline{\gamma+1}} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma+1} = \aleph_{\alpha+\gamma}^{\overline{\gamma}} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma+1}$$

(la dernière formule est évidente pour γ fini, car dans ce cas

$$\aleph_{\alpha+\gamma+1}^{\overline{\gamma+1}} = \aleph_{\alpha+\gamma+1}, \quad \aleph_{\alpha+\gamma}^{\overline{\gamma+1}} = \aleph_{\alpha+\gamma}^{\overline{\gamma}} = \aleph_{\alpha+\gamma}).$$

Les formules (2) et (3) donnent:

$$(5) \qquad \aleph_{\alpha+\gamma+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}^{\overline{\gamma}} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma+1},$$

et de (4) et (5) on conclut finalement que

$$(6) \qquad \aleph_{\alpha+\gamma+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma+1}^{\overline{\gamma+1}}.$$

Or, comme (6) résulte de (1), le nombre $\gamma+1$ satisfait aux conditions du théorème.

c) γ étant un nombre transfini de 2[de] espèce, si le théorème est vrai pour tout nombre ξ qui précède γ, il reste encore vrai pour le nombre γ. Supposons, en effet, que

$$(7) \qquad \overline{\gamma} \leqslant \aleph_\beta,$$

d'où

$$(8) \qquad \overline{\xi} \leqslant \aleph_\beta \text{ pour } \xi < \gamma.$$

Les nombres ξ, $\xi < \gamma$, remplissant selon (8) l'hypothèse du théorème, on a donc:

$$(9) \qquad \aleph_{\alpha+\xi}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\xi}^{\overline{\xi}} \text{ pour } \xi < \gamma.$$

Suivant le théorème de König, généralisé par Jourdain [1]), on

[1]) Cf. A. Schoenflies, op. cit., p. 66.

obtient:

$$(10)\qquad \aleph_{\alpha+\gamma} = \sum_{\xi<\gamma} \aleph_{\alpha+\xi} < \prod_{\xi<\gamma} \aleph_{\alpha+\xi},$$

donc

$$(11)\qquad \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \leqslant \Big(\prod_{\xi<\gamma} \aleph_{\alpha+\xi}\Big)^{\aleph_\beta} = \prod_{\xi<\gamma} \aleph_{\alpha+\xi}^{\aleph_\beta}.$$

Les formules (9) et (11) impliquent que

$$(12)\qquad \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \leqslant \prod_{\xi<\gamma} (\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\xi}^{\bar{\xi}}) \leqslant (\aleph_\alpha^{\aleph_\beta})^{\bar{\gamma}} \cdot \prod_{\xi<\gamma} \aleph_{\alpha+\gamma}^{\bar{\xi}} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta \cdot \bar{\gamma}} \cdot (\aleph_{\alpha+\gamma}^{\bar{\gamma}})^{\bar{\gamma}};$$

il en résulte immédiatement, en vertu de (7), que

$$(13)\qquad \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}^{\bar{\gamma}}.$$

On a d'autre part évidemment:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \quad \text{et} \quad \aleph_{\alpha+\gamma}^{\bar{\gamma}} \leqslant \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta},$$

d'où

$$(14)\qquad \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}^{\bar{\gamma}} \leqslant \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta}.$$

Les inégalités (13) et (14) donnent aussitôt la formule désirée (2).

Les lemmes a), b), et c) établis, le théorème 1 est démontré complètement.

Corollaire 2. *γ étant un nombre fini, on a*

$$\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}.$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer que l'hypothèse du théorème précédent est remplie et que

$$\aleph_{\alpha+\gamma}^{\bar{\gamma}} = \aleph_{\alpha+\gamma}.$$

On voit donc que la formule de recurrence de M. Hausdorff ne présente qu'un cas particulier du théorème 1. La même relation subsiste entre le théorème de M. Bernstein sur les alephs [1]) et le suivant

Théorème 3. *Si $\bar{\alpha} \leqslant \aleph_\beta$, on a*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\alpha^{\bar{\alpha}}.$$

[1]) F. Bernstein, *Untersuchungen aus der Mengenlehre*, Math. Ann. 61, 1905.

Démonstration. Remplaçons dans l'énoncé du théorème 1: α par γ et 0 par α. On obtient:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_0^{\aleph_\beta} . \aleph_\alpha^{\bar{\alpha}}. \tag{1}$$

Il résulte de la formule connue de M. Bernstein que

$$\aleph_0^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}. \tag{2}$$

Les égalités (1) et (2) donnent aussitôt:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} . \aleph_\alpha^{\bar{\alpha}} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Exemple. En appliquant successivement les théorèmes 1 et 3, on obtient:

$$\aleph_{\Omega+\omega}^{\aleph_1} = \aleph_\Omega^{\aleph_2} . \aleph_{\Omega+\omega}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_2} . \aleph_\Omega^{\aleph_1} . \aleph_{\Omega+\omega}^{\aleph_0}.$$

Corollaire 4 *(théorème de M. Bernstein). $\bar{\alpha}$ étant un nombre fini, on a*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} . \aleph_\alpha .$$

Le corollaire est évident pour $\alpha = 0$; pour $\alpha \neq 0$ on l'obtient directement du théorème 3, en observant que

$$\aleph_\alpha^{\bar{\alpha}} = \aleph_\alpha .$$

Corollaire 5. *α étant un nombre de 2^{me} classe ($\omega \leqq \alpha < \Omega$), on a*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} . \aleph_\alpha^{\aleph_0}.$$

En effet, comme $\bar{\alpha} = \aleph_0$, l'hypothèse du théorème 3 est remplie, et on obtient la formule cherchée. On prouve facilement que cette formule est valable aussi pour α fini, donc pour tout $\alpha < \Omega$.

Le théorème de M. Bernstein donne lieu au problème suivant:

Tout nombre cardinal transfini $\mathfrak{m}$ *remplit-il la condition suivante* (nous l'appellerons *„condition de M. Bernstein“*):

quel que soit le nombre cardinal transfini $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}^\mathfrak{n} = 2^\mathfrak{n} . \mathfrak{m}$?

Déjà König a résolu ce problème d'une façon négative [1]), en appliquant le théorème de M. Zermelo sur le bon ordre („Wohlordnungssatz“); je vais donner dans le § suivant un autre exemple d'un nombre qui ne satisfait pas à la condition de M. Bernstein, sans faire usage du théorème de M. Zermelo.

[1]) J. König, *Zum Kontinuumproblem*, Math. Ann. 60, 1905, p. 180.

§ 2. Les formules de recurrence.

La formule de recurrence de M. Hausdorff permet, dans le cas où α est de 1[re] espèce, d'exprimer la puissance $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ à l'aide de la puissance d'un aleph plus petit que $\aleph_\alpha$ (notamment de $\aleph_{\alpha-1}$) multipliée par $\aleph_\alpha$. Dans le théorème 7 je donne les formules analogues au cas où α est de 2[de] espèce, en faisant cependant introduire les notions de la somme et du produit d'une suite transfinie des nombres cardinaux.

Lemme 6. *α étant un nombre de 2[de] espèce, si $\alpha = \lim\limits_{\xi<\omega^\beta} \sigma_\xi$, on a*

$$\aleph_\alpha^{\overline{\overline{\omega^\beta}}} = \prod_{\xi<\omega^\beta} \aleph_{\sigma_\xi}.$$

Démonstration. Conformément à l'hypothèse du théorème et au théorème de König généralisé par Jourdain:

(1) $$\aleph_\alpha = \sum_{\xi<\omega^\beta} \aleph_{\sigma_\xi} < \prod_{\xi<\omega^\beta} \aleph_{\sigma_\xi},$$

d'où

(2) $$\aleph_\alpha^{\overline{\overline{\omega^\beta}}} \leqslant \prod_{\xi<\omega^\beta} \aleph_{\sigma_\xi}^{\overline{\overline{\omega^\beta}}}.$$

Posons:

(3) $$\tau_{\xi,\eta} = \sigma_\xi \text{ pour } \xi < \omega^\beta \text{ et } \eta < \omega^\beta;$$

on a évidemment

(4) $$\prod_{\xi<\omega^\beta} \aleph_{\sigma_\xi}^{\overline{\overline{\omega^\beta}}} = \prod_{\xi<\omega^\beta}\Bigl(\prod_{\eta<\omega^\beta} \aleph_{\tau_{\xi,\eta}}\Bigr).$$

Désignons, avec M. Hessenberg [1]), par $\xi \# \eta$ *la somme formelle* des nombres ξ et η; c'est-à-dire, si

$$\xi = \sum_{k\leq n} \omega^{\delta_k} . m_k, \quad \eta = \sum_{k\leq n} \omega^{\delta_k} . l_k$$

sont les dévéloppements normaux des nombres ξ et η en polynomes par rapport à ω (les nombres m_k et l_k n'étant pas nécessairement différents de 0), posons:

$$\xi \# \eta = \sum_{k\leq n} \omega^{\delta_k} . (m_k + l_k).$$

[1]) G. Hessenberg, *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Göttingen 1906, p. 105. Cf. aussi E. Jacobsthal, *Zur Arithmetik der transfiniten Zahlen*, Math. Ann. 67, 1909, p. 138.

Nous allons utiliser les propriétés suivantes de la somme formelle:

(5) pour qu'on ait $\xi \# \eta < \omega^\beta$, il faut et il suffit que $\xi < \omega^\beta$ et $\eta < \omega^\beta$;

(6) quel que soit ζ, l'ensemble des paires (ξ, η), satisfaisant à la condition: $\xi \# \eta = \zeta$, est fini;

(7) $\zeta \# 0 = \zeta$ et, si $\xi \# \eta = \zeta$, on a $\xi \leqslant \zeta$

Or, comme la multiplication des nombres cardinaux satisfait aux lois de la permutation et de l'association, on obtient selon (4) et (5):

$$\prod_{\xi<\omega^\beta} \aleph_{\sigma_\xi}^{\overline{\omega^\beta}} = \prod_{\zeta<\omega^\beta}\Big(\prod_{\xi \# \eta = \zeta} \aleph_{\tau_{\xi,\eta}}\Big). \tag{8}$$

En vertu de (6), tout produit $\prod\limits_{\xi \# \eta = \zeta} \aleph_{\tau_{\xi,\eta}}$ $(\zeta < \omega^\beta)$ se compose d'un nombre fini de facteurs. Comme, suivant l'hypothèse du lemme et des notations adoptées dans cette Note, la suite (σ_ξ) est croissante, on conclut de (3) et (7) que $\aleph_{\tau_{\zeta,0}} = \aleph_{\sigma_\zeta}$ est le plus grand de ces facteurs. On a donc:

$$\prod_{\xi \# \eta = \zeta} \aleph_{\tau_{\xi,\eta}} = \aleph_{\sigma_\zeta} \quad \text{pour } \zeta < \omega^\beta. \tag{9}$$

Les formules (2), (8) et (9) donnent aussitôt:

$$\aleph_\alpha^{\overline{\omega^\beta}} \leqslant \prod_{\zeta<\omega^\beta} \aleph_{\sigma_\zeta},$$

et comme l'inégalité au sens inverse est évidente, on obtient enfin:

$$\aleph_\alpha^{\overline{\omega^\beta}} = \prod_{\xi<\omega^\beta} \aleph_{\sigma_\xi} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 7. *α étant un nombre transfini de 2^{de} espèce,*

1) *si* $\beta < cf(\alpha)$, *on a* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum\limits_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}$;

2) *si* $\beta \geqslant cf(\alpha)$ *et* $\alpha = \lim\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \sigma_\xi$, *on a* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \prod\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \aleph_{\sigma_\xi}^{\aleph_\beta}$.

D é m o n s t r a t i o n. a) $\beta < cf(\alpha)$ [1].

[1]) Notre raisonnement dans cette partie de la démonstration est tout-à-fait analogue à celui que M. Hausdorff a appliqué pour établir sa formule de recurrence.

Soit E_ξ l'ensemble de toutes les suites du type ω_β dont les termes appartiennent à l'ensemble $W(\omega_\xi)$. Conformément à la définition des puissances des nombres cardinaux, on obtient la formule:

(1) $$\overline{\overline{E}}_\xi = \aleph_\xi^{\aleph_\beta}, \text{ quel que soit } \xi.$$

Il est aisé d'établir l'inclusion suivante:

(2) $$E_\alpha \subset \sum_{\xi<\alpha} E_\xi.$$

Soit, en effet, (σ_η) une suite appartenante à l'ensemble E_α. La condition: $\beta < cf(\alpha) = cf(\omega_\alpha)$ et la formule connue: $\omega_\alpha = \lim\limits_{\xi<\alpha} \omega_\xi$ impliquent presque immédiatement l'existence d'un nombre ω_ξ satisfaisant aux conditions:

$$\omega_\xi < \omega_\alpha \text{ et } \sigma_\eta < \omega_\xi \text{ pour } \eta < \omega_\beta.$$

(Pour s'en convaincre, on aura à distinguer deux cas, suivant que parmi les termes de la suite (σ_η) il existe ou non le nombre le plus grand).

Il en résulte que la suite (σ_η) appartient à l'ensemble $E_\xi (\xi < \alpha)$, donc aussi à la somme $\sum\limits_{\xi<\alpha} E_\xi$.

De (1) et (2) on conclut aussitôt:

(3) $$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant \sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}.$$

L'inégalité au sens inverse est presque évidente:

(4) $$\sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \overline{\alpha} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.$$

En vertu de (3) et (5) on obtient enfin la formule cherchée:

(5) $$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta}.$$

b) $\beta \geqslant cf(\alpha)$ et $\alpha = \lim\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \sigma_\xi$.

Le nombre $\omega_{cf(\alpha)}$, étant un nombre initial, est une puissance de ω; on peut donc appliquer le lemme 6:

(6)
$$\aleph_\alpha^{\aleph_{cf(\alpha)}} = \aleph_\alpha^{\overline{\overline{\omega_{cf(\alpha)}}}} = \prod_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \aleph_{\sigma_\xi},$$

d'où

(7)
$$(\aleph_\alpha^{\aleph_{cf(\alpha)}})^{\aleph_\beta} = \prod_{\xi\ \omega_{cf(\alpha)}} \aleph_{\sigma_\xi}^{\aleph_\beta}.$$

On déduit de (7) aussitôt, en tenant compte de la condition: $\beta \geqslant cf(\alpha)$, que

(8)
$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \prod_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \aleph_{\sigma_\xi}^{\aleph_\beta}.$$

Suivant (5) et (8) le théorème 7 est complètement démontré.

E x e m p l e s. Conformément au lemme 6 et au théorème établi tout-à-l'heure, on a:

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} = \prod_{\xi<\omega} \aleph_\xi, \quad \aleph_\omega^{\aleph_\beta} = \prod_{\xi<\omega} \aleph_\xi^{\aleph_\beta};$$

$$\aleph_\Omega^{\aleph_0} = \sum_{\xi<\Omega} \aleph_\xi^{\aleph_0}, \quad \aleph_\Omega^{\aleph_1} = \prod_{\xi<\Omega} \aleph_\xi, \quad \aleph_\Omega^{\aleph_\beta} = \prod_{\xi<\Omega} \aleph_\xi^{\aleph_\beta} \quad \text{pour } \beta \geqslant 1.$$

Le théorème 7 trouve son application dans l'étude des puissances des nombres cardinaux, qui appartiennent à un vaste système $\{\aleph_{\pi(\alpha)}\}$ défini par l'induction transfinie de la façon suivante:

$\aleph_{\pi(0)} = \aleph_0$, $\aleph_{\pi(\alpha+1)} = 2^{\aleph_{\pi(\alpha)}}$, $\aleph_{\pi(\alpha)} = \sum_{\xi<\alpha} \aleph_{\pi(\xi)}$ *pour tout* α *transfini de 2de espèce*.

Les puissances de ces nombres jouissent de quelques propriétés remarquables. On peut notamment établir sans peine les théorèmes suivants (la démonstration repose partiellement sur le théorème 7):

Théorème I. *α étant* 0 *ou un nombre de 1re espèce,*

1) *si* $\beta \leqslant \pi(\alpha-1)$, *on a* $\aleph_{\pi(\alpha)}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\pi(\alpha)}$;

2) *si* $\beta \geqslant \pi(\alpha-1)$, *on a* $\aleph_{\pi(\alpha)}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

Théorème II. *α étant un nombre transfini de 2de espèce,*

1) *si* $\beta < cf(\alpha)$, *on a* $\aleph_{\pi(\alpha)}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\pi(\alpha)}$;

2) *si* $cf(\alpha) \leqslant \beta \leqslant \pi(\alpha)$, *on a* $\aleph_{\pi(\alpha)}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_{\pi(\alpha)}} = \aleph_\beta^{\aleph_{\pi(\alpha)}}$ [1];

3) *si* $\beta \geqslant \pi(\alpha)$, *on a* $\aleph_{\pi(\alpha)}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

[1]) Cette partie du théorème II présente la généralisation d'un théorème de M. B a n a c h, qui a prouvé l'éxistence des nombres cardinaux transfinis $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ remplissant les conditions: $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$ (cf. W. S i e r p i ń s k i, op. cit., p. 181). En particulier, la formule $\aleph_{\pi(\omega)}^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_{\pi(\omega)}}$ résulte directement du théorème de M. B a n a c h.

Donc, en particulier:

$$\aleph_{\pi(\omega)}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_{\pi(\alpha)}} = \aleph_0^{\aleph_{\pi(\omega)}},\ \aleph_{\pi(\Omega)}^{\aleph_0} = \aleph_{\pi(\Omega)},\ \aleph_{\pi(\Omega)}^{\aleph_1} = 2^{\aleph_{\pi(\Omega)}} = \aleph_1^{\aleph_{\pi(\Omega)}}.$$

Le nombre $\aleph_{\pi(\omega)} = \aleph_0 + 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} + \ldots$ présente un simple exemple d'un nombre cardinal transfini ne satisfaisant pas à la condition de M. Bernstein; on a en effet:

$$\aleph_{\pi(\omega)}^{\aleph_0} > 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_{\pi(\omega)}.$$

Le théorème II permet de résoudre le problème suivant:

$\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$ *étant des nombres cardinaux, les conditions*: $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ *et* $\mathfrak{p} > \mathfrak{q}$ *impliquent-elles toujours que* $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} > \mathfrak{p}^{\mathfrak{q}}$?

La solution est **négative**. Posons, en effet: $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_{\pi(\omega)}}$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{p} = \aleph_{\pi(\omega)}$, $\mathfrak{q} = \aleph_0$; on obtient:

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{n} \text{ et } \mathfrak{p} > \mathfrak{q}, \text{ malgré qu'en même temps } \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{q}}.$$

Je veux attirer enfin l'attention au fait suivant. L'hypothèse suivante [1]):

quel que soit α, $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$,

l'hypothèse qu'on peut appeller: *„hypothèse généralisée du continu“* et dont nous ne savons jusqu'à present, si elle est vraie ou fausse ou bien indépendente des axiomes de la Théorie des Ensembles, permet de démontrer par une induction facile la proposition:

quel que soit α, $\aleph_{\pi(\alpha)} = \aleph_\alpha$.

Dans cette hypothèse les théorèmes I et II concernent donc les puissances des alephs quelconques et ils donnent la solution des plusieurs problèmes que nous ne savons resoudre jusqu'aujourd'hui. Ils permettent p. ex. d'établir les simples conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on aït:

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m},\ \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = 2^{\mathfrak{m}},\ \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = 2^{\mathfrak{n}},\ \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$$

ou bien pour que le nombre $\mathfrak{m}$ remplisse la condition de M. Bernstein [2]). En particulier, on peut en conclure qu'aucun nombre $\aleph_\alpha$ avec l'indice transfini de 2^{de} espèce ne satisfait à cette condition, pourvu que α ne soit un nombre initial régulier égal à son indice ($\alpha = \omega_\alpha = cf(\alpha)$) [2]).

[1]) M. Hausdorff envisage dans son ouvrage: *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen* (Math. Ann. 65, 1908, p. 494) l'hypothèse suivante appelée *„hypothèse de Cantor sur les alephs“*: 1) α étant un nombre de 1^{re} espèce, on a $\aleph_\alpha = \sum\limits_{\xi<\omega_\alpha} \aleph_\alpha^{\overline{\xi}}$; 2) α étant un nombre transfini de 2^{de} espèce, on a $\aleph_\alpha = \sum\limits_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}} \aleph_\alpha^{\overline{\xi}}$. Or on peut démontrer que cette hypothèse équivaut à l'hypothèse du texte et que sa 2^{me} partie résulte de la 1^{re}.

[2]) L'existence de tels nombres ordinaux est fort douteuse. Cf. A. Schoenflies, op. cit., p. 241.

§ 3. Les produits infinis des alephs.

Les formules établies si-dessous sont analogues aux formules bien connues concernant les sommes des suites transfinies des alephs:

α étant un nombre transfini de 2^{de} espèce, on a

$$\sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi = \aleph_\alpha;$$

α étant un nombre ordinal quelconque, on a

$$\sum_{\xi\leq\alpha} \aleph_\xi = \aleph_\alpha.$$

Théoreme 8. *α étant un nombre transfini de 2^{de} espèce, on a*

$$\prod_{\xi<\alpha} \aleph_\xi = \aleph_\alpha^{\bar{\alpha}}.$$

Démonstration. Supposons que notre théorème est faux, et soit α le plus petit nombre transfini de 2^{de} espèce tel que l'on ait:

(1) $$\prod_{\xi<\alpha} \aleph_\xi \neq \aleph_\alpha^{\bar{\alpha}}.$$

Soit

(2) $\alpha = \sum_{k\leq m} \omega^{\delta_k}$, où m est un nombre fini différent de 0 et $\delta_k \geqslant \delta_{k+1} > 0$ pour $k \leqslant m$,

le dévéloppement du nombre α en polynome de ω.

Le lemme 6 du § 2 implique que

(3) $$m > 1,$$

puisque dans le cas contraire, en posant dans ce lemme $\sigma_\xi = \xi$ et $\beta = \delta_1$, on parviendrait à une formule qui contredit à (1).

Soit

(4) $$\beta = \sum_{k\leq m-1} \omega^{\delta_k};$$

on obtient facilement de (2), (3) et (4):

(5) $$\alpha = \beta + \omega^{\delta_m} = \lim_{\xi<\omega^{\delta_m}} (\beta+\xi),$$

(6) β est un nombre transfini de 2^{de} espèce,

(7) $$\omega^{\delta_m} \leqslant \beta < \alpha.$$

On conclut encore de (5) et (7) que

$$\overline{\beta} = \overline{\alpha}, \tag{8}$$

car les inégalités: $\overline{\beta+\gamma} > \overline{\beta}$ et $\overline{\beta+\gamma} > \overline{\gamma}$ ne peuvent subsister simultanément pour aucun couple de nombres transfinis β et γ.

Comme, conformément à notre hypothèse, α est le plus petit nombre transfini de 2[de] espèce vérifiant la formule (1), il résulte de (6), (7) et (8):

$$\prod_{\xi<\beta} \aleph_\xi = \aleph_\beta^{\overline{\beta}} = \aleph_\beta^{\overline{\alpha}}. \tag{9}$$

Le lemme 6, si l'on y pose $\sigma_\xi = \beta + \xi$, $\beta = \delta_m$, donne en raison de (5):

$$\prod_{\xi<\omega^{\delta_m}} \aleph_{\beta+\xi} = \aleph_\alpha^{\overline{\omega^{\delta_m}}}. \tag{10}$$

De (5), (9) et (10) on déduit immédiatement:

$$\prod_{\xi<\alpha} \aleph_\xi = \prod_{\xi<\beta} \aleph_\xi \cdot \prod_{\xi<\omega^{\delta_m}} \aleph_{\beta+\xi} = \aleph_\beta^{\overline{\alpha}} \cdot \aleph_\alpha^{\overline{\omega^{\delta_m}}}. \tag{11}$$

D'autre part, substituons dans l'énoncé du théorème 1: β au lieu de α, ω^{δ_m} au lieu de γ et $\overline{\alpha}$ au lieu de $\aleph_\beta$ (ce qui est permis, puisque α est un nombre transfini). On obtient selon (5):

$$\aleph_\alpha^{\overline{\alpha}} = \aleph_{\beta+\omega^{\delta_m}}^{\overline{\alpha}} = \aleph_\beta^{\overline{\alpha}} \cdot \aleph_\alpha^{\overline{\omega^{\delta_m}}}. \tag{12}$$

Les formules (11) et (12) impliquent aussitôt que

$$\prod_{\xi<\alpha} \aleph_\xi = \aleph_\alpha^{\overline{\alpha}},$$

ce qui contredit évidemment à (1). Notre supposition nous conduit donc à une contradiction, et il faut admettre que le théorème 8 est vrai.

Corollaire 9. *α étant un nombre ordinal positif, on a*

$$\prod_{\xi\leq\alpha} \aleph_\xi = \aleph_\alpha^{\overline{\alpha}}.$$

Démonstration. Pour appliquer le principe de l'induction transfinie, observons que le corollaire est évident pour $\alpha = 1$ et qu'il est vrai, lorsque α est un nombre arbitraire de 2[de] espèce (différent de 0). On a, en effet, dans ce dernier cas en vertu du théorème précédent:

$$\prod_{\xi \leq \alpha} \aleph_\xi = \prod_{\xi < \alpha} \aleph_\xi \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\bar{\bar{\alpha}}} \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha^{\bar{\bar{\alpha}}}.$$

Il reste à prouver que tout nombre $\alpha+1$ vérifie la formule du théorème, pourvu que α la vérifie aussi. Supposons donc que

$$\prod_{\xi \leq \alpha} \aleph_\xi = \aleph_\alpha^{\bar{\bar{\alpha}}}. \tag{1}$$

On en conclut aussitôt:

$$\prod_{\xi \leq \alpha+1} \aleph_\xi = \prod_{\xi \leq \alpha} \aleph_\xi \cdot \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^{\bar{\bar{\alpha}}} \cdot \aleph_{\alpha+1}. \tag{2}$$

La formule de recurrence de M. Hausdorff donne pour α transfini:

$$\aleph_{\alpha+1}^{\overline{\overline{\alpha+1}}} = \aleph_\alpha^{\overline{\overline{\alpha+1}}} \cdot \aleph_{\alpha+1}; \tag{3}$$

on peut s'en convaincre directement que (3) reste vrai, lorsque α est un nombre fini.

On obtient enfin sans peine, α étant fini ou non:

$$\aleph_\alpha^{\bar{\bar{\alpha}}} = \aleph_\alpha^{\overline{\overline{\alpha+1}}}. \tag{4}$$

Les formules (2)—(4) impliquent immédiatement que

$$\aleph_{\alpha+1}^{\overline{\overline{\alpha+1}}} = \prod_{\xi \leq \alpha+1} \aleph_\xi \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le corollaire 9 est donc complètement démontré.

Pour terminer je veux poser ici le problème suivant que je ne sais pas résoudre:

Si α et β sont des nombres de 2[de] espèce et si $\alpha = \lim_{\xi<\beta} \sigma_\xi$, est-il vrai que

$$\aleph_\alpha^{\bar{\bar{\beta}}} = \prod_{\xi<\beta} \aleph_{\sigma_\xi} ?$$

Le théorème analogue concernant la somme des alephs est bien connu. Le théorème 8 ne présente qu'un cas particulier du théorème énoncé dans le problème. Dans le lemme 7 j'ai établi ledit théorème pour tout nombre β qui est une puissance de ω. De plus,

M. Hausdorff m'a obligeamment communiqué la démonstration de ce théorème pour un cas plus général, notamment pour tout β satisfaisant à la condition: si $\beta = \gamma + \delta$ et $\delta \neq 0$, on a $\overline{\delta} = \overline{\beta}$.

Observons enfin que la solution positive du problème posé résulte du théorème suivant, qui me semble probable, bien que je ne sais le démontrer:

α étant un nombre transfini de 2^{de} espèce, si $cf(\alpha) \leqslant \beta$, on a

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_{cf(\alpha)}}.$$

Ce théorème pourrait remplacer le théorème 3 dans le cas où α est de 2^{de} espèce.

Voici l'exemple d'une formule, qui résulte des deux théorèmes proposés et que je ne sais établir sans leur aide:

$$\aleph_{\omega_{\Omega+\omega}}^{\aleph_1} = \prod_{\xi < \Omega+\omega} \aleph_{\omega_\xi} = 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega_{\Omega+\omega}}^{\aleph_0}.$$