Komplementäre Halbgruppen

Kongruenzen und Quotienten

von

Bruno Bosbach (Bensberg*)

1. Kongruenzrelationen in komplementären Halbgruppen. Im folgenden sollen die *Kongruenzrelationen* der rechtskomplementären und der komplementären Halbgruppen durch charakteristische Teilmengen gekennzeichnet werden. Hierzu definieren wir zunächst in rechtskomplementären Halbgruppen als *Halbideal* jede Teilmenge I, die der Bedingung genügt:

(i) $$a \in I \ni b \iff ab \in I$$

Genügt I zusätzlich der Bedingung

(ii) $$(a * a')(a' * a)(b * b')(b' * b) \in I \Rightarrow (a * b) * (a' * b') \in I\,,$$

so nennen wir I ein $*$-*Ideal*. Wir zeigen als erstes, daß eine Teilmenge aus S schon dann ein $*$-*Ideal* ist, wenn sie neben (ii) die Implikation $a \in I \ni b \Rightarrow ab \in I$ erfüllt. Es gilt nämlich unter diesen Voraussetzungen:

(1) $$\begin{aligned} a \in I &\Rightarrow (b * b)(b * b)(1 * a)(a * 1) \in I \\ &\Rightarrow (b * 1) * (b * a) \in I \\ &\Rightarrow 1 * (b * a) \in I \\ &\Rightarrow b * a \in I \\ \Rightarrow ab \in I &\Rightarrow (ab * 1)(1 * ab)(ab * a)(a * ab) \in I \\ &\Rightarrow (ab * ab) * (1 * a) \in I \\ &\Rightarrow 1 * (1 * a) \in I \\ &\Rightarrow 1 * a = a \in I \\ &\quad \wedge (a * 1)(1 * a)(1 * b)(b * 1) \in I \\ &\Rightarrow (a * 1) * (1 * b) \in I \\ &\Rightarrow 1 * (1 * b) \in I \\ &\Rightarrow 1 * b = b \in I\,. \end{aligned}$$

---

* Albertus-Magnus-Gymnasium. Diese Note schließt sich nahtlos den Untersuchungen in [2] an und kann als deren 6. und 7. Paragraph aufgefaßt werden. Eine Note über Axiome, Polynome und Restklassen wird folgen.

Es folgen nun zwei entscheidende Hilfssätze für die Charakterisierung der Kongruenzrelationen (rechts-)komplementärer Halbgruppen. Zunächst gilt:

(2) *Ist $\equiv$ eine Kongruenzrelation in S bezüglich $\cdot$ und $\ast$, so bildet die Klasse $[1]$ ein $\ast$-Ideal, und es gilt $a \equiv b \Longleftrightarrow (a \ast b)(b \ast a) \in [1]$.*

Wir haben nämlich:

$$\begin{aligned}
a \equiv 1 \equiv b &\Rightarrow ab \equiv 11 \equiv 1\,,\\
ab \equiv 1 &\Rightarrow a \equiv 1 \ast a\\
& \equiv ab \ast a\\
& \equiv b \ast (a \ast a)\\
& \equiv b \ast 1 \equiv 1\\
&\Rightarrow b \equiv 1b\\
& \equiv ab \equiv 1
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
(a \ast a')(a' \ast a)(b \ast b')(b' \ast b) \equiv 1 &\Rightarrow a \ast a' \equiv a' \ast a \equiv b \ast b' \equiv b' \ast b \equiv 1\\
&\Rightarrow a \equiv a(a \ast a') \equiv a'(a' \ast a) \equiv a'\\
&\wedge\ b \equiv b(b \ast b') \equiv b'(b' \ast b) \equiv b'\\
&\Rightarrow (a \ast b) \ast (a' \ast b') \equiv (a \ast b) \ast (a \ast b)\\
&\equiv 1 \ast 1 \equiv 1\,.
\end{aligned}$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}
a \equiv b &\Rightarrow (a \ast b)(b \ast a) \equiv 1\\
&\Rightarrow a \ast b \equiv 1 \equiv b \ast a\\
&\Rightarrow a \equiv a(a \ast b) \equiv b(b \ast a) \equiv b
\end{aligned}$$

(3) *Ist I ein $\ast$-Ideal, so liefert die Festsetzung $a \equiv b \Longleftrightarrow (a \ast b)(b \ast a) \in I$ eine Kongruenzrelation in S bezüglich $\cdot$ und $\ast$ mit $[1] = I$.*

Denn

$$\begin{aligned}
1 \in I &\Rightarrow a \ast a \in I\\
&\Rightarrow (a \ast a)(a \ast a) \in I\\
&\Rightarrow a \equiv a\\
a \equiv b &\Rightarrow a \ast b \in I \ni b \ast a\\
&\Rightarrow (b \ast a)(a \ast b) \in I\\
&\Rightarrow b \equiv a\\
a \equiv b \wedge b \equiv c &\Rightarrow (b \ast a)(a \ast b)(b \ast c)(c \ast b) \in I\\
&\Rightarrow (b \ast b) \ast (a \ast c) \in I\\
&\Rightarrow 1 \ast (a \ast c) \equiv a \ast c \in I\\
&\Rightarrow a \equiv b \wedge b \equiv c \Rightarrow a \equiv c
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
a \equiv a' \wedge b \equiv b' &\Rightarrow (a \ast a')(a' \ast a)(b \ast b')(b' \ast b) \in I\\
&\Rightarrow (a \ast b) \ast (a' \ast b') \in I\,,
\end{aligned}$$

also

$$a \ast b \equiv a' \ast b'$$

Schließlich ist hiernach gegeben:

$$\begin{aligned}
a \equiv a' &\Rightarrow ab \ast a'b \equiv b \ast (a \ast a'b)\\
&\equiv b \ast (a' \ast a'b)\\
&\equiv a'b \ast a'b \equiv 1 \in I
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
b \equiv b' &\Rightarrow ab \ast ab' \equiv b \ast (a \ast ab')\\
&\equiv b' \ast (a \ast ab')\\
&\equiv ab' \ast ab' \equiv 1 \in I\,,
\end{aligned}$$

womit alles gezeigt ist wegen

$$a \in I \Longleftrightarrow (1 \ast a)(a \ast 1) \in I \Longleftrightarrow a \equiv 1\,.$$

Im folgenden sei S komplementär. Ist dann $\equiv$ eine Kongruenzrelation bezüglich $\cdot$, $\ast$ und $:$, so ist die Klasse $[1]$ sowohl ein $\ast$- als auch ein $:$-Ideal. Darüberhinaus gilt $a \ast b \in [1] \Longleftrightarrow b : a \in [1]$ wegen:

(4)
$$\begin{aligned}
a \ast b \equiv 1 &\Rightarrow a(a \ast b) \equiv a\\
&\Rightarrow (b : a)a \equiv a\\
&\Rightarrow b : a \equiv 1\,.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß auch umgekehrt jede Teilmenge aus S mit

(i) $\quad ab \in I \Longleftrightarrow a \in I \ni b$

und

(iii) $\quad a \ast b \in I \Longleftrightarrow b : a \in I$

eine Kongruenzrelation von S bezüglich $\cdot$, $\ast$ und $:$ liefert bei der Festsetzung $a \equiv b \Longleftrightarrow (a \ast b)(b \ast a) \in I$. Hierzu genügt der Nachweis, daß jedes *Vollideal*, wie wir diese Teilmengen nennen wollen, sowohl ein $\ast$-als auch ein $:$-Ideal ist, was sich aus Dualitätsgründen schon aus den beiden folgenden Hilfssätzen ergibt:

(5)
$$\begin{aligned}
a \ast b \in I \ni b \ast c &\Rightarrow a \ast c \leqslant (a \ast b)[(a \ast b) \ast (a \ast c)]\\
&= (a \ast b)[a(a \ast b) \ast c]\\
&= (a \ast b)[b(b \ast a) \ast c]\\
&= (a \ast b)[(b \ast a) \ast (b \ast c)]\\
&\leqslant (a \ast b)(b \ast c) \in I
\end{aligned}$$

und

(6) $$(a\ast a')(a'\ast a)(b\ast b')(b'\ast b)\in I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a\ast b)\ast(a'\ast b)\in I \ni (a'\ast b)\ast(a'\ast b')\,.$$

Denn

$$\begin{aligned}(a\ast b)\ast(a'\ast b) &= a'(a\ast b)\ast b\\ &\wedge\; b : a'(a\ast b)\\ &= [b:(a\ast b)]:a'\\ &\leqslant a:a'\in I\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a'\ast b)\ast(a'\ast b') &= a'(a'\ast b)\ast b'\\ &\leqslant b\ast b'\in I\,.\end{aligned}$$

Es wird noch von Bedeutung sein, daß sich die Vollideale einer jeden komplementären Halbgruppe auch rein multiplikativ charakterisieren lassen mittels der Eigenschaften:

(i) $$ab\in I \iff a\in I\ni b$$

und

(iv) $$aI = Ia\,.$$

Denn gelten (i) und (iii), so folgt für $x\in I$ die Beziehung

$$ax = a(a\ast ax) = (ax:a)a \quad \text{mit} \quad ax:a\in I\,,$$

also $aI\subseteq Ia$ und analog ergibt sich $aI\supseteq Ia$. Sind umgekehrt (i) und (iv) erfüllt, so gilt

$$a\ast b\in I \Rightarrow a(a\ast b) = xa = (b:a)a \quad \text{mit} \quad x\in I\Rightarrow b:a\in I\,,$$

und analog erhalten wir $b:a\in I\Rightarrow a\ast b\in I$.

Neben den Kongruenzen werden bei weiteren Untersuchungen *Rechtskongruenzen* eine große Rolle spielen. Aus diesem Grunde beweisen wir:

(7) *Ist S eine rechtskomplementäre Halbgruppe mit $b\ast(a\ast b) = 1$, so lassen sich die Rechtskongruenzen von S bezüglich $\cdot$ und $\ast$ eineindeutig den Halbidealen I aus S zuordnen vermöge der Festsetzung $a\equiv b \iff (a\ast b)(b\ast a)\in I$, und es gilt auch hierbei $I = [1]$.*

Denn die Festsetzung von $\equiv$ liefert eine Äquivalenzrelation, wie man in Anlehnung an (5) leicht nachweist. Diese erfüllt weiter:

$$b\equiv b' \Rightarrow ab\equiv ab'$$

und

$$b\equiv b' \Rightarrow a\ast b\equiv a\ast b'$$

wegen

$$\begin{aligned}ab\ast ab' &= b\ast(a\ast ab')\\ &\leqslant b\ast b'\in I\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a\ast b)\ast(a\ast b') &= a(a\ast b)\ast b'\\ &= b(b\ast a)\ast b'\\ &= (b\ast a)\ast(b\ast b')\\ &\leqslant b\ast b'\in I\end{aligned}$$

Dabei gilt

$$a\in I \iff (1\ast a)(a\ast 1)\in I \iff a\equiv 1\,.$$

Ist umgekehrt $\equiv$ eine Rechtskongruenz, so folgt

$$a\equiv 1\equiv b \Rightarrow ab\equiv a1\equiv a\equiv 1$$

und

$$\begin{aligned}ab\equiv 1 &\Rightarrow a\equiv a(a\ast 1)\equiv a(a\ast ab)\equiv ab\equiv 1\\ &\wedge\; b\equiv b(b\ast a)\equiv a(a\ast b)\leqslant ab\equiv 1\,,\end{aligned}$$

so daß $[1]$ ein Halbideal ist, und es gilt die Implikation:

$$\begin{aligned}a\equiv b &\Rightarrow (a\ast b)(b\ast a)\equiv(a\ast b)(b\ast b)\equiv a\ast a\equiv 1\\ &\Rightarrow a\ast b\equiv 1\equiv b\ast a\\ &\Rightarrow a\equiv a(a\ast b)\equiv b(b\ast a)\equiv b\,.\end{aligned}$$

Bevor wir den Hauptsatz dieses Paragraphen aussprechen, erwähnen wir noch eine Charakterisierung der Kongruenzen und Rechtskongruenzen, die später von Bedeutung sein wird. Es gilt

(8) *Ist S eine komplementäre Halbgruppe und $\equiv$ von I erzeugt, so ist $a\equiv b$ gleichbedeutend mit $a|be_1\wedge b|ae_2$ für mindestens ein Paar e_1, e_2 aus I.*

Denn $a\equiv b \Rightarrow a|b(b\ast a)\wedge b|a(a\ast b)$ mit $a\ast b\in I\ni b\ast a$ und $a|be \Rightarrow be\ast a = e\ast(b\ast a) = 1 \Rightarrow b\ast a\leqslant e$.

Ferner sei noch darauf hingewiesen, daß jede von einem Halbideal erzeugte Rechtskongruenz auch treu ist bezüglich $\cup$, was a fortiori gilt, und gegebenenfalls bezüglich $\cap$, was aus

$$(a\cap b)\ast(a\cap b') = [a\ast(a\cap b')]\cup[b\ast(a\cap b')]$$

folgt. Hiernach formulieren wir

Satz 1. *In rechtskomplementären Halbgruppen lassen sich die Kongruenzen bezüglich $\cdot$ und $\ast$ eineindeutig den $\ast$-Idealen zuordnen, die jeweils der Klasse $[1]$ entsprechen.*

Analog lassen sich in komplementären Halbgruppen die Kongruenzen bezüglich $\cdot$, $\ast$ und $:$ eineindeutig den Vollidealen zuordnen.

Schließlich lassen sich in komplementären Halbgruppen die Rechtskongruenzen bezüglich $\cdot$ und $\ast$ eineindeutig den Halbidealen zuordnen.

Dabei ist das erzeugende Prinzip stets $a\equiv b \iff (a\ast b)(b\ast a)\in I$.

Für das folgende ist noch ein Ergebnis wichtig, das wir mit Hilfe der r-*Ideale* erzielen. r-Ideale sind definiert mittels $a \in \mathfrak{R} \Rightarrow aS \subseteq \mathfrak{R}$. Sie bilden in komplementären Halbgruppen ihrerseits eine Halbgruppe bezüglich der Komplexmultiplikation und erfüllen auch die übrigen Idealeigenschaften, doch ist das hier nicht wesentlich. Von Bedeutung ist dagegen die sogenannte *Rees-Kongruenz*. Ist $\mathfrak{R}$ ein r-Ideal, so wird sie geliefert durch $a \equiv b \Longleftrightarrow a = b \vee a \in \mathfrak{R} \ni b$. Das homomorphe Bild ist dabei nicht notwendig komplementär, doch gilt

Satz 2. *Ist S eine komplementäre Halbgruppe, I ein Halbideal und $\mathfrak{R} = S - I$, so liefert die Reeskongruenz nach $\mathfrak{R}$ einen Homomorphismus bezüglich der Multiplikation auf eine komplementäre Halbgruppe $\overline{S}$, und es gilt für die a und b außerhalb von $\mathfrak{R}$ die Gleichung $\bar{a} \,\overline{\ast}\, \bar{b} = \overline{a \ast b}$ und ganz entsprechend $\bar{a} \,\bar{:}\, \bar{b} = \overline{a : b}$.*

Der erste Teil ist fast evident. Daß $\overline{S}$ komplementär ist, folgt für die Restmengen von Halbidealen daraus, daß Halbideale operativ völlig abgeschlossen sind, so daß bei der Bezeichnung von $\mathfrak{R}$ mit $\bar{0}$ in $\overline{S}$ die Gleichung $\bar{0} = \bar{a} \,\overline{\ast}\, \bar{0} = \bar{0} \,\bar{:}\, \bar{a} = \bar{0}$ gilt.

Ferner können wir zeigen

Satz 3. *Ist S eine $\cap$-abgeschlossene komplementäre Halbgruppe und u ein idempotentes Element aus S, so liefert die Festsetzung $a \equiv b \Longleftrightarrow u \cap a = u \cap b$ eine $\cup$- und $\cap$-treue Kongruenzrelation bezüglich der Multiplikation auf die komplementäre Halbgruppe der Teiler von u.*

Denn offenbar ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation. Ferner gilt nach [2|36, 46] $(u \cap a)(u \cap b) = u \cap ub \cap au \cap ab = u(1 \cap a \cap b) \cap ab = u \cap ab$ und nach [2|37] $(u \cap a) \cup (u \cap b) = u \cap (a \cup b)$ sowie a fortiori $(u \cap a) \cap (u \cap b) = u \cap (a \cap b)$.

Die bisherigen Resultate sind grundlegend für die Entwicklungen in [3]. Wir gehen jetzt noch ein auf Eigenschaften der Kongruenzen, die von tiefgreifender Bedeutung für die Struktur der komplementären Halbgruppe sind — man vergleiche etwa [1| Chapter 7], aber im folgenden keine Rolle spielen. Es gilt der

Zusatz. *Ist S eine komplementäre Halbgruppe, so bilden die Kongruenzen einen distributiven Verband und es sind je zwei Kongruenzrelationen miteinander vertauschbar.*

Der erste Teil folgt aus $c \leqslant ab \Rightarrow c = (c:b)[(c:b) \ast c]$ mit $c : b \leqslant a$ und $(c:b) \ast c \leqslant b$, da dies $I_1 \cup I_2 = I_1 I_2$ bedeutet und $d \in AB \cap AC \Rightarrow ab \geqslant d \leqslant ac$ $(a \in A,\ b \in B,\ c \in C) \Rightarrow d : (a \ast d) \in A \wedge a \ast d \in B \cap C$.

Gilt weiter

$$a \equiv x(I_1) \quad \text{und} \quad x \equiv b(I_2)\,,$$

so existieren wegen $I_1 I_2 = I_2 I_1$ Elemente e_1, f_1 in I_1 und e_2, f_2 in I_2 mit der Eigenschaft

$$ae_2e_1 \geqslant b \quad \text{und} \quad bf_1f_2 \geqslant a\,,$$

woraus mit

$$y = [ae_2 : (bf_1 \ast ae_2)] \cup [bf_1 : (ae_2 \ast bf_1)]$$

die zweite Behauptung aus Dualitätsgründen folgt wegen

$$y \leqslant ae_2 \Rightarrow a \ast y \leqslant e_2$$

und

$$y \ast a \leqslant [ae_2 : (bf_1 \ast ae_2)] \ast a \leqslant bf_1 \ast ae_2 \leqslant f_2 e_2\,.$$

2. Konstruktion der Quotientenhülle komplementärer Halbgruppen. Die komplementäre Halbgruppe erweckt den Eindruck einer gewissen Enge, insofern sie a fortiori eine *positive* Halbverbandshalbgruppe darstellt. Tatsächlich läßt sich jedoch zu jeder komplementären Halbgruppe mit nichttrivialem regulärem Anteil R eine echte *partialgeordnete Quotientenerweiterung* konstruieren, in der jedes $b \in R$ invertierbar ist. Um diese Note *selfcontained* zu halten, entwickeln wir die Konstruktion in (10) und (11) *ab ovo* unter Ausnutzung der besonderen Gegebenheiten, weisen jedoch darauf hin, daß die *Existenz* einer *Quotientenhülle* aus einem allgemeineren Satz von Murata folgt. Es gilt:

(9) *Ist T eine Oberhalbgruppe der komplementären Halbgruppe S mit der Eigenschaft, daß jedes $b \in R$ ein Inverses in T und jedes $a \in T$ eine Darstellung $a = ab^{-1}$ oder $a = b^{-1}a$ in T mit $a \in S$, $b \in R$ besitzt, so ist T isomorph zu jeder anderen Erweiterung von S, die ebenfalls diese Eigenschaften besitzt.*

Zunächst gilt

$$b^{-1}a = (a \ast b)^{-1}(b \ast a) = (b \ast a)(a \ast b)^{-1}\,,$$

so daß jedes a eine Darstellung ab^{-1} mit teilerfremden Elementen a, b besitzt. Weiter ist bei beliebiger Darstellung

$$ab^{-1}cd^{-1} = a(b \ast c)[d(c \ast b)]^{-1}$$

und schließlich gilt

$$\begin{aligned} ab^{-1} = cd^{-1} &\Longleftrightarrow (a:b)(b:a)^{-1} = (c:d)(d:c)^{-1} \\ &\Longleftrightarrow (a:b)(c:d) = (b:a)(c:d)\,, \end{aligned}$$

woraus sich nach [2|43] ergibt $d : c = b : a$ und $a : b = c : d$. Somit gilt in allen Strukturen der betrachteten Art die gleiche Verknüpfungsregel und dieselbe Gleichheitsbeziehung, was die Behauptung beweist.

Läßt sich zu einer gegebenen komplementären Halbgruppe S eine *Quotientenhülle* konstruieren, so ist diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und ihre Multiplikationsregel ist auf Grund von (9) gegeben. Von diesem Sachverhalt lassen wir uns im folgenden leiten. Bevor wir die Konstruktion jedoch durchführen, erwähnen wir, daß die Teilerrelation in diesem Paragraphen ausschließlich durch $\leqslant$ symbolisiert wird und daß

$|$ stets das Bindeglied eines Elementpaares darstellen soll. Nach dieser Festsetzung gilt:

(10) *Im Bereich P aller Paare $a|b$ mit $a \in S$, $b \in R$ liefert die Festsetzung $a|b \circ c|d = a(b \ast c)|d(c \ast b)$ eine assoziative Operation.*

Trivialerweise ist $a|b = a|1 \circ 1|b$. Weiter folgt hieraus schrittweise

$$\begin{aligned}
(a|b \circ x|1) \circ c|d &= a(b \ast x)|(x \ast b) \circ c|d \\
&= a(b \ast x)[(x \ast b) \ast c]|d[c \ast (x \ast b)] \\
&= a(b \ast xc)|d(xc \ast b) && [2|54] \\
&= a|b \circ xc|d \\
&= a|b \circ (x|1 \circ c|d) \\
(a|b \circ 1|y) \circ c|d &= a|yb \circ c|d \\
&= a(yb \ast c)|d(c \ast yb) \\
&= a[b \ast (y \ast c)]|d(c \ast y)[(y \ast c) \ast b] && [2|54] \\
&= a|b \circ (y \ast c)|d(c \ast y) \\
&= a|b \circ (1|y \circ c|d)
\end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich bei Kombination der beiden Sonderregeln:

$$\begin{aligned}
(a|b \circ x|y) \circ c|d &= [a|b \circ (x|1 \circ 1|y)] \circ c|d \\
&= [(a|b \circ x|1) \circ 1|y] \circ c|d \\
&= (a|b \circ x|1) \circ (1|y \circ c|d) \\
&= a|b \circ [x|1 \circ (1|y \circ c|d)] \\
&= a|b \circ [(x|1 \circ 1|y) \circ c|d] \\
&= a|b \circ (x|y \circ c|d)
\end{aligned}$$

(11) *In P liefert die Festsetzung $a|b \equiv c|d \Longleftrightarrow a:b = c:d \wedge b:a = d:c$ eine Kongruenzrelation bezüglich der Operation $\circ$.*

Die Relation $\equiv$ liefert a fortiori eine Klassenzerlegung von P. Weiter gilt $x \in R \Longleftrightarrow ax|bx \equiv a|b$ wegen $ax:bx = (ax:x):b = a:b$. Daraus folgt aber:

$$\begin{aligned}
ax|bx \circ c|d &\equiv ax(bx \ast c)|d(c \ast bx) \\
&\equiv ax[x \ast (b \ast c)]|d(c \ast b)[(b \ast c) \ast x] && [2|54] \\
&\equiv a(b \ast c)[(b \ast c) \ast x]|d(c \ast b)[(b \ast c) \ast x] \\
&\equiv a(b \ast c)|d(c \ast b) \\
&\equiv a|b \circ c|d \\
&\equiv a(b \ast c)|d(c \ast b) \\
&\equiv a(b \ast c)[(c \ast b) \ast y]|d(c \ast b)[(c \ast b) \ast y] && (y \in R) \\
&\equiv a(b \ast c)[(c \ast b) \ast y]|dy[y \ast (c \ast b)] \\
&\equiv a(b \ast cy)|dy(cy \ast b) \\
&\equiv a|b \circ cy|dy\,,
\end{aligned}$$

was

$$\begin{aligned}
a|b \equiv a'|b' \wedge c|d \equiv c'|d' \\
\Rightarrow a|b \circ c|d &\equiv (a:b)|(b:a) \circ (c:d)|(d:c) \\
&\equiv (a':b')|(b':a') \circ (c':d')|(d':c') \\
&\equiv a'|b' \circ c'|d'
\end{aligned}$$

zur Folge hat.

Es erzeugt also $\equiv$ ein homomorphes Bild zu P bezüglich $\circ$, und dieses homomorphe Bild soll im folgenden mit Q bezeichnet werden. Die Elemente von Q sind demnach Klassen von P bezüglich $\equiv$, die wir im allgemeinen mit griechischen Buchstaben benennen. Offenbar bildet dabei die Menge aller Klassen, die von Paaren der Form $a|1$ repräsentiert werden, eine zu S isomorphe Unterhalbgruppe von Q wegen

$$a|1 \circ b|1 = ab|1 \quad \text{und} \quad a|1 \equiv b|1 \Longleftrightarrow a = a:1 = b:1 = b\,.$$

Ebenso bildet die Menge aller Klassen, die von Paaren der Form $1|b$ erzeugt werden, eine zu R antiisomorphe Unterhalbgruppe von Q wegen

$$1|b \circ 1|d = 1|db \quad \text{und} \quad 1|b \equiv 1|d \Longleftrightarrow b = b:1 = d:1 = d\,.$$

Ferner gilt

$$1|b \circ b|1 \equiv 1|1 \equiv b|b \equiv b|1 \circ 1|b \quad \text{und} \quad 1|1 \circ a|b \equiv a|b \equiv a|b \circ 1|1\,.$$

Aus diesem Grund können wir die abkürzende Bezeichnung a für die von $a|1$ erzeugte Klasse und b^{-1} für die von $1|b$ erzeugte Klasse einführen, so daß wir für die Klasse von $a|b$ auch ab^{-1}, für $ab^{-1} \circ cd^{-1}$ auch $ab^{-1}cd^{-1}$ und $=$ statt $\equiv$ setzen können, ohne daß dies zu Komplikationen führt.

(12) *In Q liefert die Festsetzung $\alpha \leqslant \beta \Longleftrightarrow \alpha x = \beta$ eine $\cup$-abgeschlossene monotone Partialordnung.*

Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
ab^{-1}x &= a(b \ast x)(x \ast b)^{-1} \\
&= a(b \ast x)[(x \ast b) \ast b][(x \ast b) \ast b]^{-1}(x \ast b)^{-1} \\
&= a(b \ast xb)b^{-1} \\
&= [a(b \ast xb):a]ab^{-1}
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
yab^{-1} &= a(a \ast ya)b^{-1} \\
&= azb^{-1} && \text{mit } z = a \ast ya \\
&= a(b \ast bz)b^{-1} \\
&= a[b \ast (bz:b)b]b^{-1} \\
&= a[b \ast (bz:b)][((bz:b) \ast b) \ast b]b^{-1} \\
&= a[b \ast (bz:b)][(bz:b) \ast b]^{-1} \\
&= ab^{-1}(bz:b)\,,
\end{aligned}$$

so daß die Existenz eines x mit $\alpha x = \beta$ äquivalent ist mit der Existenz eines y mit $y\alpha = \beta$. Hieraus folgt unmittelbar, daß $\leqslant$ reflexiv, transitiv und beidseitig *monoton* ist, d.h. $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \alpha\gamma \leqslant \beta\gamma \wedge \gamma\alpha \leqslant \gamma\beta$. Gilt weiter $xy\alpha = \alpha$, so folgt für $ab^{-1} \in \alpha$ die Implikation $yx\alpha = \alpha \Rightarrow x\alpha = \alpha \Rightarrow x\alpha = \alpha$, was die Antisymmetrie sicher stellt. Zu zeigen bleibt somit nur noch, daß Q $\cup$-abgeschlossen ist. Hierzu seien ab^{-1} und cd^{-1} zwei Elemente mit $a \cap b = 1 = c \cap d$ und $ab^{-1} \leqslant cd^{-1}$. Dann folgt $ad \leqslant bc$ und damit $a \leqslant c$ und $d \leqslant b \Rightarrow b^{-1} \leqslant d^{-1}$. Haben wir umgekehrt $a \leqslant c$ und $b^{-1} \leqslant d^{-1}$, so gilt a fortiori $ab^{-1} \leqslant cd^{-1}$. Das bedeutet insgesamt, daß $(a \cup c)(b \cap d)^{-1} = ab^{-1} \cup cd^{-1}$ ist, da mit $a \cap b = 1 = c \cap d$ auch $(a \cup c) \cap (b \cap d) = 1$ gilt. Speziell bleibt demnach jedes $a \cup b$ aus S erhalten.

Nach (12) ist Q ein Halbverband. Der nächste Hilfssatz stellt eine Beziehung zwischen der Multiplikation und der Vereinigung in Q her:

(13) *Es ist in Q das Gesetz erfüllt:* $\alpha(\beta \cup \gamma)\delta = \alpha\beta\delta \cup \alpha\gamma\delta$.

Zur Herleitung zeigen wir schrittweise:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \gamma \geqslant \alpha x^{-1} \cup \beta x^{-1} \\
& && \Longleftrightarrow \gamma x \geqslant \alpha \cup \beta \\
& && \Longleftrightarrow \gamma \geqslant (\alpha \cup \beta)x^{-1} \\
&\text{(ii)} && \gamma \geqslant x^{-1}\alpha \cup x^{-1}\beta \\
& && \Longleftrightarrow \gamma \geqslant x^{-1}(\alpha \cup \beta) \qquad \text{siehe (i)} \\
&\text{(iii)} && yab^{-1} \cup ycb^{-1} = (ya \cup yc)b^{-1} \\
& && = y(a \cup c)b^{-1} \\
& && = y(ab^{-1} \cup cb^{-1}) \\
&\text{(iv)} && ab^{-1}y \cup cb^{-1}y = a(b \ast y)(y \ast b)^{-1} \cup c(b \ast y)(y \ast b)^{-1} \\
& && = [a(b \ast y) \cup c(b \ast y)](y \ast b)^{-1} \\
& && = (a \cup c)(b \ast y)(y \ast b)^{-1} \\
& && = (a \cup c)b^{-1}y \\
& && = (ab^{-1} \cup cb^{-1})y \\
&\text{(v)} && ab^{-1} = a(b \ast d)(b \ast d)^{-1}b^{-1} \qquad \text{für } d \in R \\
& && = a(b \ast d)(b \cup d)^{-1}
\end{aligned}$$

Beachten wir nun, daß auf Grund von (v) je zwei Elemente aus Q *gleichnamig* gemacht werden können, so ist nach den übrigen Teilgesetzen alles gezeigt.

Für $\cap$-abgeschlossene S gilt über (13) hinaus

(14) *Mit S ist auch Q $\cap$-abgeschlossen und es ist in diesem Falle Q eine volldistributive Verbandshalbgruppe.*

Die $\cap$-Abgeschlossenheit folgt analog der $\cup$-Abgeschlossenheit und es gilt für $a \cap b = 1 = c \cap d$ die Gleichung $ab^{-1} \cap cd^{-1} = (a \cap c)(b \cup d)^{-1}$. Hieraus ergibt sich weiter unter Berücksichtigung von $a \cap b = 1 = c \cap d$ $\Rightarrow (a \cap c) \cap (b \cup d) = 1$ für $a \cap b = 1 = c \cap d = 1 = g \cap k$:

$$\begin{aligned}
ab^{-1} \cap (cd^{-1} \cup gk^{-1}) &= ab^{-1} \cap (c \cap g)(d \cap k)^{-1} \\
&= [a \cap (c \cup g)][b \cup (d \cap k)]^{-1} \\
&= [(a \cap c) \cup (a \cap g)][(b \cup d) \cap (b \cup k)]^{-1} \\
&= (a \cap c)(b \cup d)^{-1} \cup (a \cap g)(b \cup k)^{-1} \\
&= (ab^{-1} \cap cd^{-1}) \cup (ab^{-1} \cap gk^{-1}) .
\end{aligned}$$

Wir sahen, daß die Quotientenhülle bis auf Isomorphie von S bestimmt ist. Der nächste Hilfssatz wird zeigen, daß sich diese Eigenschaft auf die Kongruenzen überträgt. Genauer gilt:

(15) *Ist $\equiv$ eine Kongruenzrelation in S bezüglich $\cdot$, $\ast$ und $:$, so läßt sich $\equiv$ ausdehnen auf Q bezüglich $\cdot$, $\cup$ und — gegebenenfalls — bezüglich $\cap$. Entsprechendes gilt für die Rechtskongruenzen. Ist S/I sogar linear geordnet, so gibt es keine anderen Klassen bezüglich $\equiv$ als die von den $a \in S$ und den b^{-1} mit $b \in R$ erzeugten.*

Es sei I das $\equiv$ erzeugende Halbideal. Setzt man dann $\alpha \equiv \beta$ genau dann, wenn es ein Paar x, y aus S und ein Paar e_1, e_2 aus I gibt mit $\alpha x = \beta e_1$ und $\beta y = \alpha e_2$, so ist diese Relation in Q transitiv und wegen $1 \in I$ eine Äquivalenzrelation, denn

$$\alpha x = \beta e_1 \wedge \beta y = \gamma e_2 \Rightarrow \alpha x(e_1 \ast y) = \gamma e_2(y \ast e_1) .$$

Ferner ist die erklärte Relation a fortiori rechtskongruent und, falls I ein Vollideal ist, sogar kongruent bezüglich $\cdot$, da dann für $b \in R$ wegen $be_1 = e_2 b \Longleftrightarrow e_1 b^{-1} = b^{-1} e_2$ folgt $\alpha I = I\alpha$ für alle $\alpha \in Q$.

Es ist weiter $\equiv$ auch eine Kongruenzrelation bezüglich $\cup$, denn wir dürfen analog (13|v) annehmen, daß $\alpha = x^{-1}a$, $\beta = x^{-1}b$ und $\beta' = x^{-1}b'$ ist, also $\beta \equiv \beta' \Rightarrow b \equiv b'$, was nach sich zieht:

$$\alpha \cup \beta = x^{-1}a \cup x^{-1}b = x^{-1}(a \cup b) = x^{-1}(a \cup b') = x^{-1}a \cup x^{-1}b' = \alpha \cup \beta' .$$

Analog beweisen wir die Behauptung für $\cap$, falls S $\cap$-abgeschlossen ist.

Ist schließlich S/I linear geordnet, so folgt aus $b^{-1}a = (a \ast b)^{-1}(b \ast a) = (b \ast a)(a \ast b)^{-1}$, daß jedes α in einem $[a]$ oder einem $[b^{-1}]$ liegt. Damit ist dann aber auch gezeigt, daß Q/I linear geordnet ist bezüglich $[\alpha] \leqslant [\beta] \Longleftrightarrow [\beta] = [\alpha x]$.

Nachzuweisen bleibt demnach, daß es keine weitere Ausdehnung von $\equiv$ auf Q gibt, was auch für den Fall, daß $\equiv$ nur eine Rechtskongruenz bezüglich $\cdot$ und $*$ in S ist, durch die Äquivalenz bewiesen wird:

$$a^{-1}b = c^{-1}d \iff (a:c)^{-1}b = (c:a)^{-1}d \iff (c:a)b = (a:c)d\,.$$

(15) liefert für Verbandsgruppen noch das wichtige Ergebnis:

(16) *Es gibt keine anderen Rechtskongruenzen in Verbandsgruppen bezüglich $\cdot$ und $\cup$ als die Ausdehnungen der Rechtskongruenzen ihres Kerns bezüglich $\cdot$ und $*$.*

Denn dies folgt aus (15) und $ax \geqslant b \iff x \geqslant a^{-1}b \iff x \geqslant 1 \cup a^{-1}b \iff a*b = 1 \cup a^{-1}b$, was fast unmittelbar die Rechtskongruenz bezüglich $*$ in S impliziert.

Durch die Quotientenhülle Q ist S eingebettet in eine sehr spezielle Halbverbandshalbgruppe. Diese ist jedoch weder notwendig kommutativ, noch notwendig $\cap$-abgeschlossen, noch besitzt sie notwendig zu jedem Paar α, β ein $\alpha*\beta$ mit $\alpha\gamma \geqslant \beta \iff \gamma \geqslant \alpha*\beta$. Umgekehrt ist der positive Kern der *DLR-Semigruppe* von Swamy komplementär und es bestimmt dieser Kern die Struktur der Halbgruppe vollständig, da jedes α von der Form ab^{-1} ist, wegen $\alpha = \alpha(\alpha\cap 1)^{-1}(\alpha \cap 1)$ und der Gleichung:

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha\cap 1)^{-1} \cap 1 &= \alpha(\alpha\cap 1)^{-1} \cap (\alpha\cap 1)(\alpha\cap 1)^{-1} = (\alpha\cap\alpha\cap 1)(\alpha\cap 1)^{-1}\\ &= (\alpha\cap 1)(\alpha\cap 1)^{-1} = 1\,.\end{aligned}$$

Wir klären abschließend die interessante Frage, wann Q eine *inverse Halbgruppe* darstellt. Interessant ist eine solche Untersuchung deshalb, weil sowohl Verbandsgruppen als auch Boolesche Ringe inverse Halbgruppen sind. Das Ergebnis rechtfertigt die besondere Herausstellung von Satz 14 in [2]. Es heißt:

(17) *Die Quotientenhülle Q einer komplementären Halbgruppe S ist genau dann invers, wenn S das Axiom IR erfüllt.*

Sei zunächst ab^{-1} idempotent und $a \cap b = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} ab^{-1} &= (ab^{-1})^2\\ &= a^2b^{-1}b^{-1} && [2|43]\\ \Rightarrow\quad a &= a^2b^{-1}\\ \Rightarrow\quad a^2 &= ab\\ \Rightarrow\quad a^2 &= a && [2|43]\\ \Rightarrow\quad ab^{-1} &= ab^{-1}b^{-1}\\ \Rightarrow\quad a &= ab^{-1}\\ \Rightarrow\quad ab^{-1} &\in S\end{aligned}$$

Ist weiter

$$a(x^{-1}y)a = a \qquad \text{mit} \quad x\cap y = 1$$

und

$$(x^{-1}y)a(x^{-1}y) = x^{-1}y\,,$$

so folgt

$$\begin{aligned} x^{-1}ya &= (x^{-1}ya)^2 \in S\\ \Rightarrow\quad ya &\geqslant x\\ \Rightarrow\quad x &\leqslant a \Rightarrow a' = ax^{-1} \in S && [2|43]\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} ya'y &= y\\ \Rightarrow\quad y &= y^2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} ax^{-1}ya &= a\\ \Rightarrow\quad a'ya &= a\\ \Rightarrow\quad yay &= a\\ \Rightarrow\quad y &= xx^{-1}y\\ &= x(x^{-1}yayx^{-1})\\ &= ax^{-1}\,,\end{aligned}$$

so daß wir $a = (ax^{-1})x$ mit idempotentem $ax^{-1} \in S$ und regulärem $x \in R$ erhalten. Gilt umgekehrt Axiom IR, so läßt sich a zerlegen in uv mit idempotentem u und regulärem v und es gilt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}(uv)(uv^{-1})(uv) &= uv\\ (uv^{-1})(uv)(uv^{-1}) &= uv^{-1}\end{aligned}$$

und die Idempotenten von Q liegen, wie gezeigt, in S, also nach [2|46] im Zentrum von S und damit auch im Zentrum von Q.

SATZ 4. *Jede komplementäre Halbgruppe besitzt eine eindeutig bestimmte Quotientenhülle Q, bestehend aus allen ab^{-1} mit $a \in S$, $b \in R$. Q ist eine Halbverbandshalbgruppe, in die S auch $\cup$-treu eingebettet ist und in der die Multiplikation beidseitig distributiv verknüpft ist mit $\cup$. Ist S $\cap$-abgeschlossen, so ist Q eine volldistributive Verbandshalbgruppe. Q ist genau dann eine inverse Halbgruppe, wenn S Axiom IR erfüllt.*

Literaturverzeichnis

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, AMS Coll. Publ. 1967.

[2] B. Bosbach, *Komplementäre Halbgruppen. Axiomatik und Arithmetik*, Fund. Math. 64 (1969), S. 257–287.

[3] — *Komplementäre Halbgruppen. Eine Darstellungstheorie*, Math. Ann. 179 (1968), S. 1–14.

[4] L. Fuchs, *Teilweise geordnete algebraische Strukturen*, Studia Mathematica, 1966.
[5] I. Molinaro, *Demigroupes residutifs*, I–II, J. Math. Pures Appl. 39 (1960), S. 319–356, 40 (1961), S. 43–110.
[6] R. Mc Fadden, *Congruence relations on residuated semigroups*, J. London Math. Soc. 37 (1962), S. 242–248.
[7] K. Murata, *On the quotient semigroup of noncommutative semigroup*, Osaka Math. J. 2 (1950), S. 1–5.
[8] K. L. N. Swamy, *Dually residuated lattice ordered semigroups*, Math. Ann. 159 (1965), S. 105–114, II Math. Ann. 160 (1965), S. 64–71, III Math. Ann. 167 (1966), S. 71–74.

Reçu par la Rédaction le 19. 3. 1968

On the strong local simple connectivity of the decomposition spaces of toroidal decompositions*

by

Steve Armentrout (Iowa City, Iowa)

1. Introduction. A topological space X is *strongly locally simply connected* if and only if each point of X has arbitrarily small simply connected open neighborhoods.

An upper semicontinuous decomposition G of E^3 is a *toroidal* decomposition of E^3 if and only if there is a sequence $M_0, M_1, M_2, \ldots$ of compact 3-manifolds-with-boundary in E^3 such that (1) for each i, $M_{i+1} \subset \operatorname{Int} M_i$ and each component of M_i is a solid torus (cube with one handle) and (2) g is a non-degenerate element of G if and only if g is a non-degenerate component of $\bigcap_{i=0}^{\infty} M_i$.

The main result of this paper is that the decomposition spaces of a certain class of pointlike toroidal decompositions of E^3 are not strongly locally simply connected. We shall now state in greater detail the main result of this paper.

A toroidal decomposition G of E^3 is *simple* if and only if, in addition to the conditions described previously, (1) M_0 is a solid torus T_0 and (2) if $i = 0, 1, 2, \ldots$ and T_a is any component of M_i, T_a is polyhedral and the components of M_{i+1} in T_a form a chain of solid tori circling T_a. We denote by m_a the number of solid tori in this chain, and by n_a the number of times the chain circles T_a.

Let G be a pointlike simple toroidal decomposition of E^3 such that for each index a, $m_a < 2n_a$. It follows from the results of [4] and essentially from [13] that in this case, the associated decomposition space is topologically distinct from E^3. In this paper, we shall establish the following stronger result:

For each such decomposition G of E^3, the associated decomposition space is not strongly locally simply connected.

In Section 3 of [7], Bing describes an interesting toroidal decomposition G of E^3 such that the associated decomposition space E^3/G is

* This research was supported in part by National Science Foundation Grant.