Эффективные R-множества и трансфинитные продолжения рекурсивных иерархий

В. И. Амстиславский [1] (Баку)

Адисон и Клини в [2] сообщали, что ими запланировано „... обсуждение взаимосвязи между продолженной $\mathfrak{H}$-иерархией [2] и эффективной C-иерархией (соответствующей иерархии C-множеств, введённых Лузиным), и эффективными R-множествами (соответствующими R-множествам, введённым Колмогоровым), и эффективными аналогами ещё более общих подклассов B_2 (см. [13])“. Однако публикаций, реализующих эту программу, с тех пор (1957 г.), насколько нам известно, не появлялось. В [3] мы выяснили, что эффективная C-иерархия в сущности эквивалентна отрезку $\mathfrak{H}$-иерархии, соответствующему конструктивным 1-му и 2-му классам порядковых чисел. В настоящей статье мы определим последовательность классов $\mathfrak{R}_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ эффективных R-множеств (аналогично финитным ступеням классической иерархии R-множеств [13]) и, обозначая через $\complement\mathfrak{R}_n$ класс дополнений множеств класса $\mathfrak{R}_n$, установим:

1. $\mathfrak{R}_n \cup \complement\mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{R}_{n+1}$ *и все* $\mathfrak{R}_n \subset \Sigma_2^1 \cap \Pi_2^1$ [3].

2. *Все множества, охватываемые $\mathfrak{H}$-иерархией Крейдера и Роджерса* [12], *продолженной вплоть до первого конструктивно недостижимого порядкового числа, или H_h-иерархией Эндертона* [5], *также выходящей далеко за пределы конструктивного 2-го класса порядковых чисел, принадлежат классу $\mathfrak{R}_2 \cap \complement\mathfrak{R}_2$.*

3. *В каждом из классов $\mathfrak{R}_{n+1} \cap \complement\mathfrak{R}_{n+1}$ имеется трансфинитная иерархия множеств, не принадлежащих $\mathfrak{R}_n \cup \complement\mathfrak{R}_n$.*

Ввиду этих результатов вопрос о соотношении продолженной $\mathfrak{H}$-иерархии с классами более широкими, чем класс эффективных R-множеств, повидимому, отпадает. Одновременно уточнена верхняя оценка класса всех $\mathfrak{H}$- или H_h-множеств (в [12] и [5] такой верхней оценкой служит класс

---

(1) Я хочу выразить благодарность за внимание к этой работе члену-корреспонденту АН СССР А. А. Ляпунову, привлекшему моё внимание к рассматриваемым здесь вопросам, и профессору Б. А. Трахтенброту. Работа была выполнена в Институте кибернетики АН Азерб. ССР.

(2) Определение продолженной по [12] $\mathfrak{H}$-иерархии дано далее в § 3.

(3) Через Σ_k^t и Π_k^t $(k = 0, 1, 2, \dots, t = 0, 1)$ обозначаются, согласно [1], классы арифметической (при $t = 0$) и аналитической (при $t = 1$) иерархий.

$\Sigma_2^1 \cap \Pi_2^1$). Возникающий при этом вопрос: все ли множества класса $\mathfrak{R}_2 \cap C\mathfrak{R}_2$ охватываются $\mathfrak{H}$- или H_h-иерархией? — остаётся открытым.

Настоящая статья представляет собой переработку рукописи, основные результаты которой опубликованы в [4].

Некоторые обозначения. $\mathfrak{S}X$ есть множество всех подмножеств произвольного множества X, N-множество всех натуральных чисел $0, 1, 2, \ldots$; a, b, c, k, l, m, n-переменные на N, α, β — на $\mathfrak{S}N$, A, B — на $\mathfrak{S}\mathfrak{S}N$, f — на множестве N^N всех функций, отображающих N в N. Если x — переменная с какой-либо областью значений X, то $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — также переменные на X. Сокращения „о. р. ф." и „ч. р. ф." читаются как „общерекурсивная функция" и „частично-рекурсивная функция" (с окончаниями, определяемыми контекстом). $\sigma(a, b)$ есть некоторая о. р. ф., 1-1-отображающая N^2 на N, c' и c'' — о. р. ф., реализующие обратное отображение. Для любой функции φ: $N^{k+1} \to N$ вместо $(\varphi(a_0, \ldots, a_k))'$ и $(\varphi(a_0, \ldots, a_k))''$ пишем просто $\varphi'(a_0, \ldots, a_k)$ и $\varphi''(a_0, \ldots, a_k)$. Предполагается знакомство читателя с относящимися к теории рекурсивных функций терминами и обозначениями, применяющимися в [7] и [8].

§ 1. R-ОПЕРАЦИИ

Т. к. имеющиеся в литературе результаты об R-операциях часто формулируются и доказываются неэффективно (с точки зрения теории алгоритмов), мы здесь дадим новое изложение тех свойств R-операций, которые будут необходимы в последующем. Результаты этого параграфа адаптированы из [6], [13]–[15], доказательства, в основном, наши.

1. Краткие сведения о δs-операциях (4). Пусть $\mathfrak{E}$-непустое множество, называемое *основным пространством*, $\mathfrak{J}$ — непустое множество, называемое *пространством индексов*, $\mathfrak{e}, i, \xi$ — переменные на $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{S}\mathfrak{J}$ соответственно; подмножества $\mathfrak{J}$ называются *цепями*, множества цепей — *базами*; пусть $M \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{J}$, и для каждого $i \in \mathfrak{J}$ E_i — произвольное подмножество $\mathfrak{E}$; *δs-операцией с базой M* называется функция Φ_M: $(\mathfrak{S}\mathfrak{E})^{\mathfrak{J}} \to \mathfrak{S}\mathfrak{E}$, которая каждой совокупности $\{E_i\}$, $i \in \mathfrak{J}$, ставит в соответствие множество

$$\Phi_{\substack{M\\i}}\{E_i\} = \{\mathfrak{e}\colon (\exists \xi \in M)(\forall i \in \xi)[\mathfrak{e} \in E_i]\}.$$

Для любого $M \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{J}$ база $\widetilde{M} = \{\xi\colon (\exists \eta \in M)[\eta \subseteq \xi]\}$ $(\xi, \eta \in \mathfrak{S}\mathfrak{J})$ называется *пополнением* M. Если $M = \widetilde{M}$, то база M называется *полной*. Для равенства операций Φ_M и Φ_Q $(Q, M \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{J})$ необходимо и достаточно, чтобы $\widetilde{M} = \widetilde{Q}$. Операция Φ_Q называется *дополнительной* к Φ_M, если для любой совокупности $\{E_i\}$ $\mathfrak{E} \setminus \Phi_{\substack{Q\\i}}\{E_i\} = \Phi_{\substack{M\\i}}\{\mathfrak{E} \setminus E_i\}$; Φ_M, в свою очередь, является дополнительной к Φ_Q. Для любого $M \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{J}$ базу $\{\xi\colon (\mathfrak{J}\setminus\xi) \notin \widetilde{M}\}$, являющуюся полной базой δs-операции, дополнительной к Φ_M, будем обозначать через M^*.

(4) Подробности читатель может найти в [16].

Пусть $\mathfrak{J}$ есть пространство индексов для Φ_Q, $\mathfrak{F}$ — пространство индексов для операций Φ_{H_i}, $i \in \mathfrak{J}$; *итерацией* операций Φ_Q и Φ_{H_i} называется такая операция Φ_Z, имеющая пространством индексов множество $\mathfrak{J} \times \mathfrak{F}$ (значит, $Z \subseteq \mathfrak{S}(\mathfrak{J} \times \mathfrak{F})$), что для любой совокупности $\{E_{i,j}\}$ $(i \in \mathfrak{J}, j \in \mathfrak{F}, E_{i,j} \subseteq \mathfrak{E})$ $\Phi_{\substack{Q\\i}}\{\Phi_{\substack{H_i\\j}}\{E_{i,j}\}\} = \Phi_{\substack{Z\\ \langle i,j\rangle}}\{E_{i,j}\}$. В качестве базы Z при этом можно взять множество всех цепей $\zeta \subseteq \mathfrak{J} \times \mathfrak{F}$, таких, что: а) $\{i\colon (\exists j)[\langle i, j\rangle \in \zeta]\} \in Q$, и б) если множество $\{j\colon \langle i, j\rangle \in \zeta\}$ — непусто, то оно принадлежит H_i.

Для любого $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{E}$ пусть $\Phi_M(\mathcal{E})$ есть класс всех множеств вида $\Phi_{\substack{M\\i}}\{E_i\}$, где $E_i \in \mathcal{E}$. Говорят, что операция Φ_M *мощнее*, чем операция Φ_H, если для любого класса $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{E}$ $\Phi_H(\mathcal{E}) \subseteq \Phi_M(\mathcal{E})$. Если Φ_M мощнее, чем Φ_H, и Φ_H мощнее, чем Φ_M, то говорят, что операции Φ_M и Φ_H *эквивалентны*. Отношению „Φ_M мощнее, чем Φ_H" соответствует определённое отношение между базами M и H. Пусть $M \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{J}$, $H \subseteq \mathfrak{S}\mathfrak{F}$ и φ-функция, отображающая $\mathfrak{J}$ в $\mathfrak{F}$; через $\varphi(M)$ обозначается $\{\varphi(\xi)\colon \xi \in M\}$, $\tilde{\varphi}(M)$-пополнение $\varphi(M)$; для того, чтобы для любой совокупности $\{E_j\}$, $j \in \mathfrak{F}$,

$$\Phi_{\substack{H\\j}}\{E_j\} = \Phi_{\substack{M\\i}}\{E_{\varphi(i)}\},$$

необходимо и достаточно, чтобы $\widetilde{H} = \tilde{\varphi}(M)$ (теорема Канторовича-Ливенсона [6]).

2. R-операции. Все рассматриваемые далее δs-операции имеют пространством индексов N или N^2. Соответственно этому, в дальнейшем *цепями* будем называть подмножества N или N^2, *базами* — подмножества $\mathfrak{S}N$ или $\mathfrak{S}N^2$.

Все кортежи (т. е. конечные упорядоченные множества) натуральных чисел 1-1-занумеруем всеми натуральными числами: пусть 0 — номер пустого кортежа, номер кортежа $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ обозначим через $\nu(a_0, \ldots, a_n)$. Будем предполагать, что введённая нумерация кортежей обладает следующим свойством: существуют о. р. ф. $\partial(a)$ и $\lambda ak[a]_k$, (5) такие, что $\partial(0) = 0$, $\partial(\nu(a_0, \ldots, a_n)) = n+1$, и $[\nu(a_0, \ldots, a_n)]_k = a_k$ для любого $k \leqslant n$. (Такую нумерацию можно, например, получить, полагая $\nu(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{k \leqslant n} 2^k \cdot 2^{a_0+\ldots+a_k}$).

Введём о. р. ф. $\theta(a, b)$, полагая $\theta(0, b) = \nu(b)$, $\theta(\nu(a_0, \ldots, a_n), b) = \nu(a_0, \ldots, a_n, b)$. Пусть $\theta_a(b) = \lambda b\, \theta(a, b)$, и для любого $\alpha \subseteq N$ $\theta_a^{-1}(\alpha) = \{b\colon \theta(a, b) \in \alpha\}$. Функцию $\boldsymbol{R}$: $\mathfrak{S}\mathfrak{S}N \to \mathfrak{S}\mathfrak{S}N$ определим следующим образом: для любой базы $A \subseteq \mathfrak{S}N$

$$\boldsymbol{R}(A) = \{\alpha\colon 0 \in \alpha \,\&\, (\forall a \in \alpha)[\theta_a^{-1}(\alpha) \in A]\}.$$

(5) О λ-обозначениях Чёрча см. [7].

$\widetilde{\boldsymbol{R}}(A)$ — пополнение $\boldsymbol{R}(A)$. Очевидно, $\widetilde{\boldsymbol{R}}(A) = \widetilde{\boldsymbol{R}}(\widetilde{A})$, откуда для любых $A, B \subseteq \mathfrak{I}N$ $\widetilde{A} = \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{R}}(A) = \widetilde{\boldsymbol{R}}(B)$.

Любая δs-операция, эквивалентная δs-операции с базой $\boldsymbol{R}(A) - \Phi_{\boldsymbol{R}(A)}$, — называется *$R$-операцией* над δs-операцией Φ_A (6).

Определим последовательность баз R_n:

$$R_0 = \{N\} \text{ (т. е. } R_0 \text{ состоит лишь из одной цепи — } N\text{)},$$

$$R_{n+1} = \boldsymbol{R}(R_n^*) .$$

δs-операция с базой $R_n - \Phi_{R_n}$ — называется *R^n-операцией*. Очевидно, R^0-операция — это операция пересечения: $\Phi_{R_0}\limits_m \{E_m\} = \bigcap\limits_{m \in N} E_m$; R^{n+1}-операция является R-операцией над δs-операцией, дополнительной к R^n-операции. Отметим, что $\widetilde{R}_1 = \{\alpha\colon\ 0 \in \alpha \,\&\, (\exists f)(\forall k)[\nu(f(0), \ldots, f(k)) \in \alpha]\}$, следовательно,

$$\Phi_{R_1}\limits_m\{E_m\} = E_0 \cap [\bigcup_f \bigcap_k E_{\nu(f(0),\ldots,f(k))}]; \tag{1}$$

значит, R^1-операция лишь незначительно отличается от A-операции.

Теорема 1.1. *Для любой базы $B \subseteq \mathfrak{I}N$ и любых $E_m \subseteq \mathfrak{E}$*

$$\Phi_B\limits_m\{E_m\} = \Phi_{\boldsymbol{R}(B)}\limits_m\{D_m\} ,$$

где $D_m = \mathfrak{E}$ при $m = 0$, $D_m = E_{m_0}$ при $m = \nu(m_0, \ldots, m_k)$.

Доказательство. Непосредственно из определения $\Phi_{\boldsymbol{R}(B)}$.

Теорема 1.2. *Существует такая о. р. ф. $g(k)$, что для любой базы $B \subseteq \mathfrak{I}N$ и любых $E_{m,n} \subseteq \mathfrak{E}$*

$$\Phi_{\boldsymbol{R}(B)}\limits_m \{\Phi_{\boldsymbol{R}(B)}\limits_n\{E_{m,n}\}\} = \Phi_{\boldsymbol{R}(B)}\limits_k\{E_{g'(k),g''(k)}\} . \tag{2}$$

Доказательство. Основано на теореме Канторовича–Ливенсона (п. 1). Заметим, что если $\tilde{B} = \mathfrak{I}N$ или $\emptyset$ (пусто), то и $\tilde{\boldsymbol{R}}(B) = \mathfrak{I}N$ или, соответственно, $\emptyset$, и тогда (2) выполняется при любой о. р. ф. $g(k)$. Поэтому далее предполагаем, что $\emptyset \neq \tilde{B} \neq \mathfrak{I}N$.

Назовём цепь $\alpha \in \mathfrak{I}N$ *регулярной*, если

$$0 \in \alpha \,\&\, (\forall a)[a \in \alpha \Longleftrightarrow (\exists b)[\theta(a, b) \in \alpha]] .$$

Для любого $A \subseteq \mathfrak{I}N$ множество всех регулярных цепей, принадлежащих $\boldsymbol{R}(A)$, обозначим через $\boldsymbol{R}_{\rm reg}(A)$; $\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\rm reg}(A)$ — пополнение $\boldsymbol{R}_{\rm reg}(A)$. Из определения $\boldsymbol{R}(B)$ следует, что для любой цепи $\alpha \in \boldsymbol{R}(B)$ существует регулярная цепь $\alpha_0 \in \boldsymbol{R}(B)$, такая, что $\alpha_0 \subseteq \alpha$. Отсюда следует, что

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{\rm reg}(\widetilde{B}) = \widetilde{\boldsymbol{R}}_{\rm reg}(B) = \widetilde{\boldsymbol{R}}(B) . \tag{3}$$

(6) Это определение соответствует [13] и несколько отличается от первоначального определения Колмогорова (приведённого в [6]).

Введём следующие обозначения: для любых $\gamma \subseteq N^2$ и $A \subseteq \mathfrak{I}N$

$$\operatorname{pr}\gamma = \{m\colon\ (\exists n)[\langle m, n\rangle \in \gamma]\} ,\qquad \sec_m\gamma = \{n\colon\ \langle m, n\rangle \in \gamma\} , \tag{4}$$
$$\operatorname{It}(A) = \{\gamma\colon\ \operatorname{pr}\gamma \in A \,\&\, (\forall m \in \operatorname{pr}\gamma)[\sec_m\gamma \in A]\} .$$

Из (3) следует, что δs-операции с базами $\boldsymbol{R}(B)$ и $\boldsymbol{R}_{\rm reg}(\widetilde{B})$ равны. Поэтому, согласно теореме Канторовича–Ливенсона и приведённому в п. 1 определению базы итерации δs-операций, для доказательства нашей теоремы достаточно найти такую о. р. ф. $g(k)$, что если $G(k) = \langle g'(k), g''(k)\rangle$ (G является функцией, отображающей N в N^2), то пополнения баз $G(\boldsymbol{R}_{\rm reg}(\widetilde{B}))$ и $\operatorname{It}(\boldsymbol{R}_{\rm reg}(\widetilde{B}))$ совпадают.

Положим $u(a, b) = 2^a(2b+1)-1$, и определим о. р. ф. $h_1(k)$ и $h_2(k)$ следующим образом:

1) если $\partial(k)$ — чётное, то $h_1(k) = h_2(k) = 0$;

2) если $\partial(k)$ — нечётное, и $u(a, b) = \partial(k)$, то

$$h_1(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 ,\\ \nu([k]_0, [k]_2, \ldots, [k]_{2(a-1)}) , & \text{если } a > 0 ,\end{cases}$$

$$h_2(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } b = 0 ,\\ \nu([k]_{u(a,0)}, [k]_{u(a,1}, \ldots, [k]_{u(a,b-1)}) , & \text{если } b > 0 .\end{cases}$$

Затем пусть $H(k) = \langle h_1(k), h_2(k)\rangle$. Тогда для любого $\alpha \in \mathfrak{I}N$ $\operatorname{pr}H(\alpha) = h_1(\alpha)$, и если цепь α — регулярна, то

$$\begin{aligned} &\theta_a^{-1}(\operatorname{pr}H(\alpha)) = \\ &\quad = \bigcup_m \{\theta_m^{-1}(\alpha)\colon\ \partial(m) = 2\partial(a) \,\&\, [a > 0 \Rightarrow (\forall k < \partial(a))[[m]_{2k} = [a]_k]]\}, \\ &\theta_b^{-1}(\sec_a H(\alpha)) = \\ &\quad = \bigcup_m \{\theta_m^{-1}(\alpha)\colon\ \partial(m) = u(\partial(a), \partial(b)) \,\&\, h_1(m) = a \,\&\, h_2(m) = b\} . \end{aligned} \tag{5}$$

С помощью (5) легко проверяется, что $H(\boldsymbol{R}_{\rm reg}(\widetilde{B})) = \operatorname{It}(\boldsymbol{R}_{\rm reg}(\widetilde{B}))$. Значит, о. р. ф. $\sigma(h_1(k), h_2(k))$ может быть взята в качестве искомой $g(k)$. Теорема доказана.

3. Трансфинитное представление баз $\widetilde{\boldsymbol{R}}(A)$ (7). Каждой функции $F\colon \mathfrak{I}N \to \mathfrak{I}N$ поставим в соответствие функцию $\mathrm{St}_F\colon \mathfrak{I}N \to \mathfrak{I}N$, определяемую следующим образом. Сначала для любой цепи α и любого порядкового числа τ, меньшего Ω (Ω-наименьшее несчётное порядковое число) определяем цепь α^τ: 1) $\alpha^0 = \alpha$; 2) $\alpha^{\tau+1} = F(\alpha^\tau)$; 3) если τ-предельное, то $\alpha^\tau = \bigcap \{\alpha^v\colon\ v < \tau\}$. Затем полагаем:

$$\mathrm{St}_F(\alpha) = \bigcap \{\alpha^\tau\colon\ \tau < \Omega\} .$$

Цепь α называем *F-неподвижной*, если $F(\alpha) = \alpha$.

(7) Соответствует трансфинитному представлению R-операций, введённому Ляпуновым [13].

Лемма 1.1. *Если функция F: $\mathfrak{I}N \to \mathfrak{I}N$ такова, что $\beta \subseteq a \Rightarrow F(\beta) \subseteq F(a)$ и $F(a) \subseteq a$, то для любой цепи a $\mathrm{St}_F(a)$ есть наибольшая (по включению) F-неподвижная цепь, содержащаяся в a.*

Доказательство. Т. к. трансфинитная последовательность $\{a^\tau\}$, $\tau < \Omega$ является убывающей, то она, начиная с некоторого значения τ, обозначаемого τ_{st}, стабилизуется. Следовательно, $\mathrm{St}_F(a) = a^{\tau_{\mathrm{st}}}$, и, значит, $\mathrm{St}_F(a)$ есть F-неподвижная цепь, включённая в a. Затем, если $\beta \subseteq a$ и $F(\beta) = \beta$, то по индукции $\beta \subseteq a^\tau$ для всех $\tau < \Omega$, — следовательно, $\beta \subseteq \mathrm{St}_F(a)$.

Лемма 1.2. *Пусть $A \subseteq \mathfrak{I}N$, и функция F: $\mathfrak{I}N \to \mathfrak{I}N$ определена следующим образом: $F(a) = \{a\colon\ a \in a \& \theta_a^{-1}(a) \in \widetilde{A}\}$. Тогда $\widetilde{\boldsymbol{R}}(A) = \{a\colon\ 0 \in \mathrm{St}_F(a)\}$.*

Доказательство. Т. к. F удовлетворяет условиям леммы 1.1, то $\mathrm{St}_F(a) = \bigcup\{\beta\colon\ \beta \subseteq a \& F(\beta) = \beta\}$, откуда $\{a\colon\ 0 \in \mathrm{St}_F(a)\} = \widetilde{B}$, где $B = \{\beta\colon\ 0 \in \beta \& F(\beta) = \beta\}$. Т. к. $F(\beta) \subseteq \beta$, то $F(\beta) = \beta \Leftrightarrow (\forall b \in \beta)[\theta_b^{-1}(\beta) \in \widetilde{A}]$. Значит, база B есть $\boldsymbol{R}(A)$, — и лемма доказана.

Напомним, что через $\widetilde{f}(A)(A \subseteq \mathfrak{I}N,\ f \in N^N)$ обозначается пополнение базы $\{f(a)\colon\ a \in A\}$.

Теорема 1.3. *Для любых $A_1, A_2 \subseteq \mathfrak{I}N$ и $f \in N^N$*

$$\widetilde{A}_1 = \widetilde{f}(A_2) \Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{R}}(A_1) = \widetilde{g}\big(\boldsymbol{R}(A_2)\big)\,,$$

где $g(0) = 0$, $g\big(\nu(a_0, \ldots, a_k)\big) = \nu\big(f(a_0), \ldots, f(a_k)\big)$.

Доказательство. Пусть $F_s(a) = \{a\colon\ a \in a \& \theta_a^{-1}(a) \in \widetilde{A}_s\}$ для $s = 1, 2$. Учитывая, что $a \in \widetilde{A}_1 \Leftrightarrow f^{-1}(a) \in \widetilde{A}_2$, и применяя тождество $g\big(\theta_a(b)\big) = \theta_{g(a)}\big(f(b)\big)$, нетрудно проверить, что

$$g^{-1}\big(F_1(a)\big) = F_2\big(g^{-1}(a)\big)\,,$$

откуда

$$g^{-1}\big(\mathrm{St}_{F_1}(a)\big) = \mathrm{St}_{F_2}\big(g^{-1}(a)\big)\,. \tag{6}$$

Теперь по лемме 1.2 и (6) получаем: $a \in \widetilde{\boldsymbol{R}}(A_1) \Leftrightarrow g(0) \in \mathrm{St}_{F_1}(a) \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{St}_{F_2}\big(g^{-1}(a)\big) \Leftrightarrow g^{-1}(a) \in \widetilde{\boldsymbol{R}}(A_2) \Leftrightarrow a \in \widetilde{g}\big(\boldsymbol{R}(A_2)\big)$, ч. т. д.

Учитывая, что $\widetilde{A}_1 = \widetilde{f}(A_2) \Rightarrow A_1^* = \big(f(A_2)\big)^*$, из теоремы 1.3 получаем

Следствие. *Существует о. р. ф. $\lambda n a\, g_n(a)$, такая, что для любого $n \geqslant 0$*

$$\widetilde{R}_n = \widetilde{g}_n(R_{n+1})\,.$$

4. Функция $\boldsymbol{R}$ и класс $\Sigma_2^1 \cap \Pi_2^1$. Для любого $A \subseteq \mathfrak{I}N$ множество представляющих функций всех подмножеств N, принадлежащих A, будем обозначать через $[A]$; $A \in \Sigma_k^1\ (\Pi_k^1)$ тогда и только тогда, когда $[A] \in \Sigma_k^1(\Pi_k^1)$.

Теорема 1.4. *Для любого $A \subseteq \mathfrak{I}N$:*

а) *если $\widetilde{A} \in \Sigma_2^1$, то $\widetilde{\boldsymbol{R}}(A) \in \Sigma_2^1$;*

б) *если $\widetilde{A} \in \Sigma_2^1 \cap \Pi_2^1$, то $\widetilde{\boldsymbol{R}}(A) \in \Sigma_2^1 \cap \Pi_2^1$.*

Доказательство. а) Допустим, $\widetilde{A} \in \Sigma_2^1$; тогда

$$f \in [A] \Leftrightarrow (\exists f_1)(\forall f_2)(\exists l)P(l, f, f_1, f_2)\,, \tag{7}$$

где P — некоторый рекурсивный предикат. Т. к. $\widetilde{\boldsymbol{R}}(\widetilde{A}) = \widetilde{\boldsymbol{R}}(A)$, то

$$a \in \widetilde{\boldsymbol{R}}(A) \Leftrightarrow (\exists \beta)\big[\beta \subseteq a \& 0 \in \beta \& (\forall b \in \beta)[\theta_b^{-1}(\beta) \in \widetilde{A}]\big]\,. \tag{8}$$

Учитывая, что если $f(a)$ — представляющая функция цепи a, то представляющей функцией цепи $\theta_b^{-1}(a)$является $\lambda a f\big(\theta_b(a)\big)$, из (7) и (8) получаем:

$$f \in [\widetilde{\boldsymbol{R}}(A)] \Leftrightarrow (\forall m)[f(m) \leqslant 1] \& (\exists f_0)\Big\{(\forall n)[f_0(n) = 0 \Rightarrow f(n) = 0] \& \\ \& f_0(0) = 0 \& (\forall b)\Big[f_0(b) = 0 \Rightarrow (\exists f_1)(\forall f_2)(\exists l)P\Big(l, \lambda a f_0\big(\theta(b, a)\big), f_1, f_2\Big)\Big]\Big\}\,. \tag{9}$$

Приводя предикат, стоящий в (9) справа, к предварённой нормальной форме (начиная с квантора $\exists f_0$), затем продвигая вперёд функциональные и стягивая однородные кванторы (8), получаем: $\widetilde{\boldsymbol{R}}(A) \in \Sigma_2^1$.

б) Ввиду а), нам здесь надо доказать, что $\widetilde{A} \in \Sigma_2^1 \cap \Pi_2^1 \Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{R}}(A) \in \Pi_2^1$. Для этого используем трансфинитное представление базы $\widetilde{\boldsymbol{R}}(A)$ и метод, применённый в [17] при доказательстве теоремы 1. По лемме 1.2

$$a \in \widetilde{\boldsymbol{R}}(A) \Leftrightarrow (\forall \tau < \Omega)[0 \in a^\tau]\,, \tag{10}$$

где

$$a^\tau = \begin{cases} a, & \text{при } \tau = 0\,, \\ F(a^v), & \text{при } \tau = v+1\,, \\ \bigcap\{a^v\colon\ v < \tau\}\,, & \text{при } \tau \text{ предельном}, \end{cases} \tag{11}$$

и

$$a \in F(a) \Leftrightarrow a \in a \& \theta_a^{-1}(a) \in \widetilde{A}\,. \tag{12}$$

Пусть $b <_r a$ есть обще-рекурсивное отношение, упорядочивающее множество всех натуральных чисел подобно множеству всех рациональных чисел. Тогда для любого порядкового числа $\tau < \Omega$ существует подмножество N, вполне упорядоченное отношением $<_r$ по типу τ и, согласно (11),

$$(\forall \tau < \Omega)[0 \in a^\tau] \Leftrightarrow \tag{13}$$

$\Leftrightarrow$ [Для любого $\gamma \subseteq N^2$, удовлетворяющего следующим условиям (множества $\mathrm{pr}\,\gamma$ и $\sec_a \gamma$ ниже определяются по (4)):

1) множество $\mathrm{pr}\,\gamma$ вполне упорядочено отношением $<_r$,

2) для любого $a \in \mathrm{pr}\,\gamma$

а) если a есть наименьший элемент в упорядоченном множестве $\langle \mathrm{pr}\,\gamma, <_r \rangle$, то $\sec_a \gamma = a$,

---

(8) По правилам из ([8], § 3) или ([12], стр. 346).

б) если $b \in \mathrm{pr}\,\gamma$ и a непосредственно следует за b в $\langle \mathrm{pr}\,\gamma, <_{\mathrm{r}} \rangle$, то $\mathrm{sec}_a \gamma = F(\mathrm{sec}_b \gamma)$,

в) если a есть предельный элемент в $\langle \mathrm{pr}\,\gamma, <_{\mathrm{r}} \rangle$, то $\mathrm{sec}_a \gamma = \bigcap \{\mathrm{sec}_b \gamma\colon\ b \in \mathrm{pr}\,\gamma \& b <_{\mathrm{r}} a\}$,

справедливо утверждение: $(\forall a \in \mathrm{pr}\,\gamma)[\langle a, 0\rangle \in \gamma]]$.

Введём следующие обозначения:

ψ — переменная для функций, отображающих N^2 в N,

$$b \leqslant_{\mathrm{r}} a \Longleftrightarrow b <_{\mathrm{r}} a \vee b = a,$$

$$Z(\psi, a) \Longleftrightarrow (\exists b)[\psi(a, b) = 0],$$

$$W_0(\psi, f) \Longleftrightarrow (\forall a) Z\big(\psi, f(a)\big) \Rightarrow (\exists b)(\forall c)[f(b) \leqslant_{\mathrm{r}} f(c)]\,,$$

$$W_1(\psi, a) \Longleftrightarrow Z(\psi, a) \& (\forall b)[Z(\psi, b) \Rightarrow a \leqslant_{\mathrm{r}} b],$$

$$W_2(\psi, a, b) \Longleftrightarrow Z(\psi, a) \& Z(\psi, b) \& b <_{\mathrm{r}} a \& (\forall c)[Z(\psi, c) \& b <_{\mathrm{r}} c \Rightarrow a <_{\mathrm{r}} c]\,,$$

$$W_3(\psi, a) \Longleftrightarrow Z(\psi, a) \& (\forall b)\big[Z(\psi, b) \& b <_{\mathrm{r}} a \Rightarrow (\exists c)[Z(\psi, c) \& b <_{\mathrm{r}} c <_{\mathrm{r}} a]\big]\,.$$

Теперь из (10) и (13) получаем:

$$(14)\quad f \in [\widetilde{\boldsymbol{R}}(A)] \Longleftrightarrow (\forall a)[f(a) \leqslant 1] \& (\forall \psi)\Big\{(\forall f_0) W_0(\psi, f_0) \& \\ \& (\forall a)\big[W_1(\psi, a) \Rightarrow (\forall b)[\psi(a, b) = 0 \Longleftrightarrow f(b) = 0]\big] \& \\ \& (\forall a, b)\Big[W_2(\psi, a, b) \Rightarrow \big[\{m\colon\ \psi(a, m) = 0\} = F\big(\{m\colon\ \psi(b, m) = \\ = 0\}\big)\big]\Big] \& (\forall a)\Big[W_3(\psi, a) \Rightarrow (\forall m)\big[\psi(a, m) = 0 \Longleftrightarrow (\forall c)[Z(\psi, c) \& \\ \& c <_{\mathrm{r}} a \Rightarrow \psi(c, m) = 0]\big]\Big] \Rightarrow (\forall a)[Z(\psi, a) \Rightarrow \psi(a, 0) = 0]\Big\}\,.$$

Обозначим предикат

$$(15)\qquad \lambda a b \psi\big[\{m\colon\ \psi(a, m) = 0\} = F\big(\{m\colon\ \psi(b, m) = 0\}\big)\big]$$

через $Q(a, b, \psi)$. Согласно (12),

$$(16)\quad F\big(\{m\colon\ \psi(b, m) = 0\}\big) = \big\{m\colon\ \psi(b, m) = 0 \& \lambda n \psi\big(b, \theta(m, n)\big) \in [\widetilde{A}]\big\}\,.$$

Если теперь $\widetilde{A} \in \Sigma^1_2 \cap \Pi^1_2$, то с помощью (16) имеем:

$$(17)\quad Q(a, b, \psi) \Longleftrightarrow (\forall m)\Big\{\Big[\psi(a, m) = 0 \Rightarrow \psi(b, m) = 0 \& \\ \& (\exists f_1)(\forall f_2)(\exists k) P_1\Big(k, f_1, f_2, \lambda n \psi\big(b, \theta(m, n)\big)\Big)\Big] \& \Big[\psi(b, m) = 0 \& \\ \& (\forall f_1)(\exists f_2)(\forall k) P_2\Big(k, f_1, f_2, \lambda n \psi\big(b, \theta(m, n)\big)\Big) \Rightarrow \psi(a, m) = 0\Big]\Big\} \\ \Longleftrightarrow (\exists f_1)(\forall f_2)(\exists k) P_3(a, b, k, f_1, f_2, \psi)\,,$$

где P_1, P_2 и затем P_3 — рекурсивны. Полученное в (17) выражение для $Q(a, b, \psi)$ подставим вместо (15) в (14) и вынесем [8] имеющиеся в этом выражении функциональные кванторы $\exists\forall$ (которые за фигурные скобки выйдут в виде $\forall\exists$), после чего вынесем функциональный квантор $\forall$ имеющийся в выражении $(\forall f_0) W_0(\psi, f_0)$ (который также выйдет как квантор $\exists$). Стягивая однородные кванторы и учитывая, что предикаты Z, $W_0 - W_3$ функциональных кванторов не содержат, приведём (14) к виду

$$f \in [\widetilde{\boldsymbol{R}}(A)] \Longleftrightarrow (\forall f_1)(\exists f_2) \boldsymbol{S}(f, f_1, f_2)$$

с некоторым арифметическим S. Значит, $\widetilde{\boldsymbol{R}}(A) \in \Pi^1_2$, ч. т. д.

Учитывая, что $\widetilde{A} \in \Sigma^1_k(\Pi^1_k) \Longleftrightarrow A^* \in \Pi^1_k(\Sigma^1_k)$ для любого $A \subseteq \mathfrak{I}N$, из теоремы 1.4 получаем

Следствие [9]. *Дла любого $n \geqslant 0$ базы $\widetilde{R}_n$ и R^*_n принадлежат классу $\Sigma^1_2 \cap \Pi^1_2$.*

§ 2. КЛАССЫ $\mathfrak{R}_n$

1. Определение и некоторые леммы. Декартово произведение $N^k \times (N^N)^l$ будем обозначать через $\mathfrak{N}^{k,l}$, кортеж $\langle a_1, \ldots, a_k, f_1, \ldots, f_l\rangle$ будем записывать короче как $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle$. Для каждой из рассматриваемых в § 2 δs-операций основным пространством $\mathfrak{E}$ будет служить какое-либо из $\mathfrak{N}^{k,l}$ при $k + l > 0$.

Класс всех множеств E таких, что

$$E = \underset{m}{\Phi_{R_n}}\{E_m\}\,,$$

где все $E_m \subseteq \mathfrak{N}^{k,l}$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $k + l > 0$ и $\lambda m \mathfrak{a}\mathfrak{f}[\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in E_m]$ — какой-либо рекурсивный предикат, назовём классом $\mathfrak{R}_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Очевидно, класс $\mathfrak{R}_0$ совпадает с классом Π^0_1, и, ввиду (1), класс $\mathfrak{R}_1$ совпадает с Σ^1_1.

Класс дополнений всех множеств класса $\mathfrak{R}_n$ обозначим через $\mathrm{C}\mathfrak{R}_n$, т. е. для любого $E \subseteq \mathfrak{N}^{k,l}$

$$E \in \mathrm{C}\mathfrak{R}_n \Longleftrightarrow \mathfrak{N}^{k,l} \setminus E \in \mathfrak{R}_n\,.$$

С помощью δs-операции $\Phi_{R^*_n}$, дополнительной к Φ_{R_n}, класс $\mathrm{C}\mathfrak{R}_n$ может быть определён как класс всех множеств E таких, что

$$E = \underset{m}{\Phi_{R^*_n}}\{E_m\}\,,$$

где все $E_m \subseteq \mathfrak{N}^{k,l}$, $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$, $k + l > 0$ и $\lambda m \mathfrak{a}\mathfrak{f}[\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in E_m]$ — какой-либо рекурсивный предикат.

Предикат $P(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$, множество истинности которого — $\{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle\colon\ P(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})\}$, — принадлежит классу $\mathfrak{R}_n(\mathrm{C}\mathfrak{R}_n)$, будем называть $\mathfrak{R}_n(\mathrm{C}\mathfrak{R}_n)$-предикатом. Таким образом, $P(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ является $\mathfrak{R}_n(\mathrm{C}\mathfrak{R}_n)$-предикатом, если, и только если,

[9] Ср. [13], следствие 2 теоремы 12.

существует рекурсивный предикат $Q(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ такой, что

$$P(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \Longleftrightarrow (\exists a \in R_n)(\forall m \in a) Q(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})$$

(или

$$P(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \Longleftrightarrow (\forall a \in R_n)(\exists m \in a) Q(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}),$$

соответственно).

Из этих определений легко следует, что для любого $n \geqslant 0$:

(R1) классы $\mathfrak{R}_n$ и $C\mathfrak{R}_n$ инвариантны относительно перестановок координатных осей;

(R2) если множество $E \in \mathfrak{R}_n$ (или $C\mathfrak{R}_n$), то множества $N \times E$ и $E \times N^N$ также принадлежат $\mathfrak{R}_n$ ($C\mathfrak{R}_n$, соответственно);

(R3) если $P(b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ есть $\mathfrak{R}_n$ (или $C\mathfrak{R}_n$)-предикат, то $\lambda \mathfrak{a} \mathfrak{f} P(b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ также есть $\mathfrak{R}_n/C\mathfrak{R}_n/$-предикат;

(R4) если $P(b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ есть $\mathfrak{R}_n$ ($C\mathfrak{R}_n$)-предикат, то для любой о. р. ф. $g(b_0, \ldots, b_m)$ предикат $P(g(b_0, \ldots, b_m), \mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ также является $\mathfrak{R}_n$ ($C\mathfrak{R}_n$)-предикатом.

Лемма 2.1. *Пусть* $E = \underset{b}{\Phi_{R_n}}\{E_b\}$ *и* $\{\langle b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle : \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in E_b\} \in \mathfrak{R}_m$ ($E_b, E \subseteq \mathfrak{N}^{k,l}$). *Тогда*

а) $E \in \mathfrak{R}_n$ *при* $m \leqslant n$,

б) $E \in \mathfrak{R}_m$ *при* $m > n$.

Доказательство. Т. к. $\{\langle b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle : \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in E_b\} \in \mathfrak{R}_m$, то

$$E = \underset{b}{\Phi_{R_n}}\{\underset{c}{\Phi_{R_m}}\{D_{b,c}\}\}, \tag{18}$$

где $\lambda b c \mathfrak{a} \mathfrak{f}[\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in D_{b,c}]$ — некоторый рекурсивный предикат. Рассмотрим следующие случаи.

а) $m \leqslant n$. По следствию теоремы 1.3 и теореме Канторовича–Ливенсона (§ 1, п. 1) найдём такую о. р. ф. $u(c)$, что

$$\underset{c}{\Phi_{R_m}}\{D_{b,c}\} = \underset{c}{\Phi_{R_n}}\{D_{b,u(c)}\}.$$

Затем, отправляясь от (18), по теореме 1.2 найдём о. р. ф. $g(b)$, такую, что

$$E = \underset{b}{\Phi_{R_n}}\{\underset{c}{\Phi_{R_n}}\{D_{b,u(c)}\}\} = \underset{b}{\Phi_{R_n}}\{D_{g'(b), u(g''(b))}\}.$$

Т. к. $\lambda b \mathfrak{a} \mathfrak{f}[\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in D_{g'(b), u(g''(b))}]$-рекурсивный предикат, то $E \in \mathfrak{R}_n$.

б) $m > n$. Аналогично случаю а), по следствию теоремы 1.3, теореме Канторовича–Ливенсона и по теореме 1.2

$$E = \underset{b}{\Phi_{R_m}}\{\underset{c}{\Phi_{R_m}}\{D_{v(b),c}\}\} = \underset{b}{\Phi_{R_m}}\{D_{v(g'(b)), g''(b)}\},$$

где v и g — некоторые о. р. ф. Следовательнэ, $E \in \mathfrak{R}_m$.

Лемма 2.2 *Пусть* $E = \underset{b}{\Phi_{R_n}}\{E_b\}$ *и* $\{\langle b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle : \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in E_b\} \in C\mathfrak{R}_m$ ($E_b, E \subseteq \mathfrak{N}^{k,l}$). *Тогда*

а) $E \in \mathfrak{R}_n$ *при* $m < n$,

б) $E \in C\mathfrak{R}_m$ *при* $m > n$,

в) $E \in \mathfrak{R}_{n+1} \cap C\mathfrak{R}_{n+1}$ *при* $m = n$.

Доказательство. Т. к. $\{\langle b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle : \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in E_b\} \in C\mathfrak{R}_m$, то

$$E = \underset{b}{\Phi_{R_n}}\{\underset{c}{\Phi_{R_m^*}}\{D_{b,c}\}\}, \tag{19}$$

где $\lambda b c \mathfrak{a} \mathfrak{f}[\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in D_{b,c}]$ — некоторый рекурсивный предикат. Рассмотрим следующие случаи а) — в).

а) $m < n$. Из (19) по теореме 1.1 имеем:

$$E = \underset{b}{\Phi_{R_n}}\{\underset{c}{\Phi_{R_{m+1}}}\{G_{b,c}\}\}, \tag{20}$$

где

$$G_{b,c} = \begin{cases} \mathfrak{N}^{k,l} & \text{при } c = 0, \\ D_{b,c_0}, & \text{при } c = \nu(c_0, \ldots, c_d), \text{ где } d = \partial(c) - 1. \end{cases}$$

Т. к. $\{\langle b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle : \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in \underset{c}{\Phi_{R_{m+1}}}\{G_{b,c}\}\} \in \mathfrak{R}_{m+1}$, то из (20) по лемме 2.1а) получаем: $E \in \mathfrak{R}_n$.

б) $m > n$. Из (19) по определению дополнительной δs-операции и по теореме 1.1 имеем:

$$\mathfrak{N}^{k,l} \setminus E = \underset{b}{\Phi_{R_n^*}}\{\underset{c}{\Phi_{R_m}}\{\mathfrak{N}^{k,l} \setminus D_{b,c}\}\} = \underset{b}{\Phi_{R_{n+1}}}\{\underset{c}{\Phi_{R_m}}\{H_{b,c}\}\} \tag{21}$$

где

$$H_{b,c} = \begin{cases} \mathfrak{N}^{k,l}, & \text{при } b = 0, \\ \mathfrak{N}^{k,l} \setminus D_{b_0,c}, & \text{при } b = \nu(b_0, \ldots, b_d), \text{ где } d = \partial(b) - 1. \end{cases}$$

Тогда $\{\langle b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle : \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in \underset{c}{\Phi_{R_m}}\{H_{b,c}\}\} \in \mathfrak{R}_m$, и из (21) по лемме 2.1 получаем: $E \in C\mathfrak{R}_m$.

в) $m = n$. Рассуждая, как в случае а), получим, что $E \in \mathfrak{R}_{n+1}$, рассуждая как в б), — что $E \in C\mathfrak{R}_{n+1}$.

2. Строение последовательности классов $\mathfrak{R}_n$.

Теорема 2.1 (об универсальных множествах). *Для любого* $n \geqslant 0$ *и любых* k, l *таких, что* $k + l > 0$, *в классе* $\mathfrak{R}_n$ *имеется множество* $M_n^{k,l} \subseteq N \times \mathfrak{N}^{k,l}$, *обладающее следующим свойством: для любого* $E \subseteq \mathfrak{N}^{k,l}$

$$E \in \mathfrak{R}_n \Longleftrightarrow (\exists b)[E = \{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle : \langle b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in M_n^{k,l}\}]. \tag{22}$$

Доказательство. Положим

$$(23)\qquad \begin{aligned} M_0^{k,l} &= \{\langle b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle\colon (\forall c)\overline{T}_k^{\mathfrak{f}}(b, \mathfrak{a}, c)\}\,, \\ M_{n+1}^{k,l} &= \{\langle b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle\colon (\exists \alpha \in R_{n+1})(\forall c \in \alpha)(\exists m)\, T_{k+1}^{\mathfrak{f}}(b, \mathfrak{a}, c, \mathfrak{f})\}\,, \end{aligned}$$

где через $T_k^{\mathfrak{f}}$ $(k \geqslant 0)$ обозначен известный [7, стр. 259] рекурсивный предикат $T_k^{f_1,\dots,f_l}$, $\overline{T}_k^{\mathfrak{f}}$ — отрицание $T_k^{\mathfrak{f}}$. Очевидно, $M_0^{k,l} \in \mathfrak{R}_0$; т. к. $\{\langle b, \mathfrak{a}, c, \mathfrak{f}\rangle\colon (\exists m)\, T_{k+1}^{\mathfrak{f}}(b, \mathfrak{a}, c, m)\} \in \complement\mathfrak{R}_0$, то по лемме 2.2 а) $M_{n+1}^{k,l} \in \mathfrak{R}_{n+1}$. Свойство (22) следует непосредственно из [7, теор. IV*].

Наряду с множествами $M_n^{k,l}$, введём функции $U_n^{k,l}\colon N \to \mathfrak{R}_n$ и $\complement U_n^{k,l}\colon N \to \complement\mathfrak{R}_n$, определяемые следующим образом:

$$(24)\qquad \begin{aligned} U_n^{k,l} b &= \{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle\colon \langle b, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in M_n^{k,l}\}\,, \\ \complement U_n^{k,l} b &= \mathfrak{N}^{k,l} \setminus U_n^{k,l} b; \end{aligned}$$

при $l = 0$, или при $k = 1$ и $l = 0$, индекс l или, соответственно, оба индекса k, l будем опускать (т. е. U_n^k есть $U_n^{k,0}$, U_n есть U_n^1).

Из теоремы 2.1 с помощью (R1)–(R4) получаем

Следствие. *Для любого множества* $E \subseteq N^{m+1} \times \mathfrak{N}^{k,l}$, *принадлежащего классу* $\mathfrak{R}_n$, *существует* о. р. ф. $g(b_0, \dots, b_m)$, *такая, что*

$$\{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle\colon \langle b_0, \dots, b_m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in E\} = U_n^{k,l} g(b_0, \dots, b_m).$$

Теорема 2.2 (о строгих включениях). *Для любого* $n \geqslant 0$:

а) *для любых* k, l *таких, что* $k + l > 0$, *существует множество* $D_n \subseteq \mathfrak{N}^{k,l}$ *такое, что* $D_n \in \mathfrak{R}_n$ *и* $D_n \notin \complement\mathfrak{R}_n$;

б) $\mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{R}_{n+1}$ *и* $\complement\mathfrak{R}_n \subset \mathfrak{R}_{n+1}$.

Доказательство. а) Применяем диагональный метод Кантора. Положим

$$D_n = \begin{cases} \{\langle a_1, \dots, a_k, \mathfrak{f}\rangle\colon \langle a_1, a_1, a_2, \dots, a_k, \mathfrak{f}\rangle \in M_n^{k,l}\}, & \text{если } k > 0\,, \\ \{\langle f_1, \dots, f_l\rangle\colon \langle f_1(0), f_1, f_2, \dots, f_l\rangle \in M_n^{k,l}\}, & \text{если } k = 0 \text{ и } l > 0\,. \end{cases}$$

Покажем, что $D_n \in \mathfrak{R}_n$ и $D_n \notin \complement\mathfrak{R}_n$. Для упрощения обозначений рассмотрим здесь случай $k = 0$ и $l = 1$. В этом случае $\mathfrak{N}^{k,l}$ есть N^N, $\langle \mathfrak{a}, f_1, \dots, f_l\rangle$ есть f_1 (или просто f) и

$$(25)\qquad D_n = \{f\colon \langle f(0), f\rangle \in M_n^{0,1}\}\,.$$

По (23) и лемме 2.2 а) $D_n \in \mathfrak{R}_n$. Допустим, $N^N \setminus D_n \in \mathfrak{R}_n$, и, значит, существует такое $d \in N$, что

$$(26)\qquad f \notin D_n \Longleftrightarrow \langle d, f\rangle \in M_n^{0,1}\,.$$

Пусть χ есть функция $(N \to N)$ такая, что $(\forall a)[\chi(a) = d]$. Тогда (25) и (26)

ведут к противоречию:

$$\chi \in D_n \Longleftrightarrow \langle \chi(0), \chi\rangle \in M_n^{0,1} \Longleftrightarrow \langle d, \chi\rangle \in M_n^{0,1} \Longleftrightarrow \chi \notin D_n\,.$$

Значит, $D_n \notin \complement\mathfrak{R}_n$.

б) Представляя множество $E \in \mathfrak{R}_n$ в виде $\underset{m}{\Phi_{R_{n+1}}}\{E_m\}$, где все $E_m = E$, по лемме 2.1 а) получаем, что $E \in \mathfrak{R}_{n+1}$; значит, $\mathfrak{R}_n \subseteq \mathfrak{R}_{n+1}$. Аналогично, из леммы 2.2 а) следует, что $\complement\mathfrak{R}_n \subseteq \mathfrak{R}_{n+1}$. Наконец, по вышедоказанному утверждению а), $\mathfrak{R}_n \neq \mathfrak{R}_{n+1}$, $\complement\mathfrak{R}_n \neq \mathfrak{R}_{n+1}$.

Теорема 2.3 (о верхней оценке). *Все* $\mathfrak{R}_n \subset \Sigma_2^1 \cap \Pi_2^1$.

Доказательство. Пусть $E \in \mathfrak{R}_n$. Тогда

$$(27)\qquad \begin{aligned} \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in E &\Longleftrightarrow (\exists \alpha \in \widetilde{R}_n)(\forall m \in \alpha)\, P_1(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \\ &\Longleftrightarrow (\forall \alpha \in R_n^*)(\exists m \in \alpha)\, P_2(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})\,, \end{aligned}$$

где P_1 и P_2 — рекурсивные предикаты. Пусть K_n и L_n — такие рекурсивные предикаты, что, согласно следствию теоремы 1.4,

$$(28)\qquad \begin{aligned} f \in [\widetilde{R}_n] &\Longleftrightarrow (\exists f_1)(\forall f_2)(\exists b)\, K_n(b, f, f_1, f_2)\,, \\ f \in [R_n^*] &\Longleftrightarrow (\exists f_1)(\forall f_2)(\exists b)\, L_n(b, f, f_1, f_2)\,. \end{aligned}$$

Из (27) и (28) следует:

$$\begin{aligned} &\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle \in E \\ &\Longleftrightarrow (\exists f)\{(\exists f_1)(\forall f_2)(\exists b)\, K_n(b, f, f_1, f_2) \,\&\, (\forall m)[f(m) = 0 \Rightarrow P_1(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})]\} \\ &\Longleftrightarrow (\forall f)\{(\exists f_1)(\forall f_2)(\exists b)\, L_n(b, f, f_1, f_2) \Rightarrow (\exists m)[f(m) = 0 \,\&\, P_2(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})]\}\,, \end{aligned}$$

откуда, вынося и стягивая функциональные кванторы (см. (8)), получаем: $E \in \Sigma_2^1 \cap \Pi_2^1$.

Замечание. С помощью системы обозначений для порядковых чисел конструктивных 1-го и 2-го числовых классов [10] последовательность баз R_n и классов $\mathfrak{R}_n$ можно продолжить трансфинитно-аналогично трансфинитным ступеням классической иерархии R-множеств [13]. Полученные таким путём трансфинитные классы также являются подклассами $\Sigma_2^1 \cap \Pi_2^1$.

3. Классы $\mathfrak{R}_n$ и джамп-операции. Функции oj: $\mathfrak{I}N \to \mathfrak{I}N$ и hj: $\mathfrak{I}N \to \mathfrak{I}N$, определяемые следующим образом $(\alpha \subseteq N)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{oj}(\alpha) &= \{a\colon (\exists b)\, T_1^{\alpha}(a, a, b)\}\,, \\ \mathrm{hj}(\alpha) &= \{a\colon (\forall f)(\exists b)\, T_1^{f,\alpha}(a, a, b)\}\,, \end{aligned}$$

называются *обыкновенным джампом* (ordinary jump, [11], [5]) и, соответственно, *гиперджампом* (hyperjump, [9], [19]). Мы покажем, что класс всех $\mathfrak{R}_n \cap \complement\mathfrak{R}_n$-подмножеств N при $n \geqslant 1$ эффективно инвариантен относительно обыкновенного джампа oj, а при $n \geqslant 2$ — относительно гиперджампа hj.

Лемма 2.3. *Для любого* $n \geqslant 0$:

а) *если* $P(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ *есть* $\mathfrak{R}_n$ (*или* $C\mathfrak{R}_{n+1}$)-*предикат, то* $(\forall m)P(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ – *также* $\mathfrak{R}_n(C\mathfrak{R}_{n+1})$-*предикат*;

б) *если* $P(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ *есть* $\mathfrak{R}_{n+1}(C\mathfrak{R}_n)$-*предикат, то* $(\exists m)P(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ — *также* $\mathfrak{R}_{n+1}(C\mathfrak{R}_n)$-*предикат*;

в) *если* P *и* Q *являются* $\mathfrak{R}_n(C\mathfrak{R}_n)$-*предикатами, то* $P \& Q$ *и* $P \vee Q$ — *также* $\mathfrak{R}_n(C\mathfrak{R}_n)$-*предикаты.*

Доказательство. а) следует из лемм 2.1б) и 2.2б); б) следует из а). Докажем в). Для упрощения обозначений предположим, что P и Q являются 1-местными $\mathfrak{R}_n$-предикатами на N. Пусть c_1 и c_2-такие числа, что $\{a\colon P(a)\} \times N = U_n^2 c_1$, $N \times \{b\colon Q(b)\} = U_n^2 c_2$, и пусть $h(0) = c_1$, $h(m+1) = c_2$. Тогда

$$P(a) \& Q(b) \Longleftrightarrow (\forall m)[\langle a, b\rangle \in U_n^2 h(m)],$$

$$P(a) \vee Q(b) \Longleftrightarrow (\exists m)[\langle a, b\rangle \in U_n^2 h(m)],$$

откуда по (R4) и лемме 2.3а), б) следует, что $P \& Q$ и $P \vee Q$ суть $\mathfrak{R}_n$-предикаты.

Лемма 2.4. *Если* $n \geqslant 0$ *и* $P(m, \mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ *есть* $\mathfrak{R}_{n+1}$ (*или* $C\mathfrak{R}_n$)-*предикат, то для любой ч. р. ф.* $\varphi(m_0, \ldots, m_c)$

$$\{\langle m_0, \ldots, m_c, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle\colon P(\varphi(m_0, \ldots, m_c), \mathfrak{a}, \mathfrak{f})\} \in \mathfrak{R}_{n+1}(C\mathfrak{R}_n, \text{ соответственно}).$$

Доказательство. Пусть l_0 — гёделевский номер ч. р. ф. φ. По [7, теор. XIX]

$$\{\langle m_0, \ldots, m_c, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle\colon P(\varphi(m_0, \ldots, m_c), \mathfrak{a}, \mathfrak{f})\}$$
$$= \{\langle m_0, \ldots, m_c, \mathfrak{a}, \mathfrak{f}\rangle\colon (\exists b)[T_c(l_0, m_0, \ldots, m_c, b) \& P(U(b), \mathfrak{a}, \mathfrak{f})]\},$$

где $U(b)$ и T_c — некоторые о. р. ф. и обще-рекурсивный предикат. В завершение применяем (R4) и лемму 2.3.

Теорема 2.4. а) *Для любого* $n > 0$ *и* $a \subseteq N$

$$a \in \mathfrak{R}_n \cap C\mathfrak{R}_n \Rightarrow \mathrm{oj}(a) \in \mathfrak{R}_n \cap C\mathfrak{R}_n,$$

причём существует о. р. ф. $g(l_1, l_2)$ *такая, что если* $a = U_n l_1 = CU_n l_2$, *то* $\mathrm{oj}(a) = U_n g'(l_1, l_2) = CU_n g''(l_1, l_2)$.

б) *Для любого* $n > 1$ *и* $a \subseteq N$

$$a \in \mathfrak{R}_n \cup C\mathfrak{R}_n \Rightarrow \mathrm{hj}(a) \in \mathfrak{R}_n \cap C\mathfrak{R}_n,$$

причём существует о. р. ф. $h(l_1, l_2)$ *такая, что если* $a = U_n l_1 = CU_n l_2$, *то* $\mathrm{hj}(a) = U_n h'(l_1, l_2) = CU_n h''(l_1, l_2)$.

Доказательство. а) Будем обозначать представляющую функцию множества $a \subseteq N$ через $a(m)$. По [7, стр. 260] и [8, примеч. 2]

$$(\exists b)T_1^a(a, a, b) \Longleftrightarrow (\exists b)(\exists c)[c = \overline{a}(b) \& T_1^1(c, a, a, b)]$$
$$\Longleftrightarrow (\exists b)(\exists c)[(\forall k < b)[k \in a \Longleftrightarrow (c)_k = 1] \& Q(c, a, b)],$$

где Q — некоторый обще-рекурсивный предикат. Следовательно, если положить

$$H(a, \alpha, \beta)$$
$$\Longleftrightarrow (\exists b)(\exists c)[(\forall k < b)[(k \in \alpha \& (c)_k = 1) \vee (k \in \beta \& (c)_k \neq 1)] \& Q(c, a, b)],$$

то

$$\mathrm{oj}(a) = \{a\colon H(a, a, N \setminus a)\}.$$

Пусть

$$V_n(a, l_1, l_2) \Longleftrightarrow H(a, U_n l_1, U_n l_2), \qquad W_n(a, l_1, l_2) \Longleftrightarrow H(a, CU_n l_1, CU_n l_2).$$

Тогда если $a = U_n l_1 = CU_n l_2$, то

$$\mathrm{oj}(a) = \{a\colon V_n(a, l_1, l_2)\} = \{a\colon W_n(a, l_2, l_1)\}. \tag{29}$$

При $n > 0$ по лемме 2.3 V_n есть $\mathfrak{R}_n$-, W_n есть $C\mathfrak{R}_n$-предикат и, по следствию теоремы 2.1, существуют о. р. ф. $g_1(l_1, l_2)$ и $g_2(l_1, l_2)$ такие, что

$$\{a\colon V_n(a, l_1, l_2)\} = U_n g_1(l_1, l_2), \qquad \{a\colon W_n(a, l_1, l_2)\} = CU_n g_2(l_1, l_2).$$

Отсюда и из (29) следует, что при $n > 0$ и $a = U_n l_1 = CU_n l_2$

$$\mathrm{oj}(a) = U_n g'(l_1, l_2) = CU_n g''(l_1, l_2),$$

где $g(l_1, l_2) = \sigma(g_1(l_1, l_2), g_2(l_2, l_1))$. Ч. т. д.

б) По определению гиперджампа $N \setminus \mathrm{hj}(a) = \{a\colon (\exists f)(\forall b)\overline{T}_1^{f,a}(a, a, b)\} = \{a\colon (\exists f)(\forall b)\overline{T}_1^{1,a}(\overline{f}(b), a, a, b)\}$, откуда, выражая b и $\overline{f}(b)$ через $\overline{\overline{f}}(b) = \nu(f(0), \ldots, f(b))$, найдём такой предикат P^a, рекурсивный относительно a, что

$$N \setminus \mathrm{hj}(a) = \{a\colon (\exists f)(\forall b)P^a(\overline{\overline{f}}(b), a)\}.$$

Затем, полагая

$$E_m = \begin{cases} N, & \text{если } m = 0, \\ \{a\colon P^a(m, a)\}, & \text{если } m > 0, \end{cases}$$

и учитывая (1), получаем:

$$N \setminus \mathrm{hj}(a) = \underset{m}{\Phi_{R_1}}\{E_m\}. \tag{30}$$

Предикат $\lambda ma[a \in E_m]$ рекурсивен относительно a, — следовательно [7], существует такая о. р. ф. $s(a, m)$, что

$$a \in E_m \Leftrightarrow s(a, m) \in \mathrm{oj}(a)\,. \tag{31}$$

Теперь пусть числа l_1 и l_2 таковы, что $a = U_n l_1 = \complement U_n l_2$ и $n > 1$. Тогда из (30) и (31) следует, что

$$N \setminus \mathrm{hj}(a) = \{a\colon Q_n(a, l_1, l_2)\} = \{a\colon S_n(a, l_1, l_2)\}\,, \tag{32}$$

где

$$Q_n(a, l_1, l_2) \Leftrightarrow (\exists \beta \in R_1)(\forall m \in \beta)[s(a, m) \in U_n g'(l_1, l_2)]\,,$$

$$S_n(a, l_1, l_2) \Leftrightarrow (\exists \beta \in R_1)(\forall m \in \beta)[s(a, m) \in \complement U_n g''(l_1, l_2)]\,,$$

и $g(l_1, l_2)$ — о. р. ф. из теоремы 2.4а). Т. к. $n > 1$, то по лемме 2.1б) Q_n есть $\mathfrak{R}_n$-предикат, и по лемме 2.2б) S_n есть $\complement\mathfrak{R}_n$-предикат. Представляя эти предикаты с помощью следствия теоремы 2.1 в виде:

$$Q_n(a, l_1, l_2) \Leftrightarrow a \in U_n h_1(l_1, l_2)\,,$$

$$S_n(a, l_1, l_2) \Leftrightarrow a \in \complement U_n h_2(l_1, l_2)\,,$$

где h_1 и h_2 — некоторые о. р. ф., из (32) получаем, что при $a = U_n l_1 = \complement U_n l_2$ и $n > 1$

$$\mathrm{hj}(a) = U_n h_2(l_1, l_2) = \complement U_n h_1(l_1, l_2)\,.$$

Значит, искомая о. р. ф. $h(l_1, l_2) = \sigma(h_2(l_1, l_2),\, h_1(l_1, l_2))$. Теорема 2.4 полностью доказана.

§ 3. ИЕРАРХИИ В КЛАССЕ $\mathfrak{R}_2$

1. Класс $\mathfrak{R}_2$ и трансфинитная итерация гиперджампа. Если $P(x, y)$ — какое-либо бинарное отношение на произвольном множестве X, то $\{x\colon (\exists y)[P(x, y) \vee P(y, x)]\}$ называется *полем* отношения P. Любое транзитивное иррефлексивное бинарное отношение называется *частичным упорядочением*. Частичное упорядочение $x <_W y$ с полем W ($x, y \in X$, $W \subseteq X$), такое, что каждое непустое подмножество поля W имеет $<_W$-минимальный элемент, называется *вполне упорядоченным* частичным упорядочением.

Лемма 3.1 (лемма о рекурсии [18], [5]). *Пусть $a <_W b$ ($a, b \in N$) есть вполне упорядоченное частичное упорядочение с полем W, и $P(a, b)$ — некоторый бинарный предикат. Если существует ч. р. ф. (о. р. ф.) $\psi(l, b)$ такая, что для любых $l \in N$ и $b \in W$*

$$(\forall a <_W b) P(\{l\}(a), a) \Rightarrow P(\psi(l, b), b)\,,$$

то существует ч. р. ф. (о. р. ф.) $\varphi(a)$ такая, что для всех $a \in W$ $P(\varphi(a), a)$.

Доказательство. По теореме о рекурсии [7] существует такое число l_0, что $\{l_0\}(a) \simeq \psi(l_0, a)$. Индукцией по $a \in W$ легко проверяется, что для любого $a \in W$ $P(\{l_0\}(a), a)$. Значит, $\{l_0\}$ можно взять в качестве искомой φ. При этом если $\psi(l, b)$ есть о. р. ф. то $\lambda a\{l_0\}(a)$ — значит, и $\varphi(a)$ — также является о. р. ф.

Если через $<_W$ обозначено некоторое частичное упорядочение на N, то через W всегда будем обозначать поле $<_W$.

Вполне упорядоченное частичное упорядочение $m <_W n$ ($m, n \in N$) такое, что $1 \in W$ и $(\forall m \in W)[m \neq 1 \Rightarrow 1 <_W m]$, называется *системой обозначений*. Через $|m|_W$ обозначается функция, отображающая поле W на некоторый начальный отрезок ряда порядковых чисел:

$|1|_W = 0$;

если $m \in W$ и $m \neq 1$, то $|m|_W$ = наименьшему порядковому числу τ такому, что $(\forall n <_W m)[|n|_W < \tau]$.

Говорят, что число $m \in W$ является *обозначением* порядкового числа $|m|_W$.

Для любой функции $F\colon \mathfrak{T}N \to \mathfrak{T}N$ и системы обозначений $<_W$ обозначим через $\pi(F, <_W)$ класс всех тех, и только тех функций $\mathfrak{F}\colon W \to \mathfrak{T}N$, для каждой из которых существуют ч. р. ф. $p(a)$, $q(a, b)$ и $r(a, c)$ такие, что если $a \in W$ и $a \neq 1$, то

(π1) $p(a) <_W a$ и $\{b\colon q(a, b) \in \mathfrak{F}(p(a))\} \subseteq \{b\colon b <_W a\}$,

(π2) $\mathfrak{F}(a) = \{c\colon r(a, c) \in F(V_a)\}$,

где

$$V_a = \{\sigma(b, c)\colon q(a, b) \in \mathfrak{F}(p(a)) \,\&\, c \in \mathfrak{F}(b)\}\,.$$

Таким образом, если $\mathfrak{F} \in \pi(F, <_W)$, то значение $\mathfrak{F}(a)$ при $0 < |a|_W$ определяется — по схеме из (π2) — через значения $\mathfrak{F}(b)$ при $b <_W a$.

Теорема 3.1. *Если $\mathfrak{F} \in \pi(\mathrm{hj}, <_W)$, где hj-гиперджамп, $<_W$ — система обозначений с полем W, и если $\mathfrak{F}(1) \in \mathfrak{R}_2 \cap \complement\mathfrak{R}_2$, то существует такая* о. р. ф. *$g(a)$, что для любого $a \in W$ $\mathfrak{F}(a) = U_2 g'(a) = \complement U_2 g''(a)$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.1 для доказательства нашей теоремы достаточно найти о. р. ф. $\psi(l, a)$, обладающую следующим свойством: если $l \in N$ и $a \in W$ таковы, что

$$(\forall b <_W a)[\mathfrak{F}(b) = U_2(\{l\}(b))' = \complement U_2(\{l\}(b))'']\,, \tag{33}$$

то

$$\mathfrak{F}(a) = U_2 \psi'(l, a) = \complement U_2 \psi''(l, a)\,. \tag{34}$$

Если $a \in W$ и $a \neq 1$, то по (π2)

$$\mathfrak{F}(a) = \{c\colon r(a, c) \in \mathrm{hj}(V_a)\}\,, \tag{35}$$

где

$$V_a = \{c\colon q(a, c') \in \mathfrak{F}(p(a)) \,\&\, c'' \in \mathfrak{F}(c')\}\,, \tag{36}$$

p, q, r — некоторые ч. р. ф. Из (36) и (33) с помощью ($\pi 1$) получаем, что если положить

$$Q_1 = \{\langle l, a, c\rangle\colon\ q(a, c') \in U_2(\{l\}(p(a)))' \& c'' \in U_2(\{l\}(c'))'\},$$

$$Q_2 = \{\langle l, a, c\rangle\colon\ q(a, c') \in \complement U_2(\{l\}(p(a)))'' \& c'' \in \complement U_2(\{l\}(c'))''\},$$

то для l и a таких, что $0 < |a|_W$ и имеет место (33);

(37) $$c \in V_a \Leftrightarrow \langle l, a, c\rangle \in Q_1 \Leftrightarrow \langle l, a, c\rangle \in Q_2 .$$

По леммам 2.3 и 2.4 $Q_1 \in \mathfrak{R}_2$, $Q_2 \in \complement\mathfrak{R}_2$, — следовательно, существуют такие о. р. ф. h_1 и h_2, что

(38) $$\langle l, a, c\rangle \in Q_1 \Leftrightarrow c \in U_2 h_1(l, a), \qquad \langle l, a, c\rangle \in Q_2 \Leftrightarrow c \in \complement U_2 h_2(l, a).$$

Из (37) и (38) по теореме 2.4б) следует, что для l и a, удовлетворяющих вышеуказанным условиям,

$$\mathrm{hj}(V_a) = U_2 h'(h_1(l, a)) = \complement U_2 h''(h_2(l, a)),$$

где h — о. р. ф. из теоремы 2.4б). Поочерёдно подставляя полученные для $\mathrm{hj}(V_a)$ выражения в (35) и применяя лемму 2.4 и следствие теоремы 2.1, найдём такие о. р. ф. $g_1(l, a)$ и $g_2(l, a)$, что для l и a, таких, что $0 < |a|_W$ и имеет место (33),

(39) $$\mathfrak{F}(a) = U_2 g_1(l, a) = \complement U_2 g_2(l, a).$$

Теперь [10] определим о. р. ф. $\psi(l, a)$ так:

$$\psi(l, a) = \begin{cases} \sigma(a_1, a_2), & \text{если } a = 1, \\ \sigma(g_1(l, a), g_2(l, a)), & \text{если } a \neq 1, \end{cases}$$

где a_1 и a_2 — такие числа, что $\mathfrak{F}(1) = U_n a_1 = \complement U_n a_2$. Из (39) следует, что так определённая о. р. ф. $\psi(l, a)$ является искомой — ведущей от (33) к (34). Теорема доказана.

Систему обозначений $<_W$, обладающую свойствами:

(E1) если $a \in W$, то 2^a является единственным непосредственным $<_W$-преемником a,

(E2) если $|a|_W$-предельное порядковое число, то $(\forall b)[a \neq 2^b]$, назовём *E-системой* [11].

Для удобства применений теоремы 3.1 к конкретным E системам, встречающимся далее, сформулируем в виде леммы следующее очевидное утверждение.

---

[10] Оставшаяся часть рассуждений шаблонна для всех применений леммы о рекурсии и в дальнейшем будет опускаться.

[11] Этот класс систем обозначений был введён в [5].

Лемма 3.2. *Пусть $<_W$ есть E-система с полем W, и функция $\mathfrak{F}\colon W \to \mathfrak{T}N$ определена следующим образом:*

1) $\mathfrak{F}(1) = N$;

2) $\mathfrak{F}(2^a) = \mathrm{hj}(\mathfrak{F}(a))$ *для любого* $a \in W$;

3) *если* $|a|_W$*-предельное порядковое число, то*

$$\mathfrak{F}(a) = \{c\colon\ r(a, c) \in \mathrm{hj}(V_a)\},$$

где $V_a = \{\sigma(b, c)\colon\ q(a, b) \in \mathfrak{F}(p(a)) \& c \in \mathfrak{F}(b)\}$ *и* p, q, r — *такие ч. р. ф., что* $p(a) <_W a$ *и* $\{b\colon\ q(a, b) \in \mathfrak{F}(p(a))\} \subseteq \{b\colon\ b <_W a\}$. *Тогда* $\mathfrak{F} \in \pi(\mathrm{hj}, <_W)$.

Пусть $<_h$ есть E-система с полем D_h, определённая в [5]; пусть, как и в [5], функция $H_h\colon D_h \to \mathfrak{T}N$ определена так: для любого $a \in D_h$

$$H_h(a) = \begin{cases} N, & \text{если } a = 1, \\ \mathrm{hj}(H_h(b)), & \text{если } a = 2^b \neq 1, \\ \{2^b \cdot 3^c\colon\ b <_h a \& c \in H_h(b)\}, & \text{если } a \neq 2^{(a)_0}. \end{cases}$$

Система $<_h$ имеет следующее свойство [5]: существуют ч. р. ф. $f_0(a)$ и $f_1(a)$, такие, что если $0 < |a|_h$, то $f_0(a) <_h a$ и $\{b\colon\ b <_h a\}$ рекурсивно относительно $H_h(f_0(a))$ с гёделевским номером $f_1(a)$.

Покажем, что $H_h \in \pi(\mathrm{hj}, <_h)$.

Обозначим через $\varepsilon(m, n)$ такую о. р. ф., что если β рекурсивно относительно α с гёделевским номером m ($\alpha, \beta \subseteq N$), то

(40) $$n \in \beta \Leftrightarrow \varepsilon(m, n) \in \mathrm{hj}(\alpha).$$

Пусть $|a|_h$-предельное порядковое число. Тогда

(41) $$\{b\colon\ b <_h a\} = \{b\colon\ \varepsilon(f_1(a), b) \in \mathrm{hj}(H_h(f_0(a)))\} = \{b\colon\ q(a, b) \in H_h(p(a))\},$$

где

(42) $$p(a) \simeq 2^{f_0(a)}, \qquad q(a, b) \simeq \varepsilon(f_1(a), b).$$

Далее,

(43) $$H_h(a) = \{c\colon\ c = 2^{(c)_0} \cdot 3^{(c)_1} \& \sigma((c)_0, (c)_1) \in V_a\},$$

где (при p и q, определённых по (42))

$$V_a = \{\sigma(b, c)\colon\ q(a, b) \in H_h(p(a)) \& c \in H_h(b)\}.$$

Из (43) и (40) следует, что если положить

(44) $$r(a, c) = \varepsilon(m_0, c),$$

где m_0 есть гёделевский номер $\{c\colon\ c = 2^{(c)_0} \cdot 3^{(c)_1} \& \sigma((c)_0, (c)_1) \in a\}$ по a (таким образом, в данном случае $r(a, c)$ фактически не зависит от a), то при предельном $|a|_h$

$$H_h(a) = \{c\colon\ r(a, c) \in \mathrm{hj}(V_a)\}.$$

Итак, мы видим, что если ч. р. ф. p, q и r определены по (42) и (44), то функция $H_h\colon D_h \to \mathfrak{S}N$ удовлетворяет условиям леммы 3.2. Значит, $H_h \in \pi(\mathrm{hj}, <_h)$.

Теперь из теоремы 3.1 получаем

Следствие. *Для всех* $a \in D_h$

$$H_h(a) \in \mathfrak{R}_2 \cap \complement\mathfrak{R}_2 .$$

2. Класс $\mathfrak{R}_2$ и конструктивная версия высших классов порядковых чисел. Пусть E-система $<_{\widetilde{O}}$ с полем $\widetilde{O}$ и подсистемы I_a ($a \in \widetilde{O}$, $I_a \subset <_{\widetilde{O}}$) определены по [12] (где $<_{\widetilde{O}}$ интерпретируется как система обозначений для всех „конструктивно достижимых" [12] порядковых чисел, I_a — как система обозначений для порядковых чисел, образующих „конструктивный числовой класс [13] индекса a"). Следуя [12], поле любого бинарного отношения $P(m, n)$, отождествляемого с множеством $\{\langle m, n\rangle\colon P(m, n)\}$, будем здесь обозначать через $\operatorname{dom} P$. Отметим свойства (C1) и (C2) системы $<_{\widetilde{O}}$.

(C1) Если $|a|_{\widetilde{O}}$-предельное порядковое число, то $a = 3^b \cdot 5^c$, где $b <_{\widetilde{O}} a$ и $(\forall n \in \operatorname{dom} I_b)[\{c\}(n)$ определено и $\{c\}(n) <_{\widetilde{O}} a]$.

Чтобы сформулировать (C2), нужны следующие обозначения (см. [12, стр. 343]):

$\gamma, \gamma_1, \gamma_2$-переменные на $\mathfrak{S}N^2$;

$$rln^{\gamma} n = \{\langle k, m\rangle\colon \langle k, m\rangle \in \gamma \,\&\, (\forall a)[a = m \vee \langle a, m\rangle \in \gamma$$
$$\Rightarrow (\forall b, c)[a = 3^b \cdot 5^c \Rightarrow \langle a, n\rangle \in \gamma]]\};$$

$$\mathfrak{C}_0(\gamma) \Longleftrightarrow \langle 1, 2\rangle \in \gamma \,\&\, (\forall a)[\langle 1, a\rangle \in \gamma \Rightarrow \langle a, 2^a\rangle \in \gamma]\,\&$$
$$\&(\forall a, b, c)[\langle a, b\rangle \in \gamma \,\&\, \langle b, c\rangle \in \gamma \Rightarrow \langle a, c\rangle \in \gamma];$$

$$\mathfrak{C}_1(a, \gamma_1, \gamma_2)$$
$$\Longleftrightarrow \mathfrak{C}_0(\gamma_2)\,\&\,(\forall b, c)\{[b = a \vee \langle b, a\rangle \in \gamma_1]\,\&$$
$$\&(\forall m)[m \in \operatorname{dom} rln^{\gamma_1} b \Rightarrow \{c\}(m) \text{ определено}]\,\&$$
$$\&(\forall m, n)[\langle m, n\rangle \in rln^{\gamma_1} b \Rightarrow \langle \{c\}(m), \{c\}(n)\rangle \in \gamma_2]\,\&$$
$$\&(\exists m)[m \in \operatorname{dom} rln^{\gamma_1} b \,\&\, \langle b, \{c\}(m)\rangle \in \gamma_2]$$
$$\Rightarrow (\forall m)[m \in \operatorname{dom} rln^{\gamma_1} b \Rightarrow \langle \{c\}(m), 3^b 5^c\rangle \in \gamma_2]\}.$$

---

(12) Порядковое число μ называется достижимым, если мощность μ меньше $\aleph_\mu$, или если $\mu = \lim\limits_{\tau < v} \mu_\tau$, где $v < \mu$ и все $\mu_\tau < \mu$.

(13) Имеются ввиду кумулятивные (т. е. включающие все предшествующие) числовые классы.

(C2) Для любого $a \in \widetilde{O}$

$$I_a = \begin{cases} \bigcap \{\gamma\colon \mathfrak{C}_0(\gamma)\}, & \text{если } a = 1, \\ \bigcap \{\gamma\colon \mathfrak{C}_1(b, I_b, \gamma)\}, & \text{если } a = 2^b \neq 1, \\ \bigcap \{\gamma\colon (\forall n)[n \in \{c\}(\operatorname{dom} I_b) \Rightarrow \mathfrak{C}_1(n, I_n, \gamma)]\}, & \text{если } a = 3^b 5^c. \end{cases}$$

Теорема 3.2. *Пусть функция* $\mathfrak{I}\colon \widetilde{O} \to \mathfrak{S}N$ *определена следующим образом:*

а) $\mathfrak{I}(1) = N$;

б) $\mathfrak{I}(2^a) = \mathrm{hj}(\mathfrak{I}(a))$, *где* $a \in \widetilde{O}$;

в) *если* $a \in \widetilde{O}$ *и* $a = 3^b 5^c$, *то*

$$\mathfrak{I}(a) = \{\sigma(m, n)\colon m \in \{c\}(\operatorname{dom} I_b)\,\&\, n \in \mathfrak{I}(2^m)\}.$$

Тогда существует такая о. р. ф. $g(a, m, n)$, *что для любого* $a \in \widetilde{O}$

$$\langle m, n\rangle \in I_a \Longleftrightarrow g(a, m, n) \in \mathfrak{I}(2^a).$$

Доказательство. Эффективной индукцией по $a \in \widetilde{O}$ (т. е. применением леммы о рекурсии) докажем существование такой о. р. ф. $\varphi(a)$, что искомая о. р. ф. $g(a, m, n) \simeq \{\varphi(a)\}(m, n)$. Для этого достаточно найти такую о. р. ф. $\psi(l, a)$, что если $l \in N$ и $a \in \widetilde{O}$ удовлетворяют гипотезе индукции:

(45) $(\forall b <_{\widetilde{O}} a)[\{l\}(b)$ есть гёделевский номер о. р. ф. $h_0(m, n)$ такой, что $I_b = h_0^{-1}(\mathfrak{I}(2^b))]$,

то $\psi(l, a)$ является гёделевским номером о. р. ф. $h_1(m, n)$ такой, что $I_a = h_1^{-1}(\mathfrak{I}(2^a))$.

Покажем, как определяется эта о. р. ф. $\psi(l, a)$ в каждом из следующих случаев.

1) $a = 1$. Т. к. $\mathfrak{I}(2) = \mathrm{hj}(N)$, а I_1, будучи линейным упорядочением $1, 2, 2^2, 2^{2^2}, \ldots$, является обще-рекурсивным подмножеством N^2, то существует такая о. р. ф. $\lambda mn\{c_0\}(m, n)$, что $\langle m, n\rangle \in I_1 \Longleftrightarrow \{c_0\}(m, n) \in \mathfrak{I}(2)$. Полагаем $\psi(l, 1) = c_0$.

2) $a = 2^b \neq 1$. Если $a \in \widetilde{O}$, то по гипотезе индукции $\lambda mn\{\{l\}(b)\}(m, n)$ есть такая о. р. ф., что

$$I_b = \{\langle m, n\rangle\colon \{\{l\}(b)\}(m, n) \in \mathfrak{I}(a)\}. \tag{46}$$

Кроме того, по (C2)

$$I_a = \{\langle m, n\rangle\colon (\forall \gamma)[\mathfrak{C}_1(b, I_b, \gamma) \Rightarrow \langle m, n\rangle \in \gamma]\}. \tag{47}$$

Пусть

$$\begin{aligned} &\Gamma(a, k) = \{\langle m, n\rangle\colon \{k\}(m, n) \in a\}, \\ &\Delta(a, c, k) = \{m\colon (\forall \beta)[\mathfrak{C}_1(c, \Gamma(a, k), \sigma^{-1}(\beta)) \Rightarrow m \in \beta]\}. \end{aligned} \tag{48}$$

Т. к. предикаты $[\langle m, n\rangle \in \Gamma(a, k)]$ и $\mathfrak{C}_1(c, \Gamma(a, k), \sigma^{-1}(\beta))$ являются арифметическими (в чём легко убедиться, просматривая соответствующие определения, приводившиеся перед формулировкой (C2)), то предикат $\lambda mcka[m \in \Delta(a, c, k)]$ является Π_1^1-предикатом (3); следовательно, существует такая о. р. ф. $d(c, k, m)$, что

$$(49)\qquad m \in \Delta(a, c, k) \Longleftrightarrow d(c, k, m) \in \mathrm{hj}(a)\,.$$

Из (46) и (48), для соответствующих $a(=2^b)$ и l, имеем:

$$I_b = \Gamma(\mathfrak{I}(a), \{l\}(b))\,;$$

отсюда и из (47)-(49) получаем:

$$\langle m, n\rangle \in I_a \Longleftrightarrow \sigma\xi(m, n) \in \Delta(\mathfrak{I}(a), b, \{l\}(b)) \Longleftrightarrow \{S_2^2(d_0, a, l)\}(m, n) \in \mathfrak{I}(2^a)\,,$$

где d_0 — гёделевский номер ч. р. ф. $d((a)_0, \{l\}((a)_0), \sigma(m, n))$ и S_2^2 — о. р. ф. из [7, теор. XXIII]. Значит, при $a = 2^b \neq 1$ следует положить $\psi(l, a) = S_2^2(d_0, a, l)$.

3) $a \neq 2^{(a)_0}$. Допустим, $a \in \widetilde{O}$. Тогда $a = 3^b 5^c$, и по (C2)

$$(50)\qquad I_a = \{\langle n_1, n_2\rangle\colon (\nabla\gamma)[(\nabla m)[m \in \{c\}(\mathrm{dom} I_b) \Rightarrow \mathfrak{C}_1(m, I_m, \gamma)] \Rightarrow \langle n_1, n_2\rangle \in \gamma]\}\,.$$

Обозначим

$$(51)\qquad I_a^* = \{\sigma(m, n)\colon m \in \{c\}(\mathrm{dom} I_b) \,\&\, \langle n', n''\rangle \in I_m\}\,;$$

т. к. для всех $m \in \widetilde{C}$ $\langle 1, 2\rangle \in I_m$, то

$$(52)\qquad \{c\}(\mathrm{dom} I_b) = \{m\colon \sigma(m, \sigma(1, 2)) \in I_a^*\}\,,$$

и если $m \in \{c\}(\mathrm{dom} I_b)$, то

$$(53)\qquad I_m = \{\langle n_1, n_2\rangle\colon \sigma(m, \sigma(n_1, n_2)) \in I_a^*\}\,.$$

Т. к. по (C2) $m \in \{c\}(\mathrm{dom} I_b) \Rightarrow m <_{\widetilde{O}} a$, то, применяя к (51) гипотезу индукции (45) и вспоминая определение $\mathfrak{I}(a)$, получаем, что для $a\ (=3^b 5^c \in \widetilde{O})$ и l, удовлетворяющих (45),

$$I_a^* = \{\sigma(m, n)\colon m \in \{c\}(\mathrm{dom} I_b) \,\&\, \{\{l\}(m)\}(n', n'') \in \mathfrak{I}(2^b)\} = \{\sigma(m, n)\colon \sigma(m, \{\{l\}(m)\}(n', n'')) \in \mathfrak{I}(a)\}\,.$$

Отсюда и из (52), (53) следует, что если положить

$$\Gamma_1(a, k) = \{m\colon \sigma(m, \{\{k\}(m)\}(1, 2)) \in a\}\,,$$
$$\Gamma_2(a, k, m) = \{\langle n_1, n_2\rangle\colon \sigma(m, \{\{k\}(m)\}(n_1, n_2)) \in a\}\,,$$

то

$$(54)\qquad \{c\}(\mathrm{dom} I_b) = \Gamma_1(\mathfrak{I}(a), l)\,,$$

и если $m \in \{c\}(\mathrm{dom} I_b)$, то

$$(55)\qquad I_m = \Gamma_2(\mathfrak{I}(a), l, m)\,.$$

Затем полагаем

$$\Delta_1(a, k) = \{\langle n_1, n_2\rangle\colon (\nabla\gamma)[(\nabla m)[m \in \Gamma_1(a, k) \Rightarrow \mathfrak{C}_1(m, \Gamma_2(a, k, m), \gamma)] \Rightarrow \langle n_1, n_2\rangle \in \gamma]\}\,,$$

тогда из (50), (54) и (55) следует:

$$(56)\qquad I_a = \Delta_1(\mathfrak{I}(a), l)\,.$$

Т. к. предикат $\lambda kn_1n_2a[\langle n_1, n_2\rangle \in \Delta_1(a, k)]$ является Π_1^1-предикатом (3), то $\langle n_1, n_2\rangle \in \Delta_1(a, k) \Longleftrightarrow e(k, n_1, n_2) \in \mathrm{hj}(a)$, где $e(k, n_1, n_2)$-некоторая о. р. ф. Отсюда и из (56) получаем, наконец, что если a и l удовлетворяют гипотезе индукции, то для любых m, n

$$\langle m, n\rangle \in I_a \Longleftrightarrow \{S_2^1(e_0, l)\}(m, n) \in \mathfrak{I}(2^a)\,,$$

где e_0 — гёделевский номер о. р. ф. $e(l, m, n)$ и S_2^1 — о. р. ф. из [7, теор. XXIII]. Значит, при $a \neq 2^{(a)_0}$ следует положить $\psi(l, a) = S_2^1(e_0, l)$. Этим рассмотрение случая 3) — и, вместе с тем, доказательство теоремы 3.2 — оканчивается.

Следствие. $\mathfrak{I} \in \pi(\mathrm{hj}, <_{\widetilde{O}})$.

Доказательство — на основании леммы 3.2 — проводится с помощью теоремы 3.2 вполне аналогично вышеприведённому доказательству того, что $H_h \in \pi(\mathrm{hj}, <_h)$.

Теорема 3.3. *Существует такая о. р. ф. $u(a)$, что для любого $a \in \widetilde{C}$ $I_a = U_2^2 u'(a) = \mathrm{C} U_2^2 u''(a)$.*

Доказательство. По следствию теоремы 3.2 и теореме 3.1 существует о. р. ф. $v(a)$ такая, что для $a \in \widetilde{O}$ $\mathfrak{I}(a) = U_2 v'(a) = \mathrm{C} U_2 v''(a)$ (где функция $\mathfrak{I}(a)$ определена по теореме 3.2). Отсюда и из теоремы 3.2 следует, что для $a \in \widetilde{C}$

$$\langle m, n\rangle \in I_a \Longleftrightarrow g(a, m, n) \in U_2 v'(2^a) \Longleftrightarrow g(a, m, n) \in \mathrm{C} U_2 v''(2^a)\,.$$

Теперь искомая $u(a)$ легко может быть найдена по (R4) из п. 1 § 2 и по следствию теоремы 2.1.

Следствие. *Существует такая о. р. ф. $d(a)$, что для любого $a \in C$ $\mathrm{dom} I_a = U_2 d'(a) = \mathrm{C} U_2 d''(a)$.*

Таким образом, для всех $a \in \widetilde{O}$ I_a и $\operatorname{dom} I_a$ принадлежат классу $\mathfrak{R}_2 \cap \mathrm{C}\mathfrak{R}_2$.

$\mathfrak{H}$-иерархия, определённая Адисоном и Клини [2] на основе системы обозначений для порядковых чисел первых трёх конструктивных числовых классов, продолжена в [12] следующим образом: для любого $a \in \widetilde{O}$

$$\mathfrak{H}_a = \begin{cases} N, & \text{если } a = 1, \\ \mathrm{hj}(\mathfrak{H}_b), & \text{если } a = 2^b \neq 1, \\ \{m\colon (m)_1 \in \operatorname{dom} I_b \,\&\, (m)_0 \in \mathfrak{H}_{\{c\}((m)_1)}\}, & \text{если } a = 3^b 5^c. \end{cases}$$

Теорема 3.4. *Существует такая о. р. ф. $h(a)$, что для любого $a \in \widetilde{O}$ $\mathfrak{H}_a = U_2 h'(a) = \mathrm{C} U_2 h''(a)$.*

Доказательство — эффективной индукцией по $a \in \widetilde{O}$. Согласно лемме 3.1, надо показать, что в каждом из случаев: $a = 1$, $a = 2^b \neq 1$, $a \neq 2^{(a)_0}$ — существует такая о. р. ф. $\psi(l, a)$, что если $a \in \widetilde{O}$ и $l \in N$ таковы, что

$$(57) \qquad (\forall b <_{\widetilde{O}} a)\big[\mathfrak{H}_b = U_2\big(\{l\}(b)\big)' = \mathrm{C} U_2\big(\{l\}(b)\big)''\big],$$

то

$$\mathfrak{H}_a = U_2 \psi'(l, a) = \mathrm{C} U_2 \psi''(l, a).$$

Случай $a = 1$ — очевиден, случай $a = 2^b \neq 1$ — также, с помощью теоремы 2.4б), не вызывает затруднений. Случай $a \neq 2^{(a)_0}$ рассмотрим подробней. Допустим, $a \in \widetilde{O}$. Тогда $a = 3^b 5^c$, и с помощью (57) и следствия теоремы 3.3 получаем:

$$(58) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{H}_a &= \{m\colon (m)_1 \in U_2 d'(b) \,\&\, (m)_0 \in U_2 e'(l, c, m)\} = \\ &= \{m\colon (m)_1 \in \mathrm{C} U_2 d''(b) \,\&\, (m)_0 \in \mathrm{C} U_2 e''(l, c, m)\}, \end{aligned}$$

где $d(b)$ есть о. р. ф. из упомянутого следствия, а $e(l, c, m) \simeq \{l\}\big(\{c\}((m)_1)\big)$. Применяя — на основании лемм 2.3в) и 2.4 — следствие теоремы 2.1, найдём о. р. ф. ψ_1 и ψ_2, такие, что для любых $a, l \in N$

$$\big\{m\colon (m)_1 \in U_2 d'\big((a)_1\big) \,\&\, (m)_0 \in U_2 e'\big(l, (a)_2, m\big)\big\} = U_2 \psi_1(l, a),$$

$$\big\{m\colon (m)_1 \in \mathrm{C} U_2 d''\big((a)_1\big) \,\&\, (m)_0 \in \mathrm{C} U_2 e''\big(l, (a)_2, m\big)\big\} = \mathrm{C} U_2 \psi_2(l, a).$$

Отсюда и из (58) видим, что в рассматриваемом случае $(a \neq 2^{(a)_0})$ искомая $\psi(l, a) = \sigma\big(\psi_1(l, a), \psi_2(l, a)\big)$.

Итак, для всех $a \in \widetilde{O}$ $\mathfrak{H}_a \in \mathfrak{R}_2 \cap \mathrm{C}\mathfrak{R}_2$.

§ 4. Иерархии в классах $\mathfrak{R}_{n+1}$

Теорема 2.4, игравшая решающую роль при рассмотрении иерархий в классе $\mathfrak{R}_2$, может быть обобщена следующим образом.

Теорема 4.1. *Для любого $n \geqslant 0$: если функция $F\colon \mathfrak{T}N \to \mathfrak{T}N$ представима в виде*

$$(59) \qquad F(a) = \{a\colon (\forall \beta \in R_n)(\exists b \in \beta) P^a(a, b)\}$$

с каким-либо рекурсивным P^a, то для любого $m > n$ существует о. р. ф. $g(k, l)$ такая, что

$$a = U_m k = \mathrm{C} U_m l \Rightarrow F(a) = U_m g'(k, l) = \mathrm{C} U_m g''(k, l).$$

Замечание. При $n = 0$ $F(a) = \{a\colon (\exists b) P^a(a, b)\}$ (т. к. база $R_0 = \{N\}$) и, если $P^a(a, b)$ есть $T_1^a(a, a, b)$, то функция F есть обыкновенный джамп oj. При $n = 1$ можно подобрать предикат P^a так, чтобы F была гиперджампом hj (как это сделано при доказательстве теоремы 2.4б).

Доказательство. При $n = 0$ утверждение теоремы легко следует из теоремы 2.4а). При $n > 0$ доказательство проводится с помощью леммы 2.1 аналогично доказательству теоремы 2.4б).

Теперь можно получить обобщение теоремы 3.1.

Теорема 4.2. *Для любого $n \geqslant 0$: если $\mathfrak{F} \in \pi(F, <_W)$, где $<_W$ есть система обозначений с полем W, и функция $F\colon \mathfrak{T}N \to \mathfrak{T}N$ представима в виде (59), и если $\mathfrak{F}(1) \in \mathfrak{R}_{n+1} \cap \mathrm{C}\mathfrak{R}_{n+1}$, то существует о. р. ф. $g(a)$ такая, что для любого $a \in W$ $\mathfrak{F}(a) = U_{n+1} g'(a) = \mathrm{C} U_{n+1} g''(a)$.*

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 3.1 — эффективной индукцией по $a \in W$, с применением теоремы 4.1 вместо теоремы 2.4.

На основании этой теоремы в каждом из классов $\mathfrak{R}_{n+1} \cap \mathrm{C}\mathfrak{R}_{n+1}$ можно указать трансфинитную последовательность множеств, не принадлежащих (кроме, быть может, нескольких начальных множеств) классу $\mathfrak{R}_n \cup \mathrm{C}\mathfrak{R}_n$ и имеющих строго возрастающие степени рекурсивной неразрешимости. В классе $\mathfrak{R}_1 \cap \mathrm{C}\mathfrak{R}_1$ такую последовательность образуют, например, гиперарифметические множества H_a, $a \in O$ [9] (точнее, $H_a = \{m\colon H_a(m)\}$, где $H_a(m)$ — предикаты, определённые в [9]); в классе $\mathfrak{R}_2 \cap \mathrm{C}\mathfrak{R}_2$ — множества $H_h(a)$, $a \in D_h$ [5], или $\mathfrak{H}_a$, $a \in \widetilde{O}$ [12]. Для $n > 1$ введём сначала функции $F^n(a) = \{a\colon (\forall \beta \in \mathrm{R}_n) \times (\exists b \in \beta)(\exists k) T_1^a(a, b, k)\}$; с помощью следствия теоремы 1.3, теоремы Канторовича–Ливенсона и теоремы 1.2 функции F^n могут быть приведены к виду (59). С другой стороны, все F^n являются джамп-операциями в смысле Эндертона [5]; пусть для каждого $n > 1$ система обозначений $<_{F^n}$ с полем D_{F^n}, и функция $H_{F^n}\colon D_{F^n} \to \mathfrak{T}N$ определены по [5, § 5]; тогда множества $H_{F^n}(a)$, $a \in D_{F^n}$, образуют искомую последовательность в классе $\mathfrak{R}_{n+1} \cap \mathrm{C}\mathfrak{R}_{n+1}$ при каждом $n > 1$.

Литература

[1] J. W. Addison, *Separation principles in the hierarchies classical and effective descriptive set theory* Fund. Math., 46 (1958), стр. 123–135.

[2] — and S. C. Kleene, *A note on function quantification*. Proc. Amer. Math. Soc., 8(1957), стр. 1002–1006.

[3] В. И. Амстиславский, *Теоретико-множественные операции и рекурсивные иерархии*. Доклады АН СССР, 169 (1966) № 5, стр. 995-998.
[4] — *Расширение рекурсивных иерархий и R-операции*. Доклады АН СССР, 180 (1968), № 5, стр. 1023–1026.
[5] H. B. Enderton, *Hierarchies in recursive function theory*. Trans. Amer. Maht. Soc., 111 (1964), стр. 457–471.
[6] L. Kantorovitch and E. Livenson, *Memoir on the analitical operations and projective sets*. Part. I — Fund. Math., 18 (1932), стр. 214–271. Part II — Fund. Math., 20 (1933), стр. 54–97.
[7] S. C. Kleene, *Введение в метаматематику*. Москва 1957.
[8] — *Arithmetical predicates and function quantifiers*. Trans. Amer. Math. Soc., 79 (1955), стр. 312–340.
[9] — *Hierarchies of number—theoretic predicates*. Bull. Amer. Math. Soc., 61 (1955), стр. 193–213.
[10] — *On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals* (second paper). Amer. J. Math., 77 (1955), стр. 405–428.
[11] — and L. E. Post, *The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability*. Ann. of Math., 59 (1954), стр. 379–407.
[12] D. L. Kreider and H. Rogers, Jr., *Constructive versions of ordinal number classes*. Trans. Amer. Math. Soc., 100 (1961), стр. 325–369.
[13] А. А. Ляпунов, *R-множества*. Труды Математ. инст. им. Стеклова АН СССР, 40 (1953), стр. 1–68.
[14] — *Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы*. Труды Московского математ. общества, 6 (1957), стр. 195–230.
[15] — *Об операциях над множествами*. Алгебра и логика (семинар), 2 (1963), вып. 1, стр. 47–56.
[16] Ю. С. Очан, *Теория операций над множествами*. Успехи математ. наук, 10 (1955), вып. 3, стр. 71–128.
[17] H. Putnam, *On hierarchies and systems of notations*. Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), стр. 44–50.
[18] H. Rogers, Jr., *Recursive functions over well ordered partial orderings*. Proc. Amer Math. Soc., 10 (1959), стр. 847–853.
[19] C. Spector, *Recursive well orderings*. J. Symb. Logic, 20 (1955), стр. 151–163.

ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБ. ССР, Баку.

Reçu par la Rédaction le 17. 4. 1969

On convex metric spaces V

by

R. Duda (Wrocław)

§ 1. Introduction. Let X be a metric space with a metric ϱ. By a *hyperspace of* X we shall mean any family $\mathfrak{H}(X)$ consisting of non-empty compact subsets of X. Of particular importance will be the hyperspace $\mathrm{Comp}(X)$ consisting of all non-empty compact subsets of X, the hyperspace $C(X)$ consisting of all non-empty compact and connected subsets (i.e., of all subcontinua) of X, the hyperspace $\mathrm{Conv}(X)$ consisting of all non-empty compact and convex subsets of X, and the hyperspace $X(1)$ consisting of all one-point subsets of X.

Evidently, $X(1)\subset \mathrm{Conv}(X)\subset C(X)\subset \mathrm{Comp}(X)$.

In the case of X being a subset of an n-dimensional Euclidean space E^n of importance will be also the hyperspace

$$\overset{+}{\mathrm{Conv}}(X)=\{A\in \mathrm{Conv}(X)\colon\ \mathrm{Int}(A)\neq 0\}.$$

Recall that a subset A of X is called *convex* if, given any two points a and b of A, the set A contains a metric segment joining a and b (not necessarily one only). If for every two points a and b of A, the set A contains exactly one metric segment joining a and b, A is called *strongly convex*.

As is well known (cf. [13], pp. 87–89), a complete metric space X is convex if and only if for every two points a and b of A there exists a point $c\in X$ which lies between a and b (i.e., $\varrho(a,c)+\varrho(c,b)=\varrho(a,b)$) and is distinct from both a and b. This result will be applied below several times without reference.

Each hyperspace of X will be considered as a metric space with the Hausdorff metric ϱ^1 defined by the formula ([7], p. 291, see also [11], I, p. 106).

$$\varrho^1(A,B)=\max[\sup_{a\in A}\varrho(a,B),\ \sup_{b\in B}\varrho(A,b)], \tag{1}$$

where $\varrho(x,Z)=\inf\limits_{z\in Z}\varrho(x,z)$.

Formula (1) is easily equivalent to the formula

$$\varrho^1(A,B)=\inf\{\eta\geqslant 0\colon\ A\subset Q(B,\eta)\ \text{and}\ B\subset Q(A,\eta)\}, \tag{2}$$