[3] C. Kuratowski, *Sur une généralisation de la notion d'homéomorphie*, Fund. Math. 22 (1934), pp. 206–220.

[4] — *Topologie* I, Warszawa 1933.

[5] N. Lusin, *Sur les propriétés des fonctions mesurables*, C. R. Acad. Sci. Paris 154 (1912), pp. 1688–1690.

[6] H. M. Shaerf, *On the continuity of measurable functions*, Portugaliae Math. 6 (1947), pp. 33–44.

[7] W. Sierpiński, *Démonstration de quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions mesurables*, Fund. Math. 3 (1922), p. 319.

PURDUE UNIVERSITY
Lafayette, Indiana

Reçu par la Rédaction le 14. 8. 1967

Une application de la méthode de Fraenkel – Mostowski

par

Maurice Boffa* (Bruxelles)

1. Préliminaires.

1.1. Résumons d'abord certains résultats développés dans [1] et dont nous ferons usage dans la suite. A cet effet, considérons les axiomes A, B, C, D, E de Gödel [3] et plaçons-nous dans le système axiomatique (ABC). Appelons *univers* toute classe U telle que $\mathfrak{P}U = U$, où $\mathfrak{P}U$ désigne la classe des sous-ensembles de U. Par exemple, *l*'univers V (la classe de tous les ensembles) est *un* univers. On peut montrer que toute classe X est contenue dans un plus petit univers $U(X)$. Pour toute classe *transitive* A (c-à-d telle que $A \subset \mathfrak{P}A$) on peut établir les principes suivants:

(a) *Principe d'induction dans* $U(A)$:

Si $\Phi(x)$ *est une formule prédicative et si* y *ne figure pas dans* $\Phi(x)$, *alors*

$$\big[(\forall x)_A \Phi(x) \wedge (\forall x)_{U(A)-A}\big((\forall y)_x \Phi(y) \Rightarrow \Phi(x)\big)\big] \Rightarrow (\forall x)_{U(A)}\Phi(x). \text{ (1)}$$

(b) *Principe de récursion dans* $U(A)$:

Si $F_1\colon V \to V$ *et* $F_2\colon V \to V$, *alors il existe une et une seule fonction* $F\colon U(A) \to V$ *telle que*

$$F`x = \begin{cases} F_1`x & si \quad x \in A, \\ F_2`F``x & si \quad x \in U(A)-A. \text{ (2)} \end{cases}$$

1.2. Notons N l'axiome de von Neumann: "Toute classe propre est équipotente à l'univers V" et posons $K = \{x|\ x = \{x\}\}$. Nous savons que si le système (ABC) est consistant, alors le système (ABCNPr(K)) (3) l'est également (voir [2]). Mais dans ce dernier système, la classe $U(K)$

* Aspirant du F.N.R.S.

(1) $(\forall x)_A \Phi(x)$ est une abréviation de $(\forall x)(x \in A \Rightarrow \Phi(x))$.

(2) Remarque importante: la fonction F peut être *construite* à l'aide d'une *formule prédicative*.

(3) Pr(K) affirme que K est une classe propre.

détermine un modèle supercomplet (au sens de Shepherdson [5]) du système

$$\mathrm{S} = (\mathrm{ABCN}\ \mathrm{Pr}(K)\ U(K) = V),$$

ce qui prouve la consistance de S relativement à (ABC).

1.3. Soit T un système de la forme (ABC...). Nous dirons que T est *compressif* s'il existe une formule prédicative $\Phi(x, X)$ telle que la formule suivante soit démontrable dans T:

$$(\nabla X)(X \neq 0 \Rightarrow \{x \in X \mid \Phi(x, X)\} \text{ est un ensemble non vide}).$$

Par exemple, en s'inspirant de [4], on remarque que le système (ABCD) est compressif; il suffit de poser

$$\Phi(x, X) \Leftrightarrow (\nabla y \in X)(\varrho x \leqslant \varrho y),$$

où ϱx désigne le rang de x.

Nous montrerons plus loin que le système (ABC) n'est pas compressif.

1.4. Nous dirons qu'une classe X est *décomposable* lorsqu'on peut la décomposer en deux classes propres disjointes Y et Z:

$$\mathrm{Déc}(X) \Leftrightarrow (\exists YZ)\big(\mathrm{Pr}(Y) \wedge \mathrm{Pr}(Z) \wedge Y \cap Z = 0 \wedge X = Y \cup Z\big).$$

Une classe qui n'est pas décomposable sera dite *indécomposable*. Dans la suite nous utiliserons le

LEMME. *Soit* T *un système de la forme* (ABC...). *Si* T *est compressif, alors on peut démontrer dans* T *que toute classe propre est décomposable.*

Démonstration. Plaçons-nous dans le système T. Par hypothèse, il existe une formule prédicative $\Phi(x, X)$ nous permettant de comprimer toute classe non vide X en un ensemble non vide $E(X) = \{x \in X \mid \Phi(x, X)\}$. Pour toute classe propre P, considérons la fonction F définie récursivement par

$$F`\alpha = E(P - \bigcup F``\alpha) \qquad (\alpha \in On).$$

Il est clair que

(a) pour tout ordinal α, $F`\alpha$ est un sous-ensemble non vide de P;
(b) si α et β sont des ordinaux distincts, alors $F`\alpha$ et $F`\beta$ sont disjoints.

Il en résulte qu'on peut décomposer P en deux classes propres disjointes de la façon suivante:

$$P = (\bigcup_{\alpha \in On} F`\alpha{+}1) \cup (P - \bigcup_{\alpha \in On} F`\alpha{+}1). \qquad \text{CQFD.}$$

Au paragraphe suivant, nous montrerons que dans le système (ABC) il est consistant de supposer que K est une classe propre indécomposable.

2. Construction d'un modèle dans lequel K est une classe propre indécomposable. Plaçons-nous dans le système S introduit plus haut (voir 1.2). Soit R une bijection de On sur K et notons $P_{\alpha\beta}$ la permutation de K qui transpose $R`\alpha$ et $R`\beta$. Grâce au principe de récursion dans $U(K)(=V)$, il existe (pour tout $\alpha, \beta \in On$) une et une seule fonction $J_{\alpha\beta}$: $V \to V$ telle que

$$J_{\alpha\beta}`x = \begin{cases} P`_{\alpha\beta}x & \text{si} \quad x \in K, \\ J``_{\alpha\beta}x & \text{si} \quad x \notin K. \end{cases}$$

Montrons que $J_{\alpha\beta}$ est un *ϵ-automorphisme* c-à-d une permutation de l'univers telle que pour tout x: $J`_{\alpha\beta}x = J``_{\alpha\beta}x$. Cette égalité résulte immédiatement de la définition de $J_{\alpha\beta}$. Pour prouver que $J_{\alpha\beta}$ est une permutation de l'univers, il suffit d'appliquer le principe d'induction dans $U(K)(=V)$ successivement à

$$\Phi_1(x)\colon\ J`_{\alpha\beta}x \in K \Rightarrow x \in K,$$

$$\Phi_2(x)\colon\ (\nabla z)(J`_{\alpha\beta}x = J`_{\alpha\beta}z \Rightarrow x = z),$$

$$\Phi_3(x)\colon\ (\exists z)(x = J`_{\alpha\beta}z).$$

Cela étant, posons

$$\Psi(X) \Leftrightarrow (\exists\alpha)(\nabla\beta\gamma \geqslant \alpha)(J``_{\beta\gamma}X = X)$$

et considérons le modèle complet (au sens de Shepherdson [5]) suivant:

$$\mathcal{M} \begin{cases} \mathrm{Cls}_m(X) \Leftrightarrow \Psi(X), \\ M_m(X) \Leftrightarrow M(X), \\ X \epsilon_m Y \Leftrightarrow X \epsilon Y \wedge \Psi(Y). \end{cases}$$

On a le

THÉORÈME. *$\mathcal{M}$ est un modèle de* (ABC) *dans lequel K est une classe propre indécomposable.*

Démonstration. A l'aide du principe d'induction dans $U(K)$, on démontre aisément

$\mathrm{A1}_m$: $(\nabla x)\Psi(x)$.

Il en résulte que $x \epsilon_m y \Leftrightarrow x \epsilon y$, de sorte que les axiomes purement ensemblistes (c-à-d dans lesquels ne figure aucune variable majuscule) sont invariants:

$\mathrm{A4}_m \Leftrightarrow \mathrm{A4}$, $\mathrm{C1}_m \Leftrightarrow \mathrm{C1}$, $\mathrm{C2}_m \Leftrightarrow \mathrm{C2}$, $\mathrm{C3}_m \Leftrightarrow \mathrm{C3}$.

$\mathrm{A2}_m$ et $\mathrm{A3}_m$ sont immédiats.

$\mathrm{B1}_m - \mathrm{B8}_m$ résultent facilement du fait que les $J_{\beta\gamma}$ sont des ϵ-automorphismes.

$\mathrm{C4}_m$ résulte immédiatement de C4.

$\mathcal{M}$ est donc un modèle de (ABC).

Dans ce modèle, K est évidemment une classe propre. Si elle y était décomposable, il existerait deux classes propres disjointes K_1 et K_2 telles que

$$K = K_1 \cup K_2 \wedge \Psi(K_1) \wedge \Psi(K_2)\,,$$

donc il existerait un ordinal α tel que pour tout $\beta, \gamma \geqslant \alpha$:

$$J_{\beta\gamma}^{\text{``}} K_1 = K_1\,.$$

Mais K_1 et K_2 étant propres, il devrait exister des ordinaux $\beta_0, \gamma_0 \geqslant \alpha$ tels que $R`\beta_0 \in K_1$ et $R`\gamma_0 \in K_2$, d'où

$$J_{\beta_0\gamma_0}^{\text{``}} K_1 \neq K_1\,,$$

ce qui est absurde.

Remarque. Toute formule *purement ensembliste* Φ est invariante: $\Phi_m \Leftrightarrow \Phi$. Il en résulte que l'axiome du choix local E_l ("Tout ensemble admet une fonction-choix") est vrai dans $\mathcal{M}$. Il est cependant aisé de vérifier que l'axiome du choix universel E est faux dans $\mathcal{M}$.

COROLLAIRE. *Si le système* (ABC) *est consistant, alors* (ABC) *et* (ABC E_l) *sont des systèmes non compressifs dans lesquels il est consistant de supposer que K est une classe propre indécomposable.*

Travaux cités

[1] M. Boffa, *Induction et récursion en théorie des ensembles sans axiome de fondement*, Fund. Math., 66 (1970), p. 241–253.

[2] — *Graphes extensionnels et axiome d'universalité*, Zeitschr. f. math. Logik u. Grundl. d. Math. 14 (1968), p. 329–334.

[3] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton, 1940.

[4] D. Scott, *Definitions by abstraction in axiomatic set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), p. 442.

[5] J. C. Shepherdson, *Inner models for set theory*, I, II, III, Journal of Symbolic Logic 16 (1951), p. 161–190; 17 (1952), p. 225–237; 18 (1953), p. 145–167.

Reçu par la Rédaction le 12. 3. 1968

Pointwise limits of sequences of functions

by

Coke S. Reed (Auburn, Alabama)

Each of Baire [6], Lebesgue [6], and Mazurkiewicz [3] has obtained characterizations of the class c_1 of functions which are pointwise limits of sequences from the class c_0 of continuous functions. In this paper, we obtain a theorem which (1) gives two new characterizations of c_1; (2) gives two characterizations of the class r_1 of functions which are pointwise limits of sequences from the class r_0 of continuous on the right functions; (3) gives two characterizations of the class j_1 of functions which are pointwise limits of sequences from the class j_0 of jump functions (A function f with domain $[0,1]$ is a *jump function* means that $f(0+)$ exists, $f(1-)$ exists, and for each x in $(0,1)$, $f(x+)$ and $f(x-)$ exist.); (4) has the following corollary: if $\{c_2\}\{r_2\}\{j_2\}$ denotes the class of functions which are pointwise limits of sequences of class $\{c_1\}\,\{r_1\}\,\{j_1\}$, then $c_1 \subset r_1 \subset j_1$, $c_1 \neq r_1 \neq j_1$, and $c_2 = r_2 = j_2$.

For simplicity, all functions discussed here will be real valued and have domain $[0,1]$. The number p will be said to be a {*condensation point*} {*limit point from the right*} {*limit point from the left*} of the set X if and only if each neighborhood of p contains {uncountably many points of X} {a point of X to the right of p} {a point of X to the left of p}. If X is a set, $\{\mathrm{con}(X)\}\ \{\mathrm{rt}(X)\}\ \{\mathrm{lft}(X)\}$ will denote the union of X and the set of its {condensation points} {limit points from the right} {limit points from the left}. If G is a collection of sets, G^* will denote the union of the members of G.

THEOREM. *If f is a real-valued function defined on* $[0,1]$, *then*

$$\mathrm{I_A} \equiv \mathrm{II_A} \equiv \mathrm{III_A}\,, \qquad \mathrm{I_B} \equiv \mathrm{II_B} \equiv \mathrm{III_B}\,, \qquad \text{and} \qquad \mathrm{I_C} \equiv \mathrm{II_C} \equiv \mathrm{III_C}\,.$$

I. *f is the pointwise limit of a sequence from*

$$\{(\mathrm{A})\ c_0\} \quad \{(\mathrm{B})\ r_0\} \quad \{(\mathrm{C})\ j_0\}\,.$$

II. *If a and b are numbers $(a > b)$, then there exist sequences $T_1(a,b)$, $T_2(a,b)$, ... and $B_1(a,b)$, $B_2(a,b)$, ... such that:*

(1) *for each n, $T_n(a,b)$ and $B_n(a,b)$ are finite collections of*

{(A) *intervals*} {(B) *sects closed on the left*} {(C) *connected number sets*}

such that $[T_n(a,b)]^* \cap [B_n(a,b)]^* = \emptyset$,