Induction et récursion en théorie des ensembles sans axiome de fondement

par

Maurice Boffa * (Bruxelles)

Le cadre de ce travail est le système axiomatique de Gödel [2] comprenant les axiomes A, B et C [1].

Résumé. Nous prouvons d'abord que toute classe est contenue dans une plus petite classe saturée (c-à-d comprenant tous ses sous-ensembles) et dans un plus petit univers (classe saturée transitive). Nous démontrons ensuite que la fermeture saturée d'une classe est le siège de nouveaux principes d'induction et de récursion (4.1 et 4.2). La théorie ainsi élaborée conduit à un nouveau développement des notions suivantes: classe Π de von Neumann, classes ordinaires au sens de Mirimanoff, rang d'un ensemble ordinaire, nombres ordinaux, fonction Ψ de von Neumann, axiome de fondement, principes généraux d'induction et de récursion de Tarski (5.1–5.7). A l'aide d'une extension de la notion de rang, nous prouvons que la fermeture saturée d'une classe s'obtient à partir de celle-ci par une itération transfinie du foncteur $\mathcal{F}(Z) = Z \cup \mathfrak{S}Z$ (6.6–6.7). L'étude des classes génératrices (c-à-d dont la fermeture saturée est l'univers V) conduit à une généralisation du théorème de Iésenine–Volpine (7.7). Dans le paragraphe 8, nous démontrons qu'il existe au plus une base (classe génératrice transitive minimale), mais que l'existence d'au moins une base est indécidable. Dans le paragraphe 9, nous introduisons la notion d'intérieur transitif, à l'aide de laquelle nous établissons quelques formules d'itération.

1. Définitions

Posons

1.1. $\mathrm{Trans}(X) \Leftrightarrow X \subset \mathfrak{S}X$ (X est *transitive*),

1.2. $\mathrm{Trans}_A(X) \Leftrightarrow X - A \subset \mathfrak{S}X$ (X est *A-transitive*),

---

* Aspirant du F.N.R.S.

[1] Nous le noterons (ABC).

1.3. $\mathrm{Sat}(X) \Leftrightarrow \mathfrak{I}X \subset X$ (X est *saturée*),

1.4. $\mathrm{Univ}(X) \Leftrightarrow \mathfrak{I}X = X$ (X est *un univers*).

Il est bien connu que toute classe X est contenue dans une plus petite classe transitive $T(X)$ (la *fermeture transitive* de X) et que si X est un ensemble, alors $T(X)$ est aussi un ensemble. Puisque toute classe transitive est A-transitive et comme toute intersection ou toute réunion de classes A-transitives est encore A-transitive, il est facile de montrer que toute classe X est contenue dans une plus petite classe A-transitive $T_A(X)$ (la *fermeture A-transitive* de X) et que si X est un ensemble, alors $T_A(X)$ est aussi un ensemble. Il suffit de poser successivement:

$$T_A(x) = \bigcap \{y \mid x \subset y \wedge \mathrm{Trans}_A(y)\}\,,$$

$$T_A(X) = \bigcup \{T_A(\{x\}) \mid x \in X\}\,.$$

Remarquons que $T_A(X) \subset T(X)$.

Cela étant, nous allons montrer que toute classe X est contenue dans une plus petite classe saturée $S(X)$ (la *fermeture saturée* de X) et dans un plus petit univers $U(X)$ (*l'univers engendré* par X). Remarquons qu'à cause du théorème de Cantor, $S(X)$ et $U(X)$ doivent être des classes propres. Intuitivement, $S(X)$ est l'intersection de toutes les classes saturées contenant X, mais cette définition n'est pas directement formalisable dans le système axiomatique (ABC), car elle n'est pas prédicative (c-à-d qu'elle nécessite une quantification sur une variable majuscule, ceci à cause du fait que toute classe saturée est une classe propre). Mais nous pouvons facilement la modifier de façon à la rendre prédicative, par exemple en définissant $S(X)$ comme l'intersection de toutes les classes saturées *de la forme* $-y$ qui contiennent X, ce qui revient à poser

$$S(X) = -\bigcup \{y \mid \mathrm{Sat}(-y) \wedge X \subset -y\}\,.$$

C'est cette définition, légèrement transformée, que nous allons adopter, en posant:

1.5. $\mathrm{Rég}(X) \Leftrightarrow \neg\,\mathrm{Sat}(-X)$ (X est *régulière*).

1.6. $S(X) = \big\{x \mid (\forall y)\big((x \in y \wedge \neg\,\mathrm{Rég}(y)) \Rightarrow y \cap X \neq 0\big)\big\}$.

Cela étant, on peut définir $U(X)$ en posant simplement

1.7. $U(X) = S\big(T(X)\big)$.

2. Propriétés de $S(X)$

2.1. $\mathrm{Rég}(X) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in X \wedge x \cap X = 0)$.

2.2. $X \subset S(X)$.

2.3. $\mathrm{Sat}\big(S(X)\big)$. Démonstration: Supposons que $x \in \mathfrak{I}S(X)$ et soit y un ensemble non régulier comprenant x. Il faut prouver que $y \cap X \neq 0$.

Puisque y est non régulier, on a $x \cap y \neq 0$, donc il existe un x' tel que $x' \in x$ et $x' \in y$, d'où $x' \in S(X)$ et $x' \in y$, d'où $y \cap X \neq 0$.

2.4. $\mathrm{Pr}\big(S(X)\big)$.

2.5. $\mathrm{Trans}_X\big(S(X)\big)$. Démonstration: Soit $y \in x \in S(X) - X$ et montrons que $y \in S(X)$. Pour tout ensemble non régulier z comprenant y, $z \cup \{x\}$ est un ensemble non régulier comprenant x, d'où $(z \cup \{x\}) \cap X \neq 0$, d'où $z \cap X \neq 0$.

2.6. $x \in S(X) \Leftrightarrow (\forall Y)\big((x \in Y \wedge \neg\,\mathrm{Rég}(Y)\big) \Rightarrow Y \cap X \neq 0)$. Démonstration: Il suffit de prouver l'implication de gauche à droite. Si $x \in S(X)$ et si Y est une classe non régulière comprenant x, alors $Y \cap T(\{x\})$ est un *ensemble* non régulier comprenant x, d'où $\big(Y \cap T(\{x\})\big) \cap X \neq 0$, d'où $Y \cap X \neq 0$.

2.7. $(Y \subset S(X) \wedge \neg\,\mathrm{Rég}(Y) \wedge Y \cap X = 0) \Rightarrow Y = 0$.

2.8. $\big(X \subset Y \wedge \mathrm{Sat}(Y)\big) \Rightarrow S(X) \subset Y$. Démonstration: Si Y est une classe saturée contenant X, alors $S(X) - Y$ est non régulière. En effet, s'il existait un $x \in S(X) - Y$ tel que $x \cap \big(S(X) - Y\big) = 0$, alors $x \in S(X) - X$, d'où $x \subset S(X)$, d'où $x \subset Y$, d'où $x \in Y$, ce qui est absurde. Grâce à 2.7 il vient $S(X) - Y = 0$, d'où $S(X) \subset Y$.

2.9. *$S(X)$ est la plus petite classe saturée contenant X.* Démonstration: 2.2, 2.3 et 2.8.

2.10. $\mathrm{Sat}(X) \Leftrightarrow S(X) = X$.

2.11. $S\big(S(X)\big) = S(X)$.

2.12. $X \subset Y \Rightarrow S(X) \subset S(Y)$.

2.13. $\mathrm{Trans}(X) \Rightarrow \mathrm{Trans}\big(S(X)\big)$. Démonstration: Supposons X transitive et soit $x' \in x \in S(X)$. Si $x \in X$, alors $x' \in X$, d'où $x' \in S(X)$. Si $x \notin X$, alors $x \subset S(X)$, d'où $x' \in S(X)$.

2.14. $\mathrm{Trans}(X) \Rightarrow \mathrm{Univ}\big(S(X)\big)$.

3. Propriétés de $U(X)$

3.1. $X \subset U(X)$. Démonstration: $X \subset T(X) \subset S\big(T(X)\big) = U(X)$.

3.2. $\mathrm{Univ}\big(U(X)\big)$. Démonstration: 2.14.

3.3. $\mathrm{Pr}\big(U(X)\big)$.

3.4. $\big(X \subset Y \wedge \mathrm{Univ}(Y)\big) \Rightarrow U(X) \subset Y$. Démonstration: Si Y est un univers contenant X, alors (Y étant transitive) $T(X) \subset Y$, d'où (Y étant saturée) $S\big(T(X)\big) \subset Y$.

3.5. *$U(X)$ est le plus petit univers contenant X.*

3.6. $\mathrm{Univ}(X) \Leftrightarrow U(X) = X$.

3.7. $U\big(U(X)\big) = U(X)$.

3.8. $X \subset Y \Rightarrow U(X) \subset U(Y)$.

3.9. $\mathrm{Trans}(X) \Rightarrow U(X) = S(X)$.

3.10. $U(X) = U\big(T(X)\big)$.

3.11. $X \subset T(X) \subset U(X)$.

3.12. $S(X) \subset U(X)$.

4. Induction et récursion dans $S(X)$

4.1. Principe d'induction dans $S(X)$. *Si $\Phi(x)$ est une formule prédicative et si y ne figure pas dans $\Phi(x)$, alors*

$$\big[(\forall x)_X \Phi(x) \wedge (\forall x)_{S(X)-X}\big((\forall y)_x \Phi(y) \Rightarrow \Phi(x)\big)\big] \Rightarrow (\forall x)_{S(X)} \Phi(x)\,.\ (^2)$$

Démonstration: Soit $Y = \{x \in S(X) |\ \Phi(x)\}$. Si $(\forall x)_X \Phi(x)$, alors $X \subset Y$ et si, de plus, $(\forall x)_{S(X)-X}\big((\forall y)_x \Phi(y) \Rightarrow \Phi(x)\big)$, alors $\mathrm{Sat}(Y)$, d'où $S(X) \subset Y$, d'où $(\forall x)_{S(X)} \Phi(x)$.

4.2. Principe de récursion dans $S(X)$. *Si F_1: $V \to V$ et F_2: $V \to V$ alors, pour toute classe X, il existe une et une seule fonction F: $S(X) \to V$ telle que*

$$\begin{cases} F`x = F_1`x & si\ x \in X\,, \\ F`x = F_2`(F|x) & si\ x \in S(X) - X\,.\ (^3) \end{cases}$$

Démonstration: Soit P la classe de tous les sous-ensembles X-transitifs p de $S(X)$ pour lesquels il existe une et une seule fonction f: $p \to V$ telle que

$$\begin{cases} f`x = F_1`x & \text{si } x \in p \cap X\,, \\ f`x = F_2`(f|x) & \text{si } x \in p - X\,. \end{cases}$$

Il est clair que tout sous-ensemble de X appartient à P, de sorte que $\bigcup P$ est une classe X-transitive telle que

$$X \subset \bigcup P \subset S(X)\,.$$

Par définition, chaque élément p de P détermine une fonction f que nous appellerons la fonction associée à p. Si f_1 et f_2 désignent les fonctions associées respectivement aux éléments p_1 et p_2 de P, alors l'ensemble

$$y = \{x |\ x \in p_1 \cap p_2 \wedge f_1`x \neq f_2`x\}$$

est une partie non régulière de $S(X)$ telle que $y \cap X = 0$, d'où $y = 0$, ce qui prouve que $f_1`x = f_2`x$ pour tout $x \in p_1 \cap p_2$. Il en résulte que la

(2) $(\forall x)_X \Phi(x)$ est une abréviation de $(\forall x)(x \in X \Rightarrow \Phi(x))$.

(3) $F|x$ désigne la restriction de F à x, c-à-d $F \cap (x \times V)$.

réunion de toutes les fonctions associées aux éléments de P est la fonction F: $\bigcup P \to V$ telle que

$$\begin{cases} F`x = F_1`x & \text{si } x \in X\,, \\ F`x = F_2`(F|x) & \text{si } x \in \bigcup P - X\,. \end{cases}$$

(L'unicité de F résulte de l'unicité de la restriction de F à p pour tout $p \in P$).

Il nous reste à montrer que $\bigcup P = S(X)$. Pour cela, il suffit de prouver que $\bigcup P$ est saturée. S'il existait un $a \subset \bigcup P$ tel que $a \notin \bigcup P$, alors $a \in S(X) - \bigcup P$ et $T_X(a) \subset \bigcup P$, donc $T_X(a) \cup \{a\}$ serait un sous-ensemble X-transitif de $S(X)$ admettant la fonction associée

$$f\colon\ T_X(a) \cup \{a\} \to V\colon\ x \to f`x = \begin{cases} F`x & \text{si } x \in T_X(a)\,, \\ F_2`(F|a) & \text{si } x = a\,, \end{cases}$$

d'où $T_X(a) \cup \{a\} \in P$, d'où $a \in \bigcup P$, ce qui est absurde.

4.3. Si F_1: $V \to V$ et F_2: $V \to V$, alors, pour toute classe X et toute classe $A \supset X$, il existe une et une seule fonction F: $S(X) \to V$ telle que

$$\begin{cases} F`x = F_1`x & \text{si } x \in A \cap S(X)\,, \\ F`x = F_2`(F|x) & \text{si } x \in S(X) - A\,. \end{cases}$$

Démonstration. Ayant $S\big(A \cap S(X)\big) = S(X)$, il suffit d'appliquer 4.2 à la classe $A \cap S(X)$.

4.4. Remarque. Soit F_3: $V \to V$. Il est clair que 4.2 et 4.3 restent valables lorsqu'on y remplace $F|x$ par $F_3`(F|x)$. En particulier, on peut y remplacer $F|x$ par $F``x$.

5. Applications

Il est utile de remarquer que la théorie que nous venons d'élaborer ne présuppose qu'un développement très limité du système axiomatique (ABC): notions élémentaires sur les classes et les fonctions, nombres naturels (ces derniers n'apparaissent pas explicitement dans la théorie, mais ils interviennent dans l'élaboration de la notion de fermeture transitive). Par exemple, elle ne présuppose pas la notion de nombre ordinal. Nous croyons intéressant de montrer (sans entrer dans les détails) comment cette théorie nous permet de fonder d'une manière nouvelle divers concepts classiques de la théorie des ensembles.

5.1. La classe Π. La classe Π de von Neumann (définie classiquement à l'aide d'une itération transfinie du foncteur $\mathfrak{P}$) peut être définie en posant

$$\Pi = S(0)\,.$$

Π est donc à la fois la plus petite classe saturée et le plus petit univers.

5.2. Les classes ordinaires. On peut introduire les classes ordinaires (au sens de Mirimanoff [4]) en posant

$$\mathrm{Ord}(X) \Longleftrightarrow X \subset \Pi \qquad (X \text{ est } \textit{ordinaire}).$$

Puisque Π est un univers, on a immédiatement

$$\mathrm{Ord}(x) \Longleftrightarrow x \in \Pi, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{Ord}(X) \Longleftrightarrow (\nabla x)_X \mathrm{Ord}(x).$$

Grâce à 1.6 et 2.6, on a

$$\mathrm{Ord}(x) \Longleftrightarrow (\nabla y)\big(x \in y \Rightarrow \mathrm{Rég}(y)\big) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ord}(x) \Longleftrightarrow (\nabla Y)\big(x \in Y \Rightarrow \mathrm{Rég}(Y)\big).$$

En accord avec la terminologie de Mirimanoff, nous poserons

$$\mathrm{Extra}(X) \Longleftrightarrow \neg\,\mathrm{Ord}(X) \qquad (X \text{ est } \textit{extraordinaire}).$$

5.3. Induction et récursion dans Π. Grâce à 4.1–4.3 on peut immédiatement énoncer les principes suivants:

a. **Principe d'induction dans Π:** *Si $\Phi(x)$ est une formule prédicative et si y ne figure pas dans $\Phi(x)$, alors*

$$(\nabla x)_\Pi\big((\nabla y)_x \Phi(y) \Rightarrow \Phi(x)\big) \Rightarrow (\nabla x)_\Pi \Phi(x).$$

b. **Principe de récursion dans Π:** *Si F_0: $V \to V$, alors il existe une et une seule fonction F: $\Pi \to V$ telle que, pour tout $x \in \Pi$,*

$$F`x = F_0`(F|x).$$

c. *Si F_1: $V \to V$ et F_2: $V \to V$, alors, pour toute classe A, il existe une et une seule fonction F: $\Pi \to V$ telle que*

$$\begin{cases} F`x = F_1`x & \textit{si } x \in A \cap \Pi, \\ F`x = F_2`(F|x) & \textit{si } x \in \Pi - A. \end{cases}$$

Suite à la remarque 4.4, les deux derniers principes restent valables lorsqu'on y remplace $F|x$ par $F_3`(F|x)$ et en particulier par $F``x$.

5.4. Rang d'un ensemble ordinaire. Grâce au principe de récursion dans Π, on peut, à la manière de Tarski [6], définir le rang d'un ensemble ordinaire en posant

$$\varrho`x = T(\varrho``x) \qquad \text{pour tout } x \in \Pi.$$

5.5 Les nombres ordinaux. Comme l'a remarqué Tarski [6], on peut introduire la classe On des nombres ordinaux en posant

$$On = \{x \in \Pi \mid \varrho`x = x\}.$$

Les principes d'induction et de récursion transfinies résultent facilement des principes d'induction et de récursion dans Π.

5.6. La fonction Ψ. Pour tout nombre ordinal a, considérons la classe

$$\Psi(a) = \{x \in \Pi \mid \varrho`x < a\}.$$

Des propriétés du rang, il résulte que

$$\begin{cases} \Psi(0) = 0, & \\ \Psi(a+1) = \mathfrak{P}\Psi(a) & \text{pour tout ordinal } a, \\ \Psi(\lambda) = \bigcup_{a \in \lambda} \Psi(a) & \text{pour tout ordinal limite } \lambda. \end{cases}$$

Nous en déduisons par induction transfinie que pour tout ordinal a, $\Psi(a)$ est un ensemble, ce qui nous permet de définir la *fonction* Ψ de von Neumann en posant

$$\Psi\colon On \to \Pi\colon a \to \Psi`a = \Psi(a).$$

On retrouve comme théorème immédiat, la définition classique de Π, à savoir

$$\Pi = \bigcup \Psi``On.$$

5.7. L'axiome de fondement. En vertu de 2.1, l'axiome de fondement D peut s'écrire

$$(\nabla X)\big(X \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Rég}(X)\big), \qquad \text{ou} \qquad (\nabla Y)\big(\mathrm{Sat}(Y) \Rightarrow Y = V\big),$$

ou encore

$$V = \Pi.$$

L'axiome D implique donc les principes suivantes (dus à Tarski [5]):

a. **Principe d'induction sous l'hypothèse D:** *Si $\Phi(x)$ est une formule prédicative et si y ne figure pas dans $\Phi(x)$, alors*

$$(\nabla x)\big((\nabla y)_x \Phi(y) \Rightarrow \Phi(x)\big) \Rightarrow (\nabla x)\Phi(x).$$

b. **Principe de récursion sous l'hypothèse D:** *Si F_0: $V \to V$, alors il existe une et une seule fonction F: $V \to V$ telle que pour tout x,*

$$F`x = F_0`(F|x).$$

c. *Si F_1: $V \to V$ et F_2: $V \to V$, alors, pour toute classe A, il existe une et une seule fonction F: $V \to V$ telle que*

$$\begin{cases} F`x = F_1`x & \textit{si } x \in A, \\ F`x = F_2`(F|x) & \textit{si } x \notin A. \end{cases}$$

Comme d'habitude, les deux derniers principes restent valables lorsqu'on y remplace $F|x$ par $F_3`(F|x)$ et en particulier par $F``x$.

6. Rang sur une classe quelconque

Le principe de récursion dans $S(X)$ nous permet de poser la définition suivante

6.1. *ϱ_X est la fonction de $S(X)$ dans V telle que*

$$\begin{cases} \varrho_X\text{‘}x = 0 & si\ x \in X\,, \\ \varrho_X\text{‘}x = \{0\} \cup T(\varrho_X\text{‘‘}x) & si\ x \in S(X)-X\,. \end{cases}$$

A l'aide du principe d'induction dans $S(X)$, on démontre aisément:

6.2. $(\forall x)_{S(X)}(\varrho_X\text{‘}x \in On)$.

Pour tout $x \in S(X)$, nous dirons que $\varrho_X\text{‘}x$ est le *rang de x sur X*. On a clairement:

6.3. $(\forall x)_{S(X)}(\varrho_X\text{‘}x = 0 \Leftrightarrow x \in X)$

et

6.4. Pour tout $x \in S(X)-X$, le rang (sur X) de x est le plus petit ordinal *non nul* strictement supérieur aux rangs (sur X) des éléments de x.

Pour tout ordinal α, posons

6.5. $\Psi_X(\alpha) = \{x \in S(X) |\ \varrho_X\text{‘}x < \alpha\}$.

A l'aide de 6.3 et 6.4, on démontre facilement

6.6. $$\begin{cases} \Psi_X(0) = 0\,, & \\ \Psi_X(1) = X\,, & \\ \Psi_X(\alpha+1) = \Psi_X(\alpha) \cup \mathfrak{P}\Psi_X(\alpha) & \text{pour tout ordinal } \alpha \neq 0\,, \\ \Psi_X(\lambda) = \bigcup\limits_{\alpha\in\lambda} \Psi_X(\alpha) & \text{pour tout ordinal limite } \lambda\,, \end{cases}$$

et on a trivialement

6.7. $S(X) = \bigcup\limits_{\alpha \in On} \Psi_X(\alpha)$.

On peut encore démontrer les propositions suivantes:

6.8. $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \Psi_X(\alpha) \subset \Psi_X(\beta)$.

6.9. $X \subset Y \Rightarrow \Psi_X(\alpha) \subset \Psi_Y(\alpha)$.

6.10. $\mathrm{Trans}_X\big(\Psi_X(\alpha)\big)$.

6.11. $M(X) \Rightarrow M\big(\Psi_X(\alpha)\big)$.

Pour tout ensemble x, on peut donc définir la *fonction*

$$\Psi_x\colon On \to S(X)\colon \alpha \to \Psi_x\text{‘}\alpha = \Psi_x(\alpha)\,.$$

On a

6.12. $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \Psi_x\text{‘}\alpha \subsetneqq \Psi_x\text{‘}\beta$.

6.13. $S(x) = \bigcup \Psi_x\text{‘‘}On$.

6.14. $\varrho = \varrho_{\{0\}}$ et $\Psi = \Psi_{\{0\}}$.

7. Classes génératrices

Posons

7.1. $\text{Gén}(X) \Leftrightarrow S(X) = V$ (X est *génératrice*).

Grâce à 1.6 et 2.6, on a

7.2. $\text{Gén}(X) \Leftrightarrow (\forall x)\big((x \neq 0 \wedge \neg\,\text{Rég}(x)) \Rightarrow x \cap X \neq 0\big)$,

7.3. $\text{Gén}(X) \Leftrightarrow (\forall Y)\big((Y \neq 0 \wedge \neg\,\text{Rég}(Y)) \Rightarrow Y \cap X \neq 0\big)$.

Posons

7.4. $$\begin{cases} D_X \Leftrightarrow (\forall Y)\big(Y \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(y \in Y \wedge y \cap Y \subset X)\big), \text{(4)} \\ D'_X \Leftrightarrow (\forall x)\big(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge y \cap x \subset X)\big). \end{cases}$$

On a

7.5. $\text{Gén}(X) \Leftrightarrow D_X$. Démonstration: a. Supposons que l'on ait D_X et soit x un ensemble non vide et non régulier. Il existe alors un $y \in x$ tel que $0 \neq y \cap x \subset X$, d'où $x \cap X \neq 0$.

b. Supposons que l'on ait $\text{Gén}(X)$ et $\neg D_X$. Il existerait alors une classe non vide Y telle que $(\forall y)(y \in Y \Rightarrow y \cap Y \not\subset X)$, d'où $Y-X \neq 0$ et $\neg\,\text{Rég}(Y-X)$, d'où $(Y-X) \cap X \neq 0$, ce qui est absurde.

7.6. $\text{Gén}(X) \Leftrightarrow D'_X$. Démonstration: L'implication de droite à gauche se démontre comme en 7.5. L'implication réciproque résulte immédiatement de 7.5.

7.5 et 7.6 impliquent

7.7. $D_X \Leftrightarrow D'_X$.

En particulier, on retrouve le théorème de Iésenine-Volpine: $D_0 \Leftrightarrow D'_0$.

7.8. $\text{Gén}(X)$ implique les principes suivants:

a. **Principe d'induction sous l'hypothèse** $\text{Gén}(X)$: *Si $\Phi(x)$ est une formule prédicative et si y ne figure pas dans $\Phi(x)$, alors*

$$\big[(\forall x)_X\Phi(x) \wedge (\forall x)_{-X}\big((\forall y)_x\Phi(y) \Rightarrow \Phi(x)\big)\big] \Rightarrow (\forall x)\Phi(x)\,.$$

b. **Principe de récursion sous l'hypothèse** $\text{Gén}(X)$: *Si $F_1\colon V \to V$ et $F_2\colon V \to V$, alors il existe une et une seule fonction $F\colon V \to V$ telle que*

$$\begin{cases} F\text{‘}x = F_1\text{‘}x & si\ x \in X\,, \\ F\text{‘}x = F_2\text{‘}(F|x) & si\ x \notin X\,. \end{cases}$$

(4) cf. P. Hájek [3], p. 151.

c. *Si* $F_1\colon V\to V$ *et* $F_2\colon V\to V$, *alors, pour toute classe* $A\supset X$, *il existe une et une seule fonction* $F\colon V\to V$ *telle que*

$$\begin{cases} F`x = F_1`x & \text{si } x\in A\,,\\ F`x = F_2`(F|x) & \text{si } x\notin A\,.\end{cases}$$

Comme d'habitude, les deux derniers principes restent valables lorsqu'on y remplace $F|x$ par $F_3`(F|x)$ et en particulier par $F``x$.

8. Base

Dans ce paragraphe, les lettres $A, B, A', B', \ldots$ désigneront exclusivement des classes *transitives*.

En vertu de 3.9 et 6.7, on a $U(A) = S(A) = \bigcup_{a\in On} \Psi_A(a)$.

A l'aide de 6.6, il vient

8.1. $\mathrm{Trans}(\Psi_A(a))$

d'où

8.2. $$\begin{cases} \Psi_A(0) = 0\,,\\ \Psi_A(1) = A\,,\\ \Psi_A(a+1) = \mathcal{T}\Psi_A(a) & \text{pour tout ordinal } a\neq 0\,,\\ \Psi_A(\lambda) = \bigcup_{a\in\lambda}\Psi_A(a) & \text{pour tout ordinal limite } \lambda\,,\end{cases}$$

d'où, par induction transfinie,

8.3. $\Psi_{A\cap B}(a) = \Psi_A(a)\cap\Psi_B(a)$

d'où, successivement:

8.4. $U(A\cap B) = U(A)\cap U(B)$;

8.5. $\big(B\subset U(A)\wedge \mathrm{Univ}(B)\big) \Rightarrow B = U(A\cap B)$;

8.6. $\big(B\subset U(A)\wedge\mathrm{Univ}(B)\big)\Rightarrow (\exists A')\big(A'\subset A\wedge B = U(A')\big)$.

Ces trois dernières propositions impliquent respectivement:

8.7. $\big(\mathrm{Gén}(A)\wedge\mathrm{Gén}(B)\big)\Rightarrow\mathrm{Gén}(A\cap B)$;

8.8. $\big(\mathrm{Gén}(A)\wedge\mathrm{Univ}(B)\big)\Rightarrow B = U(A\cap B)$;

8.9. $\big(\mathrm{Gén}(A)\wedge\mathrm{Univ}(B)\big)\Rightarrow(\exists A')\big(A'\subset A\wedge B = U(A')\big)$.

Posons

8.10. $\mathrm{Base}(B)\Leftrightarrow\mathrm{Gén}(B)\wedge(\forall A)\big((A\subset B\wedge\mathrm{Gén}(A))\Rightarrow A = B\big)$ (B est une *base*).

En d'autres termes, une base est une classe génératrice transitive *minimale* (pour l'inclusion).

En vertu de 8.7, on a

8.11. $\big(\mathrm{Base}(B)\wedge\mathrm{Gén}(A)\big)\Rightarrow B\subset A$, ce qui prouve qu'une base est une classe génératrice transitive *minimum*, d'où:

8.12. Théorème d'unicité de la base. $(\exists B)\,\mathrm{Base}(B)\Rightarrow$ $\Rightarrow(\exists!\,B)\,\mathrm{Base}(B)$.

On démontre aisément:

8.13. Tout ensemble générateur transitif *fini* contient une base.

Cette proposition est fausse pour tout ensemble générateur transitif infini dénombrable $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ tel que $x_i = \{x_{i+1}\}$ pour tout $i\in\omega$. Comme l'existence d'un tel ensemble générateur est compatible avec les axiomes A, B et C ([5]), *ceux-ci* (supposés consistants) *ne permettent pas de démontrer l'existence d'une base. Mais l'existence d'une base est compatible avec ces axiomes*, car Base(0) équivaut à l'axiome de fondement. On peut démontrer que l'hypothèse Base (V) est compatible avec les axiomes A, B et C (cf. [7]).

9. Intérieur transitif

Posons

9.1. $I(X) = \bigcup\{x|\ x\subset X\wedge\mathrm{Trans}(x)\}$ (*intérieur transitif* de X).

On a clairement

9.2. $I(X)\subset X\wedge\mathrm{Trans}\big(I(X)\big)\wedge\big(X\subset Y\Rightarrow I(X)\subset I(Y)\big)$.

9.3. $\mathrm{Trans}(X)\Leftrightarrow I(X) = X$. Démonstration: Si X est transitive, alors $X = \bigcup_{x\in V}\big(X\cap T(\{x\})\big)\subset I(X)$, d'où $I(X) = X$. La réciproque résulte de 9.2.

9.2 et 9.3 impliquent:

9.4. $\big(Y\subset X\wedge\mathrm{Trans}(Y)\big)\Rightarrow Y\subset I(X)$.

$I(X)$ est donc *la plus grande sous-classe transitive de* X.

On a clairement

9.5. $x\in I(X)\Leftrightarrow T(\{x\})\subset X$,

d'où (grâce à l'égalité $T(\{x\}) = \{x\}\cup T(x)$)

9.6. $I(X) = \big\{x|\ x\in X\wedge(\forall y)\big(y\in T(x)\Rightarrow y\in X\big)\big\}$.

$I(X)$ est donc *la classe des ensembles appartenant héréditairement à* X.

Posons

9.7. $\mathcal{T}_X Y = X\cap\mathcal{T}Y$.

On a

9.8. $\mathcal{T}_X I(X) = I(X)$. Démonstration: Si $x\in\mathcal{T}_X I(X)$, alors $T(\{x\})\subset X$, d'où $x\in I(X)$, ce qui prouve que $\mathcal{T}_X I(X)\subset I(X)$. L'inclusion opposée est évidente.

([5]) cf. Bernays [1], p. 83.

Posons

9.9. $\Psi_{XY}(a) = \Psi_X(a) \cap I(Y)$.

6.6 et 9.8 impliquent

9.10. $$\begin{cases} \Psi_{XY}(0) = 0\,, & \\ \Psi_{XY}(1) = X \cap I(Y)\,, & \\ \Psi_{XY}(a+1) = \Psi_{XY}(a) \cup \mathcal{S}_Y \Psi_{XY}(a) & \text{pour tout ordinal } a \neq 0\,, \\ \Psi_{XY}(\lambda) = \bigcup_{a\in\lambda} \Psi_{XY}(a) & \text{pour tout ordinal limite } \lambda. \end{cases}$$

6.7 implique

9.11. $\bigcup_{a\in On} \Psi_{XY}(a) = S(X) \cap I(Y)$.

9.10 et 9.11 prouvent que *la classe $S(X) \cap I(Y)$ peut être obtenue à partir de la classe $X \cap I(Y)$ à l'aide d'une itération transfinie du foncteur $\mathcal{F}(Z) = Z \cup \mathcal{S}_Y Z$.*

Voici quelques cas particuliers de cette propriété:

a. *Si X est génératrice*, alors $I(Y)$ s'obtient à partir de $X \cap I(Y)$ à l'aide d'une itération transfinie du foncteur $\mathcal{F}(Z) = Z \cup \mathcal{S}_Y Z$. En bref:

$$I(Y) = Z \cup \mathcal{F}(Z) \cup \mathcal{F}(\mathcal{F}(Z)) \cup \ldots \cup \mathcal{F}^a(Z) \cup \ldots \qquad \text{avec } Z = X \cap I(Y)\,.$$

b. *Si X est transitive*, alors $\Psi_X(a)$ est transitive, donc $\Psi_{XY}(a)$ est une partie transitive de Y, d'où $\Psi_{XY}(a) \subset \mathcal{S}_Y \Psi_{XY}(a)$, ce qui prouve que $S(X) \cap I(Y)$ s'obtient à partir de $X \cap I(Y)$ à l'aide d'une itération transfinie du foncteur $\mathcal{S}_Y$:

$$S(X) \cap I(Y) = Z \cup \mathcal{S}_Y Z \cup \mathcal{S}_Y \mathcal{S}_Y Z \cup \ldots \cup \mathcal{S}_Y^a Z \cup \ldots$$
$$\text{avec } Z = X \cap I(Y)\,.$$

En particulier

$$S(0) \cap I(Y) = 0 \cup \mathcal{S}_Y 0 \cup \mathcal{S}_Y \mathcal{S}_Y 0 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_Y^a 0 \cup \ldots$$

c. *Si X est transitive et génératrice*, alors $I(Y)$ s'obtient à partir de $X \cap I(Y)$ à l'aide d'une itération transfinie du foncteur $\mathcal{S}_Y$:

$$I(Y) = Z \cup \mathcal{S}_Y Z \cup \mathcal{S}_Y \mathcal{S}_Y Z \cup \ldots \cup \mathcal{S}_Y^a Z \cup \ldots \qquad \text{avec } Z = X \cap I(Y)\,.$$

d. *Si X est une partie transitive de Y*, alors $X \subset I(Y)$, donc $S(X) \cap I(Y)$ s'obtient à partir de X à l'aide d'une itération transfinie de $\mathcal{S}_Y$:

$$S(X) \cap I(Y) = X \cup \mathcal{S}_Y X \cup \mathcal{S}_Y \mathcal{S}_Y X \cup \ldots \cup \mathcal{S}_Y^a X \cup \ldots$$

e. *Si X est une classe génératrice transitive incluse à Y*, alors $I(Y)$ s'obtient à partir de X à l'aide d'une itération transfinie de $\mathcal{S}_Y$:

$$I(Y) = X \cup \mathcal{S}_Y X \cup \mathcal{S}_Y \mathcal{S}_Y X \cup \ldots \cup \mathcal{S}_Y^a X \cup \ldots$$

f. *Si on admet l'axiome de fondement*, alors $I(Y)$ s'obtient à partir de l'ensemble vide à l'aide d'une itération transfinie du foncteur $\mathcal{S}_Y$:

$$I(Y) = 0 \cup \mathcal{S}_Y 0 \cup \mathcal{S}_Y \mathcal{S}_Y 0 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_Y^a 0 \cup \ldots$$

Bibliographie

[1] P. Bernays, *A system of axiomatic set theory*, VII. J. Symb. Logic. 19 (1954), pp. 81–96.

[2] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton 1940.

[3] P. Hájek, *Die durch die schwach inneren Relationen gegebenen Modelle der Mengenlehre*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. 10 (1964), pp. 151–157.

[4] D. Mirimanoff, *Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles*, L'Enseignement Math. 19 (1917), pp. 37–52.

[5] A. Tarski, *General principles of induction and recursion in axiomatic set theory* (Abstract), Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), pp. 442–443.

[6] — *The notion of rank in axiomatic set theory and some of its applications* (Abstract), ibidem p. 443.

[7] M. Boffa, *Sur la théorie des ensembles sans axiome de Fondement*, Bull. Soc. Math. Belg. 21 (1969) (à paraître).

Reçu par la Rédaction le 20. 8. 1968