Das Brown–McCoysche 0-Radikal für Algebren und seine Anwendung in der Theorie der Halbgruppen

von

Hans-Jürgen Hoehnke (Berlin)

Inhalt

Einleitung. In der allgemeinen Theorie der Radikale existieren gegenwärtig drei, sich teilweise überschneidende Richtungen: 1) Bei Radikalen, die durch explizite, auf einer Klasse von Algebren gegebenen Typs erklärte Formeln einer speziellen Prädikatenlogik oder als Funktionen mit gewissen funktionalen Eigenschaften definiert sind, erhebt sich die Frage nach der Struktur der radikalen (bzw. radikalfreien) Algebren. Ein Hilfsmittel bei diesen Untersuchungen ist die Modelltheorie. 2) Umgekehrt läßt sich zu einer gegebenen Klasse S von Algebren mit gewissen Eigenschaften ein Radikal definieren, so daß genau die Algebren aus S radikal (bzw. radikalfrei) sind. Läßt man hierbei die Frage nach einer expliziten Angabe der zu einem Radikal gehörigen Elemente außer acht, so können diese Untersuchungen auch mit kategorientheoretischen Methoden durchgeführt werden. 3) Weiter besteht noch die Möglichkeit, ein Radikal als Durchschnitt von Kernen gewisser Darstellungen einzuführen (vergl. [5], [6]). Diese drei Wege stehen auch offen, um spezielle Radikale, die für Algebren spezieller Typen bereits vorliegen, auf Algebren eines beliebigen Typs zu übertragen und so einheitlich zu definieren. Während A. Suliński [11] in dieser Weise das Brown–McCoysche Radikal nach der zweiten Methode verallgemeinert hat, soll dies hier auf dem ersten Wege geschehen. Außer im Fall der Gruppen und (assoziativen oder nicht-assoziativen) Ringe ist dabei nicht zu erwarten, daß beide Methoden zum gleichen Radikalbegriff führen. Als Anwendung soll der Fall der Halbgruppen näher untersucht werden.

1. Das F-Radikal. Es sei L eine gegenüber homomorphen Bildern abgeschlossene Klasse von Algebren eines gegebenen finitären Typs Ω und Λ die Klasse aller surjektiven Homomorphismen von Algebren aus L. Mit $C(A)$ werde der Kongruenzenverband einer Algebra $A \in L$ bezeichnet. Jede Kongruenz auf A wird als Teilmenge der Kreuzmenge $A \times A$ aufgefaßt. Für eine beliebige Teilmenge $S \subseteq A \times A$ und $\varphi = \varphi(A \to B) \in \Lambda$ sei

$$S\varphi \underset{\text{Def}}{=} \{(a\varphi, b\varphi), (a, b) \in S\}$$

und S^φ die von $S\varphi \subseteq B \times B$ auf B erzeugte Kongruenz. Für $T \subseteq B \times B$ sei

$$T\varphi^{-1} \underset{\text{Def}}{=} \{(a, b) \in A \times A, (a\varphi, b\varphi) \in T\}.$$

Wir nehmen an, jeder Algebra $A \in L$ sei eine Funktion $F\big(A \times A \to C(A)\big)$ zugeordnet. Das Paar $(a, b) \in A \times A$ soll F-regulär heißen, wenn $(a, b) \in F(a, b)$. Eine Teilmenge $S \subseteq A \times A$ heißt F-regulär, wenn jedes Paar $(a, b) \in S$ F-regulär ist. Über F sei weiterhin folgendes vorausgesetzt ($\varphi = \varphi(A \to B) \in \Lambda$):

1.1. $F(a\varphi, b\varphi) \supseteq F(a, b)^\varphi$ für alle $(a, b) \in A \times A$.

1.2. $F(a\varphi, b\varphi) \subseteq F(a, b)^\varphi$ für alle $(a, b) \in A \times A$.

1.3. *Wenn S eine F-reguläre Kongruenz auf A ist, so ist S^φ eine F-reguläre Kongruenz auf B.*

Das F-Radikal $R_F(A)$ von $A \in L$ ist die Gesamtheit aller der Paare $(a, b) \in A \times A$, die in F-regulären Kongruenzen auf A enthalten sind, d.h., $(a, b) \in R_F(A) \Leftrightarrow$ die von (a, b) erzeugte Kongruenz auf A ist F-regulär. Wenn $R_F(A) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ die identische Kongruenz auf A) bzw. $R_F(A) = \mathbf{1}$ ($\mathbf{1} = A \times A$ die Allrelation auf A), so heißt die Algebra A F-radikalfrei bzw. F-radikal.

1.4. *Der Annullator*

$$\operatorname{Ann} R_F \underset{\text{Def}}{=} \{A \in L, R_F(A) = \mathbf{0}\}$$

ist abgeschlossen gegenüber subdirekten Produkten in L.

Beweis. Bezeichnet $|A|$ die Kardinalzahl des Trägers von $A \in L$ und ist $|A| = 1$, so ist $R_F(A) = \mathbf{0}$, also $A \in \operatorname{Ann} R_F$. Ist $A = \prod_{i \in I} A_i$ subdirektes Produkt der $A_i \in \operatorname{Ann} R_F$, $i \in I \neq \emptyset$, bezüglich der $\varphi_i(A \to A_i) \in \Lambda$,

d.h. $\bigcap_{i \in I} \mathbf{0}\varphi_i^{-1} = \mathbf{0}$, und S eine F-reguläre Kongruenz auf A, so ist S^{φ_i} eine F-reguläre Kongruenz auf A_i, somit $S^{\varphi_i} = \mathbf{0}$ und $S \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbf{0}\varphi_i^{-1} = \mathbf{0}$.

Für $K \subseteq L$ sei K^S die Gesamtheit der subdirekten Produkte in L von Algebren aus K und K^i die Gesamtheit der subdirekt irreduziblen Algebren aus K. An dieser Stelle sei an den in [6] betrachteten allgemeinen Radikalbegriff erinnert: Eine auf L erklärte Funktion R mit $R(A) \in C(A)$ heißt ein Radikal auf L, wenn

1.5. $R(A)\varphi \subseteq R(B)$ *für alle* $\varphi(A \to B) \in \Lambda$

und

1.6. $R\big(A/R(A)\big) = \mathbf{0}$.

Jede Teilklasse $K \subseteq L$ bestimmt gemäß

$$R(K)(A) \underset{\text{Def}}{=} \bigcap \{S \in C(A), A/S \cong B \in K\} \in C(A);$$

wobei A/S die Restklassenalgebra von A bezüglich S bezeichnet, ein Radikal $R(K)$ auf L. Dabei gilt $R(K) = R(K^S)$, und für

$$\operatorname{Ann} R(K) \underset{\text{Def}}{=} \{A \in L, R(K)(A) = \mathbf{0}\}$$

hat man $K^S = \operatorname{Ann} R(K)$. Wir werden sehen, daß jedes F-Radikal R_F auf L in diesem Sinne ein Radikal $R(K)$ auf L mit $K = \operatorname{Ann} R_F$ ist.

1.7. *Das F-Radikal $R_F(A)$ von $A \in L$ ist der Durchschnitt aller der Kongruenzen $S \in C(A)$, für welche $A/S \in (\operatorname{Ann} R_F)^i$. Demnach ist $R_F = R\big((\operatorname{Ann} R_F)^i\big) = R\big((\operatorname{Ann} R_F)^{iS}\big)$ ein Radikal auf L.*

Beweis. a) Wir zeigen zuerst, daß $R\big((\operatorname{Ann} R_F)^i\big)(A) \subseteq R_F(A)$. Es sei $(c, d) \in A \times A$, $(c, d) \notin R_F(A)$, und S die kleinste Kongruenz auf A mit $(c, d) \in S$. Da S nicht F-regulär sein kann, so existiert $(a, b) \in S$ mit $(a, b) \notin F(a, b)$. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales $T \in C(A)$ mit $(a, b) \notin T$ und $F(a, b) \subseteq T$. Sei $a_T \in A/T$ diejenige Kongruenzklasse von A bezüglich T, die das Element $a \in A$ enthält. Wegen $(a, b) \notin T$ ist $(a_T, b_T) \notin \mathbf{0}$, und jede von $\mathbf{0}$ verschiedene Kongruenz auf A/T umfaßt das Paar (a_T, b_T). Daher ist A/T subdirekt irreduzibel. Da $F(a, b) \subseteq T$, so gilt, für die kanonische Abbildung $\chi(A \to A/T)$, $F(a, b)^\chi = \mathbf{0}$. Wäre $(a_T, b_T) \in F(a_T, b_T)$, so wäre, wegen $F(a_T, b_T) = F(a, b)^\chi = \mathbf{0}$, $(a_T, b_T) \in \mathbf{0}$, was der Voraussetzung widerspricht. Folglich ist $(a_T, b_T) \notin F(a_T, b_T)$. Demnach enthält jede von $\mathbf{0}$ verschiedene Kongruenz auf A/T ein Paar, das nicht F-regulär ist, d.h., A/T hat das F-Radikal $\mathbf{0}$. Daher ist $A/T \in (\operatorname{Ann} R_F)^i$. Da $(a, b) \notin T$, ist auch $(c, d) \notin T$ und $(c, d) \notin R\big((\operatorname{Ann} R_F)^i\big)(A)$.

b) Wir beweisen jetzt die Inklusion $R_F(A) \subseteq R\big((\operatorname{Ann} R_F)^i\big)(A)$. Es sei $(a, b) \in R_F(A)$ und T eine Kongruenz auf A, so daß $A/T \in (\operatorname{Ann} R_F)^i$.

Das Paar (a, b) ist enthalten in einer F-regulären Kongruenz $S \in C(A)$. Daher ist (a_T, b_T) enthalten in einer F-regulären Kongruenz auf A/T, d.h. $(a_T, b_T) \in R_F(A/T)$. Wegen $A/T \in (\mathrm{Ann}\, R_F)^i$ ist $R_F(A/T) = \mathbf{0}$ und $(a, b) \in T$, also $(a, b) \in R\big((\mathrm{Ann}\, R_F)^i\big)(A)$, und die Behauptung ist bewiesen.

Im Hinblick auf die Beziehung $K^s = \mathrm{Ann}\, R(K)$ folgt aus 1.7 unmittelbar:

1.8. *Für das F-Radikal R_F besteht die Beziehung*

$$(\mathrm{Ann}\, R_F)^{is} = \mathrm{Ann}\, R_F .$$

Wir bemerken, daß die Bedingung 1.3 schon aus 1.1 folgt, falls wenigstens eine der beiden folgenden Forderungen erfüllt ist:

1.9. *Für alle $S \in C(A)$ und alle $\varphi(A \to B) \in \Lambda$ gilt $S\varphi = S^\varphi$.*

1.10. *Wenn $(a, b) \in F(a, b)$, $(b, c) \in F(b, c)$, so $(a, c) \in F(a, c)$.*

Die Bedingung 1.9 ist beispielsweise erfüllt, wenn L eine Klasse von Gruppen bzw. von Ringen ist. Wie wir in Abschnitt 5 sehen werden, lassen sich in diesen beiden Fällen leicht Beispiele für eine Funktion $F(a, b)$ angeben, die auch den Bedingungen 1.1 und 1.2 genügt. Insbesondere führt die zum Brown–McCoyschen Radikal eines Ringes gehörige Kongruenz auf ein spezielles F-Radikal (vergl. Abschnitt 5). Da uns besondere Beispiele für F-Radikale auf allgemeineren Klassen von Algebren nicht bekannt sind, soll die Theorie der F-Radikale hier nicht weiter verfolgt werden. Dagegen scheinen die in den folgenden Abschnitten betrachteten F^0-Radikale, die übrigens die F-Radikale im Fall der Gruppen bzw. Ringe in gewissem Sinne mitumfassen, eine größere Bedeutung zu besitzen.

2. 0-Kerne. Es sei L^0 eine feste Teilkasse von L. In jeder Algebra $A \in L^0$ sei genau ein Element z_A ausgewählt, das hier die gleiche Rolle spielt, wie das Nullelement eines Ringes oder einer Halbgruppe bzw. wie das Einselement einer Gruppe. Wir stellen daher an die ausgewählten Elemente z_A, $A \in L^0$, folgende Forderungen:

2.1. *Wenn $A \in L^0$ und $\varphi(A \to B) \in \Lambda$, so ist $B \in L^0$ und $z_A\varphi = z_B$.*

2.2. *Wenn $A = \prod_{i \in I} A_i \in L$ das subdirekte Produkt in L der $A_i \in L^0$ bezüglich der Homomorphismen $\varphi_i(A \to A_i) \in \Lambda$, $i \in I$, und $\bigcap_{i \in I} z_{A_i}\varphi_i^{-1} \neq \emptyset$ ist, so gehört A zu L^0.*

Für $\varphi(A \to B) \in \Lambda$ und $B \in L^0$ sei $\ker^0\varphi = z_B\varphi^{-1} = \{a \in A,\ a\varphi = z_B\}$ der 0-Kern von φ. Ist $B \notin L^0$, so sei $\ker^0\varphi = \emptyset$ der 0-Kern von φ. Ist $S \in C(A)$ und $S = \mathbf{0}\varphi^{-1}$, so setzen wir

$$S^0 \underset{\mathrm{Def}}{=} \ker^0\varphi .$$

Offenbar ist die Definition von S^0 unabhängig von einer speziellen Wahl von φ. Denn wegen $A/S \cong B$ ist $A/S \in L^0 \iff B \in L^0$. Wenn also $\varphi = \chi\psi$, wo $\chi(A \to A/S)$ der kanonische Homomorphismus und $\psi(A/S \to B)$ ein Isomorphismus ist, so hat man $a\varphi = z_B \iff a\chi = z_B\psi^{-1} = z_{A/S}$.

2.3. *Für $S, S_1, S_2, S_i \in C(A)$, $i \in I$, gilt:*

a) $S_1^0 \subseteq S_2^0$, *falls* $S_1 \subseteq S_2$;

b) $(\bigcap_{i \in I} S_i)^0 = \bigcap_{i \in I} S_i^0$;

c) $S^0\varphi \subseteq (S^\varphi)^0$, *falls* $\varphi(A \to B) \in \Lambda$;

d) $\mathbf{0}^0 = \begin{cases} \{z_A\}, & \text{falls } A \in L^0, \\ \emptyset, & \text{falls } A \notin L^0. \end{cases}$

Beweis. a) Für $\varphi_i(A \to A_i) \in \Lambda$, $i = 1, 2$, und $S_1 = \mathbf{0}\varphi_1^{-1} \subseteq S_2 = \mathbf{0}\varphi_2^{-1}$ existiert $\psi(A_1 \to A_2) \in \Lambda$ mit $\varphi_2 = \varphi_1\psi$. Aus $A_1 \in L^0$ und $a\varphi_1 = z_{A_1}$ folgt daher $A_2 \in L^0$ und $a\varphi_2 = a\varphi_1\psi = z_{A_1}\psi = z_{A_2}$, d.h. $S_1^0 \subseteq S_2^0$.

b) Für $S_i \in C(A)$, $i \in I$, gilt $\bigcap_{i \in I} S_i \subseteq S_i$, also $(\bigcap_{i \in I} S_i)^0 \subseteq \bigcap_{i \in I} S_i^0$. Sei umgekehrt $a \in \bigcap_{i \in I} S_i^0$. Für die kanonischen Homomorphismen

$$\varphi_i(A \to A/S_i)\,,\quad \varphi(A \to A/\bigcap_{i \in I} S_i) \quad \text{und} \quad \psi_j(A/\bigcap_{i \in I} S_i \to A/S_j)$$

gilt $\varphi_j = \varphi\psi_j$ und $\mathbf{0}\psi_j^{-1} = S_j/\bigcap_{i \in I} S_i$. Da

$$\bigcap_{j \in I} \mathbf{0}\psi_j^{-1} = \bigcap_{j \in I} (S_j/\bigcap_{i \in I} S_i) = (\bigcap_{j \in I} S_j)/\bigcap_{i \in I} S_i = \mathbf{0}\,,$$

so ist $A/\bigcap_{i \in I} S_i$ subdirektes Produkt in L der A/S_j bezüglich der ψ_j. Wegen $a \in S_j^0$ ist $S_j^0 \neq \emptyset$ und $A/S_j \in L^0$ für alle $j \in I$. Da $z_{A/S_j} = a\varphi_j = a\varphi\psi_j$, so ist $a\varphi \in \bigcap_{i \in I} z_{A/S_i}\psi_i^{-1}$. Nach 2.2 existiert daher das Element $z_{A/\bigcap_{i \in I} S_i}$. Aus

$$z_{A/\bigcap_{i \in I} S_i}\psi_j = z_{A/S_j} = a\varphi_j = a\varphi\psi_j \quad \text{folgt} \quad (a\varphi, z_{A/\bigcap_{i \in I} S_i}) \in \bigcap_{j \in I} \mathbf{0}\psi_j^{-1} = \mathbf{0}\,,$$

d.h. $a\varphi = z_{A/\bigcap_{i \in I} S_i}$ und $a \in (\bigcap_{i \in I} S_i)^0$.

c) Ist $\varphi(A \to B) \in \Lambda$, so gilt für die kanonischen Homomorphismen $\chi(A \to A/S)$, $\varphi_S(A/S \to B/S^\varphi)$ und $\psi(B \to B/S^\varphi)$ die Gleichung $\chi\varphi_S = \varphi\psi$, und aus $a \in S^0$ folgt $a\chi = z_{A/S}$ und $a\varphi\psi = a\chi\varphi_S = z_{A/S}\varphi_S = z_{B/S^\varphi}$. Daher ist $a\varphi \in (\mathbf{0}\psi^{-1})^0 = (S^\varphi)^0$ und $S^0\varphi \subseteq (S^\varphi)^0$.

d) Bezeichnet ι_A den identischen Automorphismus von A, so ist $\mathbf{0}^0 = (\mathbf{0}\iota_A^{-1})^0 = \ker^0 \iota_A$. Wenn $A \in L^0$, so ist $\ker^0 \iota_A = \{z_A\}$. Dagegen ist $\ker^0 \iota_A = \emptyset$ für $A \notin L^0$.

Aus 2.3.b) folgt, daß die Gesamtheit aller der Teilmengen von $A \in L$, die als 0-Kerne auftreten, einen vollständigen Verband bildet.

Wir bezeichnen diesen Verband als den 0-Kernverband $C^0(A)$ der Algebra A. Zufolge 2.3.a), b) ist die durch $S \to S^0$ gegebene Zuordnung eine δ-treue Abbildung von $C(A)$ auf $C^0(A)$. (Eine monotone Abbildung $\psi(E \to F)$ einer Teilordnung E in eine Teilordnung F heißt voll infimumtreu (vergl. [8], [9]) oder kürzer auch δ-treu, wenn für alle Teilmengen $M \subseteq E$ und alle $y \in F$ aus $y \leqslant x\psi$ für alle $x \in M$ und der Existenz von $\inf M$ in E stets folgt $y \leqslant (\inf M)\psi$.)

Für $N \in C^0(A)$ und $\varphi(A \to B) \in \Lambda$ sei N^φ der von $N\varphi \subseteq B$ erzeugte 0-Kern, d.h. der Durchschnitt aller $T^0 \in C^0(B)$, für welche $N\varphi \subseteq T^0$.

Wir ergänzen nunmehr die Bedingungen 2.1 und 2.2 durch folgende Bedingung:

2.4. *Wenn eine Kongruenzklasse N von $A \in L$ bezüglich einer Kongruenz T auf A ein* 0-*Kern ist, so ist $N = T^0$.*

Aus 2.3.d) und 2.4 folgt:

2.5. *Wenn $N \in C^0(A)$ und $|N| = 1$, so ist $A \in L^0$ und $N = \{z_A\}$.*

Beweis. Da N eine Kongruenzklasse von A bezüglich $\mathbf{0}$ ist, so ist nach 2.4 $N = \mathbf{0}^0 \neq \emptyset$ und zufolge 2.3.d) $A \in L^0$ und $N = \{z_A\}$.

Umgekehrt hat man:

2.6. Voraussetzungen:

a) *Wenn $N \in C^0(A)$ und $|N| = 1$, so ist $A \in L^0$ (und $N = \{z_A\}$).*

b) *Für alle N $(\neq \emptyset) \in C^0(A)$ und alle $\varphi(A \to B) \in \Lambda$ gilt $N\varphi = N^\varphi$.*

Behauptung:

Dann ist Bedingung 2.4 *erfüllt.*

Beweis. Sei N eine Kongruenzklasse von A bezüglich $T \in C(A)$ und $N \in C^0(A)$. Für den kanonischen Homomorphismus $\chi(A \to A/T)$ ist nach 2.6.b) $N\chi = N^\chi \in C^0(A/T)$. Da $|N\chi| = 1$, so ist nach 2.6.a) $N\chi = \{z_{A/T}\}$ und $N \subseteq z_{A/T}\chi^{-1} = T^0$, also $N = T^0$.

Die Algebra $A \in L$ heißt 0-subdirektes Produkt in L der Algebren $A_i \in L$, $i \in I$, bezüglich der $\varphi_i(A \to A_i) \in \Lambda$, wenn $\bigcap_{i \in I} (\mathbf{0}\varphi_i^{-1})^0 = \mathbf{0}^0$; wir schreiben dann auch kurz $A = \prod^0_{i \in I} A_i$. Eine Algebra $A \in L$ wird 0-subdirekt irreduzibel genannt, wenn aus $A = \prod^0_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} (\mathbf{0}\varphi_i^{-1})^0 = \mathbf{0}^0$, stets folgt, daß wenigstens ein φ_i 0-treu, d.h. $(\mathbf{0}\varphi_i^{-1})^0 = \mathbf{0}^0$ ist. Für $K \subseteq L$ bezeichne K^{s^0} die Klasse aller der Algebren aus L, die 0-subdirektes Produkt in L von Algebren aus K sind, und K^{i^0} die Klasse aller 0-subdirekt irreduziblen Algebren aus K. Wenn in der Algebra $A \in L$ ein 0-Kern J mit $|J| \geqslant 2$ existiert, der in jedem 0-Kern $N \in C^0(A)$ mit $|N| \geqslant 2$ enthalten ist, so sagen wir auch, in A existiert der universal minimale, wenigstens zweielementige 0-Kern $J = J(A)$. Wie man leicht einsehen kann, gilt:

2.7. *Eine Algebra $A \in L$ ist genau dann* 0-*subdirekt irreduzibel, wenn entweder $|A| = 1$ oder $J(A)$ in A existiert.*

3. Das F^0-Radikal. Jeder Algebra $A \in L$ sei eine Funktion $F(A \to C(A))$ zugeordnet. Ein Element $a \in A$ heiße F^0-regulär, wenn

$$a \in F^0(a) \underset{\text{Def}}{=} (F(a))^0 .$$

Eine Teilmenge $N \subseteq A$ heißt F^0-regulär, wenn jedes Element von N F^0-regulär ist. Der von $a \in A$ erzeugte 0-Kern aus $C^0(A)$ werde mit $a^{(0)}$ bezeichnet. Wir setzen voraus, daß F folgenden zwei Bedingungen genügt:

3.1. *Für alle $a \in A$ und alle $\varphi(A \to B) \in \Lambda$ gilt $F(a\varphi) = F(a)^\varphi$.*

3.2. *Ist $N \in C^0(A)$ ein nichtleerer F^0-regulär* 0-Kern *und $\varphi(A \to B) \in \Lambda$, so ist der* 0-Kern *$N^\varphi$ stets F^0-regulär.*

Das F^0-Radikal $R_{F^0}(A)$ ist die Menge aller der Elemente $a \in A$, für welche der von a erzeugte 0-Kern $a^{(0)}$ F^0-regulär ist.

3.3. *Der Annullator*

$$\operatorname{Ann} R_{F^0} \underset{\text{Def}}{=} \{A \in L,\ R_{F^0}(A) = \mathbf{0}^0\}$$

ist abgeschlossen gegenüber 0-*subdirekten Produkten in L.*

Beweis. Sei $A \in L$. Für $|A| = 1$ ist $R_{F^0}(A) = \{z_A\} = \mathbf{0}^0$. Nun sei $|A| \neq 1$ und $A = \prod^0_{i \in I} A_i$ 0-subdirektes Produkt der $A_i \in \operatorname{Ann} R_{F^0}$ bezüglich der $\varphi_i(A \to A_i) \in \Lambda$, also $\bigcap_{i \in I} (\mathbf{0}\varphi_i^{-1})^0 = \mathbf{0}^0$. Für $R_{F^0}(A) = \emptyset$ ist $A \notin L^0$ und $\mathbf{0}^0 = \emptyset = R_{F^0}(A)$. Denn wäre $A \in L^0$, so wäre $\{z_A\} = \mathbf{0}^0 \subseteq F^0(z_A)$ und $z_A \in R_{F^0}(A)$. Sei daher $R_{F^0}(A) \neq \emptyset$. Wenn N $(\neq \emptyset) \in C^0(A)$ ein F^0-regulärer 0-Kern ist, so ist der 0-Kern N^{φ_i} nach 3.2 F^0-regulär, also $N\varphi_i \subseteq N^{\varphi_i} \subseteq R_{F^0}(A_i) = \mathbf{0}^0$, folglich $N\varphi_i = \{z_{A_i}\}$, $N \subseteq z_{A_i}\varphi_i^{-1} = (\mathbf{0}\varphi_i^{-1})^0$ und $N \subseteq \bigcap_{i \in I} (\mathbf{0}\varphi_i^{-1})^0 = \mathbf{0}^0$. Daher ist $\mathbf{0}^0 \neq \emptyset$. Zufolge 2.3.d) ist also $A \in L^0$ und $\mathbf{0}^0 = \{z_A\} = N$. Somit ist in jedem Fall $R_{F^0}(A) = \mathbf{0}^0$ und $A \in \operatorname{Ann} R_{F^0}$.

3.4. *Das F^0-Radikal $R_{F^0}(A)$ von $A \in L$ ist der Durchschnitt D aller* 0-*Kerne der Form S^0, wobei $S \in C(A)$ und $A/S \in (\operatorname{Ann} R_{F^0})^{i^0}$. Insbesondere ist $R_{F^0}(A)$ also ein* 0-*Kern.*

Beweis. a) Wir zeigen zuerst, daß $D \subseteq R_{F^0}(A)$. Sei $b \in A$ und $b \notin R_{F^0}(A)$. Dann existiert $a \in b^{(0)}$ mit $a \notin F^0(a)$. Sei E die Menge aller 0-Kerne $N \in C^0(A)$, so daß $a \notin N = S^0$ für geeignetes $S \in C(A)$ mit $F(a) \subseteq S$. Offenbar ist E nichtleer. Sei Y $(\neq \emptyset)$ eine bezüglich der mengentheoretischen Inklusion (total) geordnete Teilmenge von E. Für $N \in E$ sei $\{S_i\}_{i \in I}$ die Gesamtheit aller $S \in C(A)$ mit $N = S^0$ und $F(a) \subseteq S$. Dann gilt

$$F(a) \subseteq S_N \underset{\text{Def}}{=} \bigcap_{i \in I} S_i$$

und $S_N^0 = (\bigcap_{i\in I} S_i)^0 = \bigcap_{i\in I} S_i^0 = N$, d.h., S_N ist die kleinste Kongruenz S auf A mit $N = S^0$ und $F(a) \subseteq S$. Aus $N_1 \subseteq N_2$ folgt $(S_{N_1} \cap S_{N_2})^0 = S_{N_1}^0 \cap S_{N_2}^0 = N_1 \cap N_2 = N_1$, und da $F(a) \subseteq S_{N_1} \cap S_{N_2}$ und $S_{N_1} \cap S_{N_2} \subseteq S_{N_1}$, so ist $S_{N_1} \cap S_{N_2} = S_{N_1}$ und $S_{N_1} \subseteq S_{N_2}$. Somit ist $\{S_N\}_{N\in Y}$ ein geordnetes System. Das Supremum von $\{S_N\}_{N\in Y}$ in $C(A)$ ist daher gleich der mengentheoretischen Vereinigung $\bigcup_{N\in Y} S_N$. Wir behaupten, daß $(\bigcup_{N\in Y} S_N)^0 = \bigcup_{N\in Y} N$. Jedenfalls ist $\bigcup_{N\in Y} N = \bigcup_{N\in Y} S_N^0 \subseteq (\bigcup_{N\in Y} S_N)^0$. Für $|Y| = 1$ ist unsere Behauptung trivial. Es sei daher $|Y| \geqslant 2$. Dann existiert $N \in Y$ mit $N \neq \emptyset$. Wenn $\emptyset \in Y$, so ist $S_\emptyset \subseteq S_N$. Demnach ist stets $\bigcup_{N\in Y} S_N = \bigcup_{\emptyset\neq N\in Y} S_N$. Es seien u und v irgendzwei Elemente von $(\bigcup_{\emptyset\neq N\in Y} S_N)^0$, wobei $u \in \bigcup_{N\in Y} N$, also $u \in N_1$ für geeignetes $N_1 \in Y$. Dann ist $(u, v) \in \bigcup_{\emptyset\neq N\in Y} S_N$, somit $(u, v) \in S_{N_2}$ für geeignetes N_2 $(\neq \emptyset) \in Y$. Wenn $N_1 \subseteq N_2$, so ist $u \in N_2$, folglich $v \in N_2$ und $v \in \bigcup_{N\in Y} N$. Wenn $N_1 \supseteq N_2$, so ist $S_{N_1} \supseteq S_{N_2}$ und $(u, v) \in S_{N_1}$. Wegen $u \in N_1$ ist dann auch $v \in N_1$ und $v \in \bigcup_{N\in Y} N$. Daher ist $(\bigcup_{\emptyset\neq N\in Y} S_N)^0 \subset \bigcup_{N\in Y} N$, und unsere Behaptung ist bewiesen. Damit folgt $\bigcup_{N\in Y} N \in E$, und da $\bigcup_{N\in Y} N$ eine obere Schranke alle $N \in Y$ ist, so existiert nach den Zornschen Lemma in E ein maximales Element N. so daß $a \in N = S^0$ für geeignetes $S \in C(A)$ mit $F(a) \subseteq S$. Ist also $N_1 \in C^0(A)$, $N \subseteq N_1$, $N \neq N_1$ und $N_1 = S_1^0$ für geeignetes $S_1 \in C(A)$ mit $F(a) \subseteq S_1$, so ist gewiß $a \in N_1$. Bezeichnet $\psi = \psi(A \to A/S)$ den kanonischen Homomorphismus, so ist $(a\psi)^{(0)} \in C^0(A/S)$ und $|(a\psi)^{(0)}| \geqslant 2$. Denn aus $|(a\psi)^{(0)}| = 1$ folgt im Hinblick auf 2.5, daß $(a\psi)^{(0)} = \{z_{A/S}\}$ und $a\psi = z_{A/S}$, d.h. $a \in (\mathbf{0}\psi^{-1})^0 = S^0 = N$, im Widerspruch zu $a \notin N$. Sei $N_2 \in C^0(A/S)$, $|N_2| \geqslant 2$ und S_2 die kleinste Kongruenz auf A/S mit $S_2^0 = N_2$. Der Kongruenz S_2 entspricht in kanonischer Weise eine Kongruenz S_1 auf A mit $S \subseteq S_1$, so daß $S_2 = S_1/S = S_1\psi = S_1^\psi$. Sei $\chi(A/S \to (A/S)/(S_1/S))$ der kanonische Homomorphismus. Dann gilt $\mathbf{0}(\psi\chi)^{-1} = S_1$ und $S_1^0 = \ker^0 \psi\chi$. Da $S_2^0 = N_2 \neq \emptyset$, so ist

$$(A/S)/S_2 = (A/S)/(S_1/S) \in L^0, \quad \text{d.h.} \quad z_{(A/S)/(S_1/S)} \in (A/S)/(S_1/S).$$

Wegen $a \in S_1^0 \Leftrightarrow a\psi\chi = z_{(A/S)/(S_1/S)} \Leftrightarrow a\psi \in S_2^0 \Leftrightarrow a \in S_2^0\psi^{-1}$ ist:

3.5. $S_1^0 = S_2^0\psi^{-1}$, $S_1^0\psi = S_2^0$.

Da $S_1 \supseteq S$, so ist

$$N_1 \underset{\text{Def}}{=} S_1^0 \supseteq S^0 = N.$$

Aus $S_1^0\psi = N_2$ und $|N_2| \geqslant 2$ folgt $N_1 \neq N$. Außerdem ist $F(a) \subseteq S \subseteq S_1$. Man hat daher $a \in N_1$, $a\psi \in N_1\psi = S_1^0\psi = N_2$ und $(a\psi)^0 \subseteq N_2$. Da $|(a\psi)^{(0)}| \geqslant 2$, so bedeutet dies, daß A/S 0-subdirekt irreduzibel ist. Wir behaupten,

daß $A/S \in \operatorname{Ann} R_{F^0}$. Da $F(a\psi) = F(a)^\psi$ und $F(a) \subseteq S$, so ist $F(a)\psi \subseteq S\psi = \mathbf{0}$, $F(a)^\psi = \mathbf{0}$ und $F(a\psi) = \mathbf{0}$. Weiter ist $a\psi \notin \mathbf{0}^0 = F^0(a\psi)$. Denn wäre $a\psi \in \mathbf{0}^0$, so wäre $(a\psi)^{(0)} = \mathbf{0}^0$ und $|(a\psi)^{(0)}| = 1$. Jedes $N_2 \in C^0(A/S)$ mit $|N_2| \geqslant 2$ enthält daher stets ein nicht F^0-reguläres Element (nämlich $a\psi$). Wenn $A/S \notin L^0$, so ist also $R_{F^0}(A/S) = \emptyset = \mathbf{0}^0$. Wenn $A/S \in L^0$, so ist $\mathbf{0}^0 = \{z_{A/S}\}$ und $z_{A/S} \in F^0(z_{A/S})$; somit ist auch in diesem Fall $R_{F^0}(A/S) = \mathbf{0}^0$, $A/S \in \operatorname{Ann} R_{F^0}$ und $D \subseteq S^0$. Da $a \notin S^0$, so ist $b \notin S^0$ und $b \notin D \subseteq S^0$.

b) Es bleibt noch zu zeigen, daß auch $R_{F^0}(A) \subseteq D$. Sei also $b \in R_{F^0}(A)$ und $T \in C(A)$, so daß $A/T \in (\operatorname{Ann} R_{F^0})^{i^0}$. Da mit $b^{(0)}$ auch $(b^{(0)})^\varphi$ F^0-regulär ist (3.2), wo $\varphi(A \to A/T)$ den kanonischen Homomorphismus bezeichnet, und da $b\varphi \in b^{(0)}\varphi \subseteq (b^{(0)})^\varphi$, $(b\varphi)^{(0)} \subseteq (b^{(0)})^\varphi$, so ist auch $(b\varphi)^{(0)}$ F^0-regulär und $b\varphi \in R_{F^0}(A/T) = \mathbf{0}^0$, somit $b\varphi = z_{A/T}$ und $b \in \ker^0 \varphi = T^0$. Da dies für alle $T \in C(A)$ mit $A/T \in (\operatorname{Ann} R_{F^0})^{i^0}$ gilt, so ist $b \in D$.

Aus 3.4 folgt unmittelbar:

3.6. *Für jedes F^0-Radikal R_{F^0} auf L ist*

$$(\operatorname{Ann} R_{F^0})^{i^0 s^0} = \operatorname{Ann} R_{F^0}.$$

3.7. *Die Algebra $A \in L$ gehört genau dann zu $(\operatorname{Ann} R_{F^0})^{i^0}$, wenn $|A| = 1$ oder wenn der universal minimale, wenigstens zweielementige 0-Kern $J(A)$ und in $J(A)$ ein Element a existiert, so daß $|a^{(0)}| \neq 1$ und $F^0(a) = \mathbf{0}^0$.*

Beweis. Wenn $A \in (\operatorname{Ann} R_{F^0})^{i^0}$ und $|A| \neq 1$, so existiert zufolge 2.7 $J(A)$, und wegen $R_{F^0}(A) = \mathbf{0}^0$ enthält $J(A)$ ein Element b, so daß $b^{(0)}$ nicht F^0-regulär ist. Daher existiert $a \in b^{(0)}$, so daß $a \notin F^0(a)$. Da $a \in b^{(0)} \subseteq J(A)$, so ist $a \in J(A)$. Wäre $|a^{(0)}| = 1$, so wäre $a = z_A$ und $a \in F^0(a)$. Es ist also $|a^{(0)}| \neq 1$. Wäre $F^0(a) \neq \mathbf{0}^0$, so wäre $|F^0(a)| \geqslant 2$. Denn aus $F^0(a) = \emptyset$ folgt $A \notin L^0$, $\mathbf{0}^0 = \emptyset = F^0(a)$, und aus $|F^0(a)| = 1$ folgt $A \in L^0$, $F^0(a) = \mathbf{0}^0$. Wenn aber $|F^0(a)| \geqslant 2$ ist, so ist $a \in J(A) \subseteq F^0(a)$, im Widerspruch zu $a \notin F^0(a)$. Es muß daher $F^0(a) = \mathbf{0}^0$ sein. Nun sei umgekehrt a ein Element aus $J(A)$, so daß $|a^{(0)}| \neq 1$ und $F^0(a) = \mathbf{0}^0$. Da $|J(A)| \geqslant 2$, so ist A 0-subdirekt irreduzibel in L. Wegen $|a^{(0)}| \neq 1$ ist $a \notin F^0(a) = \mathbf{0}^0$. Wäre $R_{F^0}(A) \neq \mathbf{0}^0$, so wäre nach 2.5 und 2.3.d) $|R_{F^0}(A)| \geqslant 2$ und $a \in J(A) \subseteq R_{F^0}(A)$. Dann wäre aber $a \in F^0(a)$, was der Voraussetzung über a widerspricht. Es ist also $R_{F^0}(A) = \mathbf{0}^0$, und da $J(A)$ in A existiert, so ist $A \in (\operatorname{Ann} R_{F^0})^{i^0}$.

4. Das 0-Radikal, das zu einem Radikal gehört. Dieser Abschnitt enthält einige Tatsachen zur näheren Charakterisierung des F^0-Radikals. Für einen 0-Kern $N \in C^0(A)$ sei $\langle N\rangle$ die offenbar stets existierende, kleinste Kongruenz auf A mit $\langle N\rangle^0 = N$.

4.1. *Folgende Aussagen sind einander gleichwertig:*

a) $\langle N\rangle^0 \neq \emptyset \Leftrightarrow N \neq \emptyset$, *für alle* $N \in C^0(A)$,

b) $\langle N\rangle^0 = N$ *für alle* $N \in C^0(A)$,

c) *Gültigkeit der Bedingung* 2.4.

Beweis. a) ⇒ b). Sei $N = S^0$, wobei $S \in C(A)$. Dann ist $\langle S^0\rangle \subseteq S$ und nach 2.3.a) $\langle N\rangle^0 = \langle S^0\rangle^0 \subseteq S^0 = N$. Für $N=\emptyset$ ist $\langle N\rangle^0=\emptyset=N$. Für $N\neq\emptyset$ ist $\langle N\rangle^0\neq\emptyset$, d.h., $\langle N\rangle^0$ ist wie N eine Kongruenzklasse von A bezüglich $\langle N\rangle$, daher ist $\langle N\rangle^0=N$.

b) ⇒ c) Sei $N\in C^0(A)$ eine Kongruenzklasse von A bezüglich $T\in C(A)$. Dann ist $\langle N\rangle\subseteq T$ und $N=\langle N\rangle^0\subseteq T^0$, also $N=T^0$.

c) ⇒ b) und b) ⇒ a) sind trivial.

4.2. a) *Die durch* $S\to S^0$ *und* $N\to\langle N\rangle$ *gegebenen Abbildungen* $(^0)\big(C^{\cdot}(A)\to C^0(A)\big)$ *und* $\langle\ \rangle\big(C^0(A)\to C^{\cdot}(A)\big)$, *wo* $C^{\cdot}(A)$ *den zu* $C(A)$ *dualen Verband (mit* $S\subseteq^{\cdot} T \Leftrightarrow S\supseteq T$) *bezeichnet, bilden eine Galoisverbindung.*

b) *Für* $N\in C^0(A)$ *ist* $\langle N\rangle = \bigcap_{T\in C(A),\, N\subseteq T^0} T$.

Beweis. a) Es ist klar, daß $S\subseteq^{\cdot}\langle S^0\rangle$. Nach 2.3.a) ist $S_1^0\supseteq S_2^0$, falls $S_1\subseteq^{\cdot} S_2$. Weiter gilt auch $N\subseteq\langle N\rangle^0$ (nach 4.1.b) ist sogar $N=\langle N\rangle^0$). Wenn $N_1,N_2\in C^0(A)$ und $\emptyset\neq N_1\subseteq N_2$, so ist N_1 eine Kongruenzklasse von A bezüglich $\langle N_1\rangle\cap\langle N_2\rangle$; wegen der Minimaleigenschaft von $\langle N_1\rangle$ ist also $\langle N_1\rangle\subseteq\langle N_1\rangle\cap\langle N_2\rangle$ und $\langle N_1\rangle\subseteq\langle N_2\rangle$. Diese Inklusion gilt aber auch im Fall $N_1=\emptyset$, da dann $\langle N_1\rangle=\mathbf{0}$.

b) Für $N\in C^0(A)$ gilt einerseits $N=\langle N\rangle^0$, andererseits $N\subseteq T^0 \Rightarrow \langle N\rangle\subseteq\langle T^0\rangle\subseteq T$. Daraus folgt

$$\bigcap_{T\in C(A),\,N\subseteq T^0} T\subseteq\langle N\rangle\subseteq\bigcap_{T\in C(A),\,N\subseteq T^0} T\,.$$

Definiert man den Begriff einer voll supremum-treuen (= σ-treuen) Abbildung analog zur δ-Treue, so ergibt sich aus 4.2.a) nach einem allgemeinen Satz über Galoisverbindungen (vergl. [4], S. 47, Aufgabe 7):

4.3. *Die Zuordnung* $N\to\langle N\rangle$ *ist* σ-*treu, d.h., für* $N_i\in C^0(A)$, $i\in I$, *ist*

$$\langle\bigvee_{i\in I}N_i\rangle=\bigvee_{i\in I}\langle N_i\rangle\,.$$

4.4. *Wenn* $S,\ T\in C(A)$ *und* $S^0\subseteq T^0$, *so ist* $\langle S^0\rangle\subseteq\langle T^0\rangle$ *und*

$$\langle(T/\langle S^0\rangle)^0\rangle=\langle T^0\rangle/\langle S^0\rangle\,.$$

Beweis. Die Behauptung ist trivial für $S^0=\mathbf{0}^0$. Sei daher $S^0\neq\mathbf{0}^0$. Dann ist $S^0\neq\emptyset$, also auch $T^0\neq\emptyset$. Gemäß 4.2.a) ist $\langle S^0\rangle\subseteq\langle T^0\rangle\subseteq T$, also $\langle T^0\rangle/\langle S^0\rangle\subseteq T/\langle S^0\rangle$. Da $\emptyset\neq S^0=\langle S^0\rangle^0$, so ist $A/\langle S^0\rangle\in L^0$, somit $(\langle T^0\rangle/\langle S^0\rangle)^0\neq\emptyset$ und $(T/\langle S^0\rangle)^0\neq\emptyset$. Für den kanonischen Homomorphismus $\psi(A\to A/\langle S^0\rangle)$ ist $T\psi=T/\langle S^0\rangle$, also $T^\psi=T\psi$ und nach 2.3.c) $T^0\psi\subseteq(T^\psi)^0=(T\psi)^0$, folglich $T^0\subseteq(T\psi)^0\psi^{-1}$. Da $\mathbf{0}\psi^{-1}=\langle S^0\rangle\subseteq T$ und $(T\psi)^0$ ($\neq\emptyset$) eine Kongruenzklasse von $A\psi=A/\langle S^0\rangle$ bezüglich $T\psi$ ist, so ist $(T\psi)^0\psi^{-1}$ eine Kongruenzklasse von A bezüglich T. Da auch T^0 ($\neq\emptyset$) eine Kon-

gruenzklasse von A bezüglich T ist, so ist $T^0=(T\psi)^0\psi^{-1}=(T/\langle S^0\rangle)^0\psi^{-1}$. Die gleichen Überlegungen gelten auch, wenn darin T durch $\langle T^0\rangle$ ersetzt wird. Da $\langle T^0\rangle^0=T^0$ ist, so erhält man $T^0=(\langle T^0\rangle/\langle S^0\rangle)^0\psi^{-1}$ und folglich $(\langle T^0\rangle/\langle S^0\rangle)^0=T^0\psi=(T/\langle S^0\rangle)^0$. Setzt man $N_2=(T/\langle S^0\rangle)^0$, $S_2=\langle N_2\rangle$, und bezeichnet $S_1\in C(A)$ diejenige Kongruenz, für welche $\langle S^0\rangle\subseteq S_1$, $S_1/\langle S^0\rangle=S_2$, so ist auf Grund der Beziehung 3.5 (die offenbar von der Annahme $S_2^0\neq\emptyset$ unabhängig ist) $S_1^0=S_2^0\psi^{-1}$. Unter Berücksichtigung der definierenden Minimaleigenschaft von S_2 folgt aus $(\langle T^0\rangle/\langle S^0\rangle)^0=N_2$, daß $S_1/\langle S^0\rangle=S_2\subseteq\langle T^0\rangle/\langle S^0\rangle$, also $S_1\subseteq\langle T^0\rangle$. Da $S_1^0=S_2^0\psi^{-1}=N_2\psi^{-1}=(T/\langle S^0\rangle)^0\psi^{-1}=T^0$, so ergibt die definierende Minimaleigenschaft von $\langle T^0\rangle$ die Inklusion $\langle T^0\rangle\subseteq S_1$. Daher besteht Gleichheit, $S_1=\langle T^0\rangle$, und man erhält

$$\langle T^0\rangle/\langle S^0\rangle=S_1/\langle S^0\rangle=S_2=\langle N_2\rangle=\langle(T/\langle S^0\rangle)^0\rangle\,.$$

Für ein Radikal R auf L sei R^0 bzw. $\langle R^0\rangle$ die durch $R^0(A)=\big(R(A)\big)^0$ bzw. $\langle R^0\rangle(A)=\langle R^0(A)\rangle$ definierte Funktion auf L. Die Funktion R^0 heißt auch das zu R gehörige 0-Radikal. Der folgende Satz wurde im Spezialfall der Halbgruppen bereits in [6], S. 369 (Satz 3.5.a)) bewiesen.

4.5. *Mit* R *ist zugleich auch* $\langle R^0\rangle$ *ein Radikal auf* L.

Beweis. Für $\varphi(A\to B)\in\Lambda$ gilt $R(A)\varphi\subseteq R(B)$, somit $R(A)\varphi\subseteq R(A)^\varphi\subseteq R(B)$ und $R(A)^0\varphi\subseteq\big(R(A)^\varphi\big)^0\subseteq R(B)^0$, also $R^0(A)\subseteq R^0(B)\varphi^{-1}$. Wenn $R^0(A)=\mathbf{0}^0$, so ist $\langle R^0(A)\rangle=\mathbf{0}$ und daher $\langle R^0\rangle(A)\varphi=\langle R^0(A)\rangle\varphi=\mathbf{0}\varphi\subseteq\langle R^0\rangle(B)$. Nun sei $R^0(A)\neq\mathbf{0}^0$. Dann ist $R^0(A)\neq\emptyset$ und folglich $R^0(B)\neq\emptyset$. Da $R^0(B)$ eine Kongruenzklasse von B bezüglich der Kongruenz $\langle R^0(B)\rangle$ ist, so ist $R^0(B)\varphi^{-1}$ eine Kongruenzklasse von A bezüglich der Kongruenz $\langle R^0(B)\rangle\varphi^{-1}$. Da $R^0(A)$ eine Kongruenzklasse von A bezüglich $\langle R^0(A)\rangle$ ist, so ist $R^0(A)\cap(R^0(B)\varphi^{-1})=R^0(A)$ eine Kongruenzklasse von A bezüglich $\langle R^0(A)\rangle\cap\langle R^0(B)\rangle\varphi^{-1}$. Zufolge 2.4 ist also $R^0(A)=\big(\langle R^0(A)\rangle\cap\langle R^0(B)\rangle\varphi^{-1}\big)^0$, und auf Grund der definierenden Minimaleigenschaft von $\langle R^0(A)\rangle$ muß sein $\langle R^0(A)\rangle\subseteq\langle R^0(A)\rangle\cap\langle R^0(B)\rangle\varphi^{-1}$, d.h. $\langle R^0(A)\rangle\subseteq\langle R^0(B)\rangle\varphi^{-1}$. Demnach ist in jedem Falle

4.6. $\langle R^0(A)\rangle\varphi\subseteq\langle R^0(B)\rangle$.

Für $S\in C(A)$, $S\subseteq R(A)$ gilt allgemein $R(A)/S=R(A/S)$ (vergl. [6], S. 356, Formel (15)). Im Hinblick auf 4.4 folgt aus $S^0=T^0$ die Beziehung $\langle(T/\langle S^0\rangle)^0\rangle=\langle S^0\rangle/\langle S^0\rangle=\mathbf{0}$. Wählt man darin $S=\langle R^0(A)\rangle$ und $T=R(A)$, und beachtet man, daß $S\subseteq R(A)$, $S=\langle S^0\rangle$ und $S^0=T^0$, so erhält man $\langle R^0\rangle\big(A/\langle R^0\rangle(A)\big)=\langle R^0\rangle(A/S)=\langle R(A/S)^0\rangle=\langle\big(R(A)/S\big)^0\rangle=\langle(T/\langle S^0\rangle)^0\rangle=\mathbf{0}$, d.h.

4.7. $\langle R^0\rangle\big(A/\langle R^0\rangle(A)\big)=\mathbf{0}$.

Die Aussagen 4.6 und 4.7 bedeuten, daß $\langle R^0\rangle$ ein Radikal auf L ist (vergl 1.5, 1.6).

Für $N \in C^0(A)$ sei

$$A/N \underset{\mathrm{Def}}{=} A/\langle N\rangle .$$

Da $\langle N\rangle^0 = N$, so folgt aus 4.7:

4.8. $R^0(A/R^0(A)) = \mathbf{0}^0$.

Für

$$\mathrm{Ann}\, R^0 \underset{\mathrm{Def}}{=} \{A \in L,\ R^0(A) = \mathbf{0}^0\}$$

hat man:

4.9. $\mathrm{Ann}\, R^0 = \mathrm{Ann}\, \langle R^0\rangle$.

Beweis. Da $\langle R^0\rangle(A) = \mathbf{0} \Rightarrow \langle (R(A))^0\rangle = \mathbf{0} \Rightarrow R(A)^0 = \langle R(A)^0\rangle^0 = \mathbf{0}^0 \Rightarrow \langle R(A)^0\rangle = \langle \mathbf{0}^0\rangle = \mathbf{0}$, so ist $\langle R^0\rangle(A) = \mathbf{0} \Leftrightarrow R^0(A) = \mathbf{0}^0$.

Unter Beachtung von 4.9 und 2.3. b) ergibt sich:

4.10. a) $\langle R^0\rangle = R(\mathrm{Ann}\, R^0)$,

b) $\langle R^0\rangle(A) = \bigcap\limits_{S \in C(A),\, A/S \in \mathrm{Ann}\, R^0} S$,

c) $R^0(A) = \bigcap\limits_{S \in C(A),\, A/S \in \mathrm{Ann}\, R^0} S^0$.

4.11. $R^0(A) = \bigcap\limits_{N \in C^0(A),\, A/N \in \mathrm{Ann}\, R^0} N$.

Beweis. Zufolge 4.8 ist $A/R^0(A) \in \mathrm{Ann}\, R^0$. Daher ist die rechte Seite der Gleichung 4.11 in $R^0(A)$ enthalten. Wenn umgekehrt $N \in C^0(A)$, $A/N \in \mathrm{Ann}\, R^0$, so ist wegen $A/N = A/\langle N\rangle$ und $\langle N\rangle^0 = N$ nach 4.10. c) auch $R^0(A) \subseteq N$.

Die vorstehenden allgemeinen Aussagen über 0-Radikale treffen insbesondere auf das F^0-Radikal R_{F^0} zu nach folgendem Satz:

4.12. *Ist R_{F^0} das F gehörige F^0-Radikal und bezeichnet R_1 das Radikal $R\big((\mathrm{Ann}\, R_{F^0})^{i^0}\big) = R\big((\mathrm{Ann}\, R_{F^0})^{i^0 s}\big)$ auf L, so gilt $R_{F^0} = R_1^0$, d.h., R_{F^0} ist ein 0-Radikal auf L.*

Beweis. Da $R_1(A) = \bigcap\limits_{S \in C(A),\, A/S \in (\mathrm{Ann}\, R_{F^0})^{i^0}} S$, so ist nach 2.3. b)

$$R_1^0(A) = \bigcap_{S \in C(A),\, A/S \in (\mathrm{Ann}\, R_{F^0})^{i^0}} S^0 = R_{F^0}(A) \quad \text{für alle} \quad A \in L .$$

Der Gleichung $R_{F^0} = R_1^0$ entsprechend verwenden wir weiterhin auch die Bezeichnung

$$\langle R_{F^0}\rangle \underset{\mathrm{Def}}{=} \langle R_1^0\rangle .$$

Wegen $\langle S^0\rangle \subseteq S$ für alle $S \in C(A)$ ist $\langle R_{F^0}\rangle$ das kleinste aller Radikale R auf L mit $R^0 = R_{F^0}$. (Dabei sei für zwei Radikale R und R' auf L, $R \leqslant R' \Leftrightarrow R(A) \subseteq R'(A)$ für alle $A \in L$.)

5. Beispiele. Sei $\varrho(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine $(n+1)$-stellige Formel ($n \geqslant 2$) im Prädikatenkalkül erster Stufe (mit Identität $=$, mit den logischen

Symbolen $\bigwedge$ (für alle), $\bigvee$ (es gibt), $\wedge$, $\vee$, $\neg$) über dem Prädikatenbereich Ω. Wir setzen voraus, daß ϱ einer positiven Formel äquivalent ist, d.h. einer solchen Formel, die das Negationszeichen $\neg$ nicht enthält. Weiter fordern wir die Bestimmtheitsbedingung

$$\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n \bigvee x_0\ \varrho(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

und die Eindeutigkeitsbedingung

$$\bigwedge x_0 \bigwedge y_0 \bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n \big((\varrho(x_0, x_1, \ldots, x_n) \wedge \varrho(y_0, x_1, \ldots, x_n)) \Rightarrow x_0 = y_0 \big) .$$

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich in A gemäß

$$a_0 = P(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow \varrho(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

die abgeleitete Operation $P(x_1, \ldots, x_n)$ einführen. Da ϱ eine positive Formel ist, so gilt für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ und alle $\varphi(A \to B) \in A$ gewiß $P(a_1\varphi, \ldots, a_n\varphi) = P(a_1, \ldots, a_n)\varphi$. Eine nichtleere Teilmenge $N \subseteq A$ soll P-Ideal von A heißen, wenn für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$, alle $b \in N$ und alle $i = 1, \ldots, n$ stets $P(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in N$. In jeder Algebra $A \in L$ existiert offenbar höchstens ein Element z_A, so daß die einelementige Menge $\{z_A\}$ ein P-Ideal von A ist. Sei L^0 die Klasse aller der $A \in L$, so daß $z_A \in A$.

Eine nichtleere Teilmenge $N \subseteq A$ heißt normal ([7], S. 8), wenn für alle Polynome $Q(x_0, x_1, \ldots, x_m)$ über Ω und alle $a \in N$, $a_1, \ldots, a_m \in A$ folgende Implikation besteht:

$$Q(a, a_1, \ldots, a_m) \in N \Rightarrow \text{für alle } b \in N \text{ ist } Q(b, a_1, \ldots, a_m) \in N .$$

Zufolge [7], S. 8, Theorem 5, ist eine Teilmenge $N \subseteq A$ genau dann normal, wenn sie Kongruenzklasse von A bezüglich einer geeigneten Kongruenz auf A ist. Eine normale Teilmenge, die gleichzeitig ein P-Ideal ist, soll normales P-Ideal von A genannt werden. Eine Teilmenge von A ist offenbar genau dann ein 0-Kern, wenn sie entweder leer oder ein normales P-Ideal von A ist. Überdies gelten die Bedingungen 2.1, 2.2 und 2.4: Bedingung 2.1 folgt unmittelbar aus der Definition der Elemente z_A. Um 2.2 einzusehen, sei $z \in \bigcap\limits_{i \in I} z_{A_i}\varphi_i^{-1}$. Dann hat man

$$\begin{aligned} &P(a_1, \ldots, a_{j-1}, z, a_{j+1}, \ldots, a_n)\varphi_i \\ &\qquad = P(a_1\varphi, \ldots, a_{j-1}\varphi, z_{A_i}, a_{j+1}\varphi, \ldots, a_n\varphi) = z_{A_i} = z\varphi_i , \end{aligned}$$

somit

$$\big(P(\ldots), z\big) \in \bigcap_{i \in I} \mathbf{0}\varphi_i^{-1} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad P(a_1, \ldots, a_{j-1}, z, a_{j+1}, \ldots, a_n) = z ,$$

d.h., $\{z\}$ ist ein P-Ideal von A. Nun sei N ein 0-Kern, der zugleich eine Kongruenzklasse von A bezüglich einer Kongruenz T auf A, also ein normales P-Ideal von A ist, und $\varphi(A \to A/T)$ der kanonische Homomorphismus. Dann gilt für $a_1, \ldots, a_n \in A$ und $b \in N$

$$P(a_1\varphi, \ldots, a_{i-1}\varphi, b\varphi, a_{i+1}\varphi, \ldots, a_n\varphi)$$
$$= P(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)\varphi = b\varphi\,,$$

d.h. $b\varphi = z_{A/T} \in A/T \in L^0$ und $N = z_{A/T}\varphi^{-1} = T^0$. Daher ist auch 2.4 erfüllt.

In den folgenden Beispielen sei die Klasse L stets abgeschlossen gegenüber homomorphen Bildern.

5.1. Sei L eine Klasse von (assoziativen oder nichtassoziativen) Ringen und $P(x, y) = xy$. Dann ist z_A das Nullelement des Ringes $A \in L$ und $L = L^0$. Die normalen P-Ideale sind genau die Ideale von A im ringtheoretischen Sinne.

5.1.1. *Wenn R_{F^0} ein F^0-Radikal auf L ist, so ist $\langle R_{F^0}\rangle$ ein F-Radikal auf L für $F(a, b) = F(a-b)$, d.h., es gilt $\langle R_{F^0}\rangle = R_F$.*

Beweis. Auf Grund von 4.12 wissen wir, daß $\langle R_{F^0}\rangle$ ein Radikal auf L ist. Für $\varphi(A \to B) \in \Lambda$ hat man $F(a\varphi, b\varphi) = F\big((a-b)\varphi\big) = F(a-b)^\varphi = F(a, b)^\varphi$. Da $S\varphi$ für $S \in C(A)$ und jedes $\varphi(A \to B) \in \Lambda$ stets die zum Ideal $S^0\varphi$ gehörige Kongruenz auf B ist, so ist $S\varphi = S^\varphi$, d.h., 1.9 ist erfüllt. Folglich existiert das F-Radikal R_F. Da zwei Kongruenzen S und T auf einem Ring A genau dann identisch sind, wenn die zugehörigen Ideale S^0 und T^0 von A übereinstimmen, so genügt es $\langle R_{F^0}\rangle^0 = R_F^0$ zu beweisen. Wegen $\langle R_{F^0}\rangle^0 = R_{F^0}$ ist also zu zeigen, daß $R_{F^0}(A) = R_F(A)^0$. Zunächst sei bemerkt, daß für eine Kongruenz S auf $A \in L$ stets folgendes gilt:

S ist F-regulär $\Longleftrightarrow$ S^0 ist F^0-regulär.

Denn für eine F-reguläre Kongruenz S hat man

$$u \in S^0 \Rightarrow (u, 0) \in S \Rightarrow (u, 0) \in F(u, 0) = F(u-0) \Rightarrow u \in F^0(u)\,.$$

Wenn umgekehrt S^0 F^0-regulär ist, so gilt

$$(u, v) \in S \Rightarrow u-v \in S^0 \Rightarrow u-v \in F^0(u-v) \Rightarrow (u, v) \in F(u-v) = F(u, v)\,.$$

Mit dieser Bemerkung erhält man für alle $a \in A$: $a \in R_F(A)^0 \Longleftrightarrow (a, 0) \in R_F(A) \Longleftrightarrow$ es existiert ein F-reguläres $S \in C(A)$ mit $a \in S^0 \Longleftrightarrow$ es existiert ein F^0-reguläres Ideal N von A mit $a \in N \Longleftrightarrow a \in R_{F^0}(A)$.

5.2. Es sei L eine Klasse von Gruppen und $P(x, y) = [x, y] \underset{\mathrm{Def}}{=} xyx^{-1}y^{-1}$. Dann ist z_A gleich dem Einselement e der Gruppe A und $L = L^0$. Die normalen P-Ideale sind genau die Normalteiler von A. Analog zu 5.1.1 beweist man

5.2.1. *Wenn R_{F^0} ein F^0-Radikal auf L ist, so ist $\langle R_{F^0}\rangle = R_F$ ein F-Radikal auf L für $F(a, b) = F(ab^{-1})$.*

5.3. Es sei L eine Klasse von Halbgruppen mit einer multiplikativ geschriebenen Operation und $P(x, y) = xy$. Offenbar existiert genau dann $z_A \in A$, wenn A ein Nullelement 0 (d.h. $a0 = 0a = 0$ für alle $a \in A$) besitzt, und dann ist $z_A = 0$. Daher besteht L^0 genau aus den Halbgruppen mit Null von L. Normale P-Ideale sind genau die Ideale von A im Sinne der Halbgruppentheorie. Ist N ein Ideal von A, so ist $\langle N\rangle$ die Reessche Kongruenz auf A.

5.4. Es sei L eine Klasse von Algebren und $P(x, y)$ die entsprechend den am Anfang dieses Abschnitts gemachten Bemerkungen aus einer dreistelligen positiven Formel abgeleitete binäre Operation. (Ein solches P existiert stets, und insbesondere auch dann, wenn Ω leer ist; man wähle beispielsweise $\varrho(x_0, x_1, x_2)$ gleich $(x_0 = x_1)$.) Wir setzen nun voraus, daß das Bild eines normalen P-Ideals von $A \in L$ bei einer homomorphen Abbildung $\varphi(A \to B) \in \Lambda$ stets wieder normal sei. (Dies ist in den Beispielen 5.1, 5.2 und 5.3 der Fall.) Gleichbedeutend damit ist offenbar Bedingung 2.6.b). Dann folgt Bedingung 3.2 schon aus 3.1. Denn ist $a\varphi \in N^\varphi = N\varphi$ für $a \in N \in C^0(A)$, $a \in F^0(a)$, so folgt aus 2.3.c) und 3.1, daß $a\varphi \in F^0(a)\varphi \subseteq \big(F(a)^\varphi\big)^0 = F(a\varphi)^0 = F^0(a\varphi)$.

Für $a \in A$ sei $G(a)$ die von der Menge $X_a = \big\{\big(Q(a, x), x\big)$, für $x \in A\big\}$ erzeugte Kongruenz auf A, wo $Q(x, y)$ (wie $P(x, y)$) aus einer positiven Formel abgeleitet ist.

5.4.1. *Unter der Voraussetzung* 2.6.b) *existiert das G^0-Radikal R_{G^0} auf L.*

Beweis. Wir haben noch Bedingung 3.1 nachzuweisen. Aus $\big(Q(a, x), x\big) \in G(a)$ für alle $x \in A$ folgt $\big(Q(a\varphi, y), y\big) \in G(a)\varphi \subseteq G(a)^\varphi$ für alle $\varphi(A \to B) \in \Lambda$ und alle $y \in B$, somit $G(a\varphi) \subseteq G(a)^\varphi$. Da $G(a\varphi)$ die von $X_a\varphi$ erzeugte Kongruenz auf B ist, so ist $X_a \subseteq G(a\varphi)\varphi^{-1}$. Da $G(a\varphi)\varphi^{-1}$ eine Kongruenz auf A und $G(a)$ die von X_a erzeugte Kongruenz ist, so ist $G(a) \subseteq G(a\varphi)\varphi^{-1}$ und $G(a)\varphi \subseteq G(a\varphi)$, also auch $G(a)^\varphi \subseteq G(a\varphi)$. Folglich besteht Gleichheit, $G(a\varphi) = G(a)^\varphi$.

R_{G^0} soll das Brown–McCoysche 0-Radikal auf L genannt werden. Im Fall der Ringe (Beispiel 5.1) ist $G(a)$ die kleinste Kongruenz auf A, so daß $ax - x \equiv 0 \bmod G(a)$; d.h., $G^0(a)$ ist das von $ax - x$ ($x \in A$) erzeugte Ideal von A. In diesem Fall ist daher $R_{G^0}(A)$ genau das Radikal im Sinne von Brown–McCoy [1], [2]. Zufolge 5.1.1 liefert das G-Radikal $R_G = \langle R_{G^0}\rangle$ (mit $G(a, b) = G(a-b)$) gerade die zu $R_{G^0}(A)$ gehörige Kongruenz auf A, d.h. $\langle R_{G^0}(A)\rangle = R_G(A)$.

Eine Algebra $A \in L$ heiße 0-einfach, wenn A außer A selbst und 0^0 keine 0-Kerne besitzt. Jede Algebra $A \in L$ besitzt offenbar höchstens ein Element e_A, so daß $P(e_A, x) = P(x, e_A) = x$ für alle $x \in A$. Mit diesen Bezeichnungen hat man:

5.4.2. *Ist $A \in L$ eine 0-einfache Algebra und $e_A \in A$, so ist $A \in (\mathrm{Ann}\, R_{G^0})^{i^0}$, falls $P = Q$.*

Beweis. Die Behauptung ist trivial für $|A| = 1$. Sei daher $|A| \geqslant 2$. Da $X_a = \mathbf{0}$ für $a = e_A$, so ist $G(e_A) = \mathbf{0}$ und $G^0(e_A) = \mathbf{0}^0$. Da $e_A^{(0)} \neq \mathbf{0}^0$, so ist $e_A^{(0)} = A$, $|e_A^{(0)}| \geqslant 2$, $e_A \notin G^0(e_A)$, und unsere Behauptung folgt nun aus 3.7.

6. Das Brown–McCoysche 0-Radikal für Halbgruppen. Es sei L eine gegenüber homomorphen Bildern abgeschlossene Klasse von Halbgruppen, Für $x, y \in A \in L$ bezeichne xy das Produkt von x und y in der Halbgruppe A. Für diese Klasse L soll im folgenden das in Beispiel 5.4 eingeführte Brown–McCoysche 0-Radikal R_{G^0} unter Spezialisierung von P, Q zu $P(x, y) = Q(x, y) = xy$ (vergl. Beispiel 5.3) näher untersucht werden. Da in diesem Fall Bedingung 2.6.b) erfüllt ist (vergl. die diesbezügliche Bemerkung in 5.4), so ist die Existenz des G^0-Radikals R_{G^0} nach 5.4.1 gesichert. Bezeichnet X_a für $a \in A$ die in 5.4 erklärte Erzeugendenmenge von $G(a)$ mit $Q(x, y) = xy$, also

$$X_a = \{(ax, x)\,,\ \text{für } x \in A\}\,,$$

und ist $\mu(a)$ die von X_a erzeugte Rechtskongruenz auf A, so besteht nach [10], S. 256. Lemma 1.1 die Beziehung

$$(u, v) \in \mu(a) \Longleftrightarrow \text{es existieren zwei ganze Zahlen } l,\ m \geqslant 0 \text{ mit } a^l u = a^m v\,.$$

Dabei sei $a^0 b = b$ für alle $b \in A$. Ferner sei A^1 die aus A durch Adjunktion eines Einselements (falls A kein Einselement besitzt) hervorgehende Halbgruppe. Da $G(a)$ die von X_a, also auch die von $\mu(a)$ erzeugte Kongruenz auf A ist, so gilt:

$(u, v) \in G(a) \Longleftrightarrow$ es existieren $n \geqslant 1$, $(u_i, v_i) \in \mu(a)$ und $x_i \in A^1$, $i = 1, \ldots, n$, so daß $u = x_1 u_1$, $v = x_n v_n$ und $x_{i+1} u_{i+1} = x_i v_i$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Enthält A ein Nullelement 0, so ist $u \in G^0(a)$ gleichbedeutend mit $(u, 0) \in G(a)$. Aus 3.7 folgt:

6.1. *Wenn die Halbgruppe $A \in L$ ein Nullelement besitzt, so sind folgende Aussagen einander gleichwertig:*

a) $A \in (\mathrm{Ann}\, R_{G^0})^{i^0}$;

b) *entweder ist $|A| = 1$ oder es existiert $J(A)$ und in $J(A)$ ein Element $a \neq 0$ mit folgender Eigenschaft: Wenn $xu = 0$, $a^m u = a^n v$, wobei $x, u, v \in A$ und $m, n \geqslant 0$, so ist stets $xv = 0$.*

In Übereinstimmung mit dem Begriff einer 0-einfachen Algebra aus 5.4 nennen wir eine Halbgruppe mit Null 0-einfach, wenn A außer A selbst und $\{0\}$ keine Ideale enthält.

6.2. *Eine 0-einfache Halbgruppe mit Null und ohne nilpotente Elemente $\neq 0$ gehört zu $(\mathrm{Ann}\, R_{G^0})^{i^0}$.*

Beweis. Da A keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ besitzt, so enthält A auch keine Nullteiler (vergl. [3], S. 71, Aufgabe 9. (a)). Sei $|A| \neq 1$ und $xu = 0$, $a^m u = a^n v$, wobei $a \neq 0$ und $xv \neq 0$. Dann ist $x \neq 0$ und $u = 0$, $a^m u = a^n v = 0$, also $v = 0$, im Widerspruch zu $xv \neq 0$. Damit folgt 6.2 aus 6.1.

6.3. *Eine vollständig 0-einfache Halbgruppe A mit Null* (im Sinne von [3], S. 76) *ist genau dann in $(\mathrm{Ann}\, R_{G^0})^{i^0}$ enthalten, wenn A keine von 0 verschiedenen nilpotenten Elemente besitzt, d.h., wenn die Sandwich-Matrix $P = (p_{ki})_{k \in K, i \in I}$ der zugehörigen isomorphen Darstellung von A als reguläre Matrizenhalbgruppe über einer Gruppe mit Null G aus lauter von 0 verschiedenen Elementen p_{ki} besteht.*

Beweis. Sei A diese reguläre Matrizenhalbgruppe über einer Gruppe mit adjungiertem Nullelement 0. Die Regularität bedeutet, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte von P wenigstens ein von 0 verschiedenes Element aus G vorkommt. Die Hinlänglichkeit der Bedingung folgt unmittelbar aus 6.2. Zum Nachweis der Notwendigkeit benutzen wir 6.1. Sei also 6.1.a) erfüllt. Dann existiert nach 6.1.b) (mit $J(A) = A$ im Fall $|A| \neq 1$) in A ein Element $(a)_{gh}$, wobei $a\ (\neq 0) \in G$, so daß aus $xu = 0$ und $(a)_{gh}^m u = (a)_{gh}^n v$ stets folgt $xv = 0$. Dann ist $(a)_{gh}$ sicher nicht nilpotent, also $p_{hg} \neq 0$. Wenn ein Index j mit $p_{hj} = 0$ existiert, so erfüllt $u = 0$, $v = (b)_{jl} \neq 0$, $x = (c)_{ik} \neq 0$ die Bedingungen $xu = 0$, $(a)_{gh}^m u = 0$, $(a)_{gh}^n v = \big((ap_{hg})^{n-1} ap_{hj} b\big)_{gl} = 0$. Daher muß sein $xv = (cp_{kj} b)_{il} = 0$. Dies bedeutet, daß $p_{kj} = 0$ sein muß. Da hierbei k beliebig ist, so ergibt sich ein Widerspruch zur Regularität von A. Daher ist $p_{hj} \neq 0$ für alle j. Angenommen, es existieren Indizes f, k mit $p_{kf} = 0$. Dann ist $xu = 0$, $(a)_{gh}^m u = (a)_{gh}^n v$ für $u = (d)_{fl} \neq 0$, $v = \big(p_{hj}^{-1} (p_{hg} a)^{m-n} p_{hf} d\big)_{jl}$, $x = (c)_{ik} \neq 0$ erfüllt. Es muß also $xv = \big(cp_{kj} p_{hj}^{-1} (p_{hg} a)^{m-n} p_{hf} d\big)_{il} = 0$, d.h. $p_{kj} = 0$ für alle k, j sein. Dies widerspricht sicher der Regularität. Somit ist in der Tat jedes Element der Matrix P von Null verschieden.

Für eine Halbgruppe A mit Null sei $\mathrm{rad}^0 A$ das maximale Nilideal von A, das ist die Gesamtheit aller eigentlich nilpotenten Elemente von A (vergl. [6]).

6.4. *Für eine Halbgruppe A mit Null gilt $\mathrm{rad}^0 A \subseteq R_{G^0}(A)$.*

Beweis. Für $b \in \mathrm{rad}^0 A$ und $a \in b^{(0)}$ existiert sicher ein $n \geqslant 1$, so daß $a^n a = a0 = 0$. Demnach ist $(a, 0) \in \mu(a) \subseteq G(a)$ und $a \in G^0(a)$, d.h. $b \in R_{G^0}(A)$ und $\mathrm{rad}^0 A \subseteq R_{G^0}(A)$.

An den vorstehenden Sätzen auffallend ist, daß stets die Existenz eines Nullelements vorausgesetzt wird (abgesehen von 5.4.2, wo dafür aber die Existens eines Elementes e_A gefordert wird, das im vorliegenden Fall das Einselement der Halbgruppe A darstellt). Da die Bedeutung des Brown–McCoyschen 0-Radikals für Halbruppen ohne Null (insbesondere in dem zu 6.3 analogen Fall einer vollständig einfachen Halbgruppe) noch weitgehend ungeklärt ist, werden wir im nächsten Abschnitt ausschließlich Halbgruppen mit Null betrachten.

7. Das Brown–McCoysche 0-Radikal eines Ideals einer Halbgruppe mit Null. Es sei L eine Klasse von Halbgruppen mit Null, die abgeschlossen ist gegenüber homomorphen Bildern, und die mit einer Halbgruppe A auch jedes Ideal von A enthält. Wie in Abschnitt 6 sei P zu $P(x,y)=xy$ spezialisiert. Ist A' ein Ideal von $A\in L$, so wollen wir zu Vermeidung von Mißverständnissen die der Halbgruppe $A'\in L$ zugeordnete Funktion $G\big(A'\to C(A')\big)$ mit G' bezeichnen, d.h., für $a\in A'$ ist $G'(a)$ die von $X'_a=\{(ax,x)$, wo x die Menge A' durchläuft$\}\subseteq A'\times A'$ erzeugte Kongruenz auf A'. Im Unterschied dazu bezeichne $G''(a)$ die von X'_a auf A erzeugte Kongruenz. Es gilt

$$G'(a)\subseteq G''(a)\subseteq G(a)\qquad \text{für alle } a\in A'.$$

Denn aus

$$G'(a)=\bigcap_{S'\in C(A'),X'_a\subseteq S'} S'\subseteq \bigcap_{S\in C(A),X'_a\subseteq S}(A'\times A')\cap S=(A'\times A')\cap G''(a)$$

folgt $G'(a)\subseteq G''(a)$, und wegen $X'_a\subseteq X_a$ ist $G''(a)\subseteq G(a)$. Ferner gilt

$$G'^0(a)\subseteq G^0(a)\qquad \text{für alle } a\in A'.$$

Denn aus $(u,0)\in G'(a)\subseteq G(a)$ folgt $u\in G^0(a)$.

7.1. *Für ein Ideal A' der Halbgruppe $A\in L$ gilt*

$$R_{G^0}(A')\subseteq A'\cap R_{G^0}(A).$$

Beweis. Sei $a\in N'=R_{G^0}(A')$. Wegen $a\in G'^0(a)\subseteq G^0(a)$ ist jedes Element von N' G^0-regulär. Da $A'N'A'\subseteq N'$, so ist erst recht jedes Element von $A'N'A'$ G^0-regulär, und da $A'N'A'$ ein Ideal von A ist, so hat man $A'N'A'\subseteq N=R_{G^0}(A)$ und, wegen $A'A\subseteq A'$ und $AA'\subseteq A'$, auch $A'(N'\cup AN'\cup N'A\cup AN'A)A'\subseteq A'N'A'\subseteq N$. Da $N'\subseteq A'$, so ist $M=N'\cup AN'\cup N'A\cup AN'A\subseteq A'$ und $M^3\subseteq A'MA'\subseteq N$. Bezeichnet M' das Bild von M bei der kanonischen Abbildung $A\to A/N$, so ist also M' ein nilpotentes Ideal von $A/R_{G^0}(A)$, und nach 6.4, 4.12 und 4.8 muß sein

$$M'\subseteq \operatorname{rad}^0(A/N)\subseteq R_{G^0}(A/N)=R_{G^0}\big(A/R_{G^0}(A)\big)=\{0\},$$

d.h. $M'=\{0\}$ und $N'\subseteq M\subseteq N$.

Aus 7.1 folgt unmittelbar:

7.2. *Mit A $(\in L)$ ist auch jedes Ideal von A G^0-radikalfrei.*

Für $Y_a=\{(xay,xy)$, wo $x,y\in A\}$ sei $H(a)$ die von Y_a erzeugte Kongruenz auf A. Dann gilt $H(a\varphi)=H(a)^\varphi$ für alle $a\in A$ und alle $\varphi(A\to B)\in\Lambda$. Denn einerseits hat man $Y_a\varphi\subseteq H(a\varphi)\Rightarrow Y_a\subseteq H(a\varphi)\varphi^{-1}\Rightarrow H(a)\subseteq H(a\varphi)\varphi^{-1}\Rightarrow H(a)\varphi\subseteq H(a\varphi)\Rightarrow Y_a\varphi\subseteq H(a)\varphi\subseteq H(a)^\varphi\subseteq H(a\varphi)$. Da andererseits $H(a\varphi)$ von $Y_a\varphi$ erzeugt wird, so ist besteht Gleichheit. Nach Konstruktion ist $H(a)\subseteq G(a)$ für alle $a\in A$. Wir setzen

$$H^0(a)\underset{\text{Def}}{=}\big(H(a)\big)^0.$$

Ist A' ein Ideal von A und $a\in A'$, so sei $H'(a)$ die von $Y'_a=\{(xay,xy)$, wo $x,y\in A'\}$ erzeugte Kongruenz auf A'.

7.3. *Wenn $AaA\subseteq H^0(a)$, so ist $H^0(a)=A^2$.*

Beweis. Sei $AaA\subseteq H^0(a)$ und $z\in H^0(a)$, also $(xay,z)\in H(a)$ für alle $x,y\in A$. Da auch $(xay,xy)\in H(a)$, so ist $(xy,z)\in H(a)$ und $A^2\subseteq H^0(a)$. Für $t\in A$ ist $zt\in H^0(a)$, also $(z,zt)\in H(a)$, d.h., es existieren Paare (u_i,v_i), $i=1,\ldots,n$, so daß $u_{i+1}=v_i$, $i=1,\ldots,n-1$, $u_1=z$, $v_n=zt$, und $u_i=v_i$ oder $(u_i,v_i)\in Y_a$ oder $(v_i,u_i)\in Y_a$. Wenn $u_i=v_i$ für alle i, so ist $z=zt$. Nun sei j die kleinste Zahl, so daß $u_j\neq v_j$. Dann ist $z=u_j$ und $(u_j,v_j)\in Y_a$ oder $(v_j,u_j)\in Y_a$, d.h. $u_j\in A^2$. Daher ist $z\in A^2$ und $H^0(a)\subseteq A^2$, somit $A^2=H^0(a)$.

7.4. *Ist A' ein Ideal von A, so gilt $H'^0(a)=A'^2$ für alle $a\in G^0(A)\cap A'$.*

Beweis. Es besteht für $a,s,t\in A'$ und $b,c\in A$ die Implikation $(b,c)\in G(a)\Rightarrow(sbt,sct)\in H'(a)$. Denn aus $(b,c)\in G(a)$ folgt die Existenz von Paaren (u_i,v_i), $i=1,\ldots,n$, so daß $u_1=b$, $v_1=c$, $u_{i+1}=v_i$, $i=1,\ldots,n-1$, und $u_i=v_i$ oder $(u_i,v_i)\in X_a\cup Y_a$ oder $(v_i,u_i)\in X_a\cup Y_a$. Für eine Teimenge $S\subseteq A\times A$ setzen wir abkürzend $sSt=\{(sut,svt)$, wo $(u,v)\in S\}$. Da $sX_at\subseteq Y'_a$ und $sY_at\subseteq Y'_a$, so folgt aus $su_it\neq sv_it$, daß $u_i\neq v_i$ und $(su_it,sv_it)\in s(X_a\cup Y_a)t\subseteq Y'_a$ oder $(sv_it,su_it)\in s(X_a\cup Y_a)t\subseteq Y'_a$. Da überdies $su_1t=sbt$, $sv_nt=sct$ und $su_{i+1}t=sv_it$, $i=1,\ldots,n-1$, so ist (sbt,sct) enthalten in der von Y'_a erzeugten Kongruenz $H'(a)$ auf A'. Insbesondere ergibt sich: $a\in G^0(a)\Rightarrow(a,0)\in G(a)\Rightarrow(sat,0)\in H'(a)\Rightarrow sat\in H'^0(a)$, d.h., es ist $A'aA'\subseteq H'^0(a)$, und nach 7.3 ist somit $H'^0(a)=A'^2$.

7.5. *Wenn $A\in L$ die Eigenschaft hat, daß für jedes Ideal A' von A mit $|A'|\geqslant 2$ ein surjektiver Homomorphismus $\varphi(A'\to B)$ mit $B\in\operatorname{Ann}R_{G^0}$ und $|B|\geqslant 2$ existiert, so ist $A\in\operatorname{Ann}R_{G^0}$.*

Beweis. Wählt man $A'=R_{G^0}(A)$ und ist $|A'|\geqslant 2$, so existiert nach Voraussetzung $\varphi(A'\to B)\in\Lambda$ mit $B\in\operatorname{Ann}R_{G^0}$ und $|B|\geqslant 2$. Sei $b\in B^2$. Dann existiert $a\in R_{G^0}(A)$ mit $b=a\varphi$. Wegen $a\in G^0(a)\cap A'$ ist nach 7.4 $H'^0(a)=A'^2$. Da $H'(a)\subseteq G'(a)$, so ist $A'^2=H'^0(a)\subseteq G'^0(a)$, und aus $(uv,0)\in G'(a)$ für $u,v\in A'$ folgt $(u\varphi v\varphi,0)=(uv,0)\varphi\in G'(a)\varphi\subseteq G'(a)^\varphi$ $=G(a\varphi)=G(b)$ und $b\in B^2\subseteq G^0(b)$. Demnach ist jedes Element von B^2 G^0-regulär und $B^2\subseteq R_{G^0}(B)=\{0\}$, d.h. $B\subseteq\operatorname{rad}^0 B\subseteq R_{G^0}(B)=\{0\}$ und

$B = \{0\}$, im Widerspruch zu $|B| \geqslant 2$. Daher ist die Annahme $|A'| \geqslant 2$ falsch und $R_{G^0}(A) = \{0\}$.

Aus 4.9, 4.12, 7.2 und 7.5 folgt:

7.6. *$\langle R_{G^0}\rangle$ ist ein M-Radikal* (im Sinne von [6], S. 365), *wenn für M die binäre Relation, $(A, B) \in M \Leftrightarrow B$ ist ein vom Nullideal verschiedenes Ideal von A, gewählt wird.*

Zufolge Satz 37 aus [6], S. 370 gilt daher:

7.7. $R_{G^0}(R_{G^0}(A)) = R_{G^0}(A)$.

Allgemeiner besteht der zu Theorem 4 aus [2], S. 498, analoge Satz:

7.8. *Wenn A' ein Ideal von $A \in L$ ist, so gilt $R_{G^0}(A') = A' \cap R_{G^0}(A)$.*

Bemerkung. Das entsprechende Resultat aus [2] (Theorem 4) wird dort unter wesentlicher Verwendung eines Lemmas ([2], S. 495, Lemma 1) bewiesen, das sich anscheinend nicht auf Halbgruppen übertragen läßt, da bei seinem Beweis gewisse Summen und Differenzen eine wichtige Rolle spielen. Da wir aber bereits die zu Lemma 2 bzw. Lemma 3 aus [2], S. 497, analogen Aussagen 7.3 und 7.4 beweisen konnten ohne im Besitz eines Analogons zu Lemma 1 aus [2] zu sein, so erscheint die Gültigkeit von 7.8 nicht mehr als besonders überraschend. Umgekehrt läßt sich aber der nachfolgende Beweis auch auf Ringe übertragen und stellt dann gegenüber dem Beweis von Theorem 4 aus [2] eine Vereinfachung dar.

Beweis von 7.8. Im Hinblick auf 7.1 ist nur noch die Inklusion

$$B \underset{\text{Def}}{=} A' \cap R_{G^0}(A) \subseteq R_{G^0}(A')$$

nachzuweisen. Für $a \in B^2$ hat man $a \in G^0(a) \cap A'$ und, nach 7.4, $a \in B^2 \subseteq A'^2 = H'^0(a) \subseteq G'^0(a)$. Daraus geht hervor, daß B^2, als Ideal von A', G'^0-regulär und $B^2 \subseteq R_{G_0}(A')$ ist. Für das Bild B' von B bei dem kanonischen Homomorphismus $A' \to A'/R_{G^0}(A')$ gilt daher $B'^2 = \{0\}$, d.h., es ist

$$B' \subseteq \mathrm{rad}^0\left(A'/R_{G^0}(A')\right) \subseteq R_{G^0}\left(A'/R_{G^0}(A')\right) = \{0\} \quad \text{und} \quad B \subseteq R_{G^0}(A').$$

Literaturverzeichnis

[1] B. Brown, N. H. McCoy, *Radicals and subdirect sums*, Amer, J. Math. 69 (1947), S. 46–58.

[2] — — *The radical of a ring*, Duke Math. J. 15 (1948), S. 495–499.

[3] A. H. Clifford, G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, I, Providence, R.I., 1961.

[4] P. M. Cohn, *Universal algebra*, New York, Evanston, and London, 1965.

[5] H. J. Hoehnke, *Einige neue Resultate über abstrakte Halbgruppen*, Colloq. Math. 14 (1966), S. 329–347.

[6] — *Radikale in allgemeinen Algebren*, Math. Nachr. 32 (1966), S. 347–383.

[7] A. I. Mal'cew, *Zur allgemeinen Theorie algebraischer Systeme* (Russisch), Mat. Sbornik 35 (77) (1954), S. 3–20.

[8] J. Schmidt, *Abgeschlossenheits- und Homomorphiebegriffe in der Ordnungstheorie*, Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin 3 (1953/54), S. 223–225.

[9] — *Zur Kennzeichnung der Dedekind–MacNeilleschen Hülle einer geordneten Hülle*, Arch. Math. (Basel) 7 (1956), S. 241–249.

[10] H. Seidel, *Über das Radikal einer Halbgruppe*, Math. Nachr. 29 (1965), S. 255–263.

[11] A. Suliński, *The Brown–McCoy radical in categories*, Fund. Math. 59 (1966), S. 23–41.

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN,
INSTITUTKOMPLEX MATHEMATIK,
INSTITUT FÜR REINE MATHEMATIK

Reçu par la Rédaction le 15. 8. 1967