Размерность метрических пространств и ретракция

Б. Т. Левшенко (Москва)

Не всякое замкнутое множество B метрического пространства X (даже если X — отрезок) является ретрактом пространства X. Свойство множества A быть ретрактом пространства X зависит как от топологических свойств самого множества A, так и от топологических свойств дополнения $G = X \setminus A$. В самом деле, если A гомеоморфно одному из кубов конечной размерности, или же гильбертовому параллелепипеду, то оно будет ретрактом любого объемлющего его пространства X. С другой стороны, если дополнение $G = X \setminus A$ нульмерно, то снова A будет ретрактом пространства X, независимо от природы множества A [5].

В настоящей работе нас интересует последняя возможность: охарактеризовать размерность дополнительного множества $G = X \setminus A$ с помощью ретрагирования [1]. Оказывается, это можно сделать следующим образом:

Теорема. *Пусть X — метрическое пространство, а G — открытое в нём множество. Для того, чтобы $\dim G \leqslant n$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого открытого в G множества H, отличного от G, нашлось бы такое замкнутое в H множество Φ размерности $\dim \Phi \leqslant n-1$, что $X \setminus \Phi$ можно ретрагировать на $X \setminus H$.*

Другими словами, это условие можно высказать так:

Дополнение $X \setminus H$ всякого открытого в G и отличного от G множества H является ретрактом пространства X с точностью до замкнутого в H множества Φ размерности меньшей чем n.

Следствие. *Для того, чтобы метрическое пространство X имело размерность $\dim X \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы всякое его непустое замкнутое множество A являлось бы ретрактом некоторого такого множества Γ, что $X \setminus \Gamma$ замкнуто в $X \setminus A$ и $\dim(X \setminus \Gamma) \leqslant n-1$.*

Перед доказательством сделаем два замечания.

Замечание 1. Условие теоремы достаточно для любого (не обязательно, открытого) множества G, но не является необходимым уже для столь простого случая, когда X — отрезок, а G — состоит из трех точек $(n-0)$.

(1) Постановка задачи принадлежит Ю. М. Смирнову.

Замечание 2. Условие следствия является достаточным для любых нормальных пространств, но не является необходимым уже для бикомпактов. В качестве примера можно взять бикомпакт Тихонова [1] являющийся произведением трансфинитных чисел $\leqslant \omega_1$ на компакт $Z = \{0\} \cup \cup \{1/n|\ n=1, 2, \ldots\}$.

Перейдем к доказательствам. Основною является следующая

Лемма 1. *Пусть X — метрическое пространство. Если G — открытое собственное подмножество пространства X и $\dim G \leqslant n$, то существует такое замкнутое в G множество Φ размерности $\dim \Phi \leqslant n-1$, что $X \setminus \Phi$ можно ретрагировать на $X \setminus G$.*

Доказательство. Для метрических пространств всегда имеет место равенство $\dim X = \operatorname{Ind} X$ [4, 6], причем размерность $\dim X$ можно определять не только с помощью конечных, но и с помощью бесконечных открытых покрытий [3]. Пусть мы находимся в условиях леммы и $A = X \setminus G$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ множество A имеет такие ε-окрестности ([2]), что размерность их границ не превосходит $n-1$. Следовательно, можно построить последовательность таких окрестностей U_k множества A, что $\dim \operatorname{Fr} U_k \leqslant n-1$ ([3]), $\overline{U}_{k+1} \subseteq U_k$ для любого k и что U_k является $1/k$-окрестностью множества A. Пусть $C_k = \overline{U}_{k-1} \setminus U_k$, где формально считаем, что $U_0 = X$ и $k = 1, 2, \ldots$ Все множества C_k замкнуты в X и в сумме составляют множество $G = X \setminus A$. Кроме того, объединение их границ $\bigcup \operatorname{Fr} C_k = \bigcup \operatorname{Fr} U_k$ замкнуто в G и имеет размерность $\leqslant n-1$ как сумма счетного числа $(n-1)$-мерных замкнутых множеств.

Заметим, что $\dim C_k \leqslant n$. Следовательно, для каждого k существует такое локально конечное $1/k$-покрытие ([4]) $\{V'_{k\alpha}\}$, что $\dim \operatorname{Fr} V'_{k\alpha} \leqslant n-1$. Его можно построить, например, так: взять произвольное локально конечное $1/k$-покрытие $\{W_{k\alpha}\}$, канонически вписать в него замкнутое покрытие $\{F_{k\alpha}\}$ и, используя равенство размерностей $\dim C_k = \operatorname{Ind} C_k$, найти такие множества $V'_{k\alpha}$, что $F_{k\alpha} \subset V'_{k\alpha} \subset W_{k\alpha}$ и $\dim \operatorname{Fr} V'_{k\alpha} \leqslant n-1$. Локальная конечность покрытия $\{V'_{k\alpha}\}$ вытекает из локальной конечности покрытия $\{W_{k\alpha}\}$. Заметим, что из локальной конечности покрытия $\{V'_{k\alpha}\}$ следует, что

$$\dim \Big(\bigcup_\alpha \operatorname{Fr} V'_{k\alpha}\Big) \leqslant n-1$$

и $\bigcup\limits_\alpha \operatorname{Fr} V'_{k\alpha}$ замкнуто в C_k (а значит, и в X).

Пусть теперь

$$\Phi = \bigcup_k \operatorname{Fr} U_k \cup \bigcup_{k\alpha} \operatorname{Fr} V'_{k\alpha} \quad \text{и} \quad O = X \setminus \Phi.$$

([2]) Окрестность U множества A будем называть *ε-окрестностью*, если $\varrho(x, A) < \varepsilon$ для любой точки $x \in U$.

([3]) Fr — граница множества.

([4]) Покрытие $\{U_\alpha\}$ называется *ε-покрытием*, если диаметр каждого его элемента $\operatorname{diam} U_\alpha < \varepsilon$.

Множество Φ замкнуто в G. Действительно, любая точка $x \in G$ находится на положительном расстоянии от A и поэтому имеет окрестность Ox, не пересекающуюся с U_k при $k > k_0$. Это значит, что счетная система замкнутых множеств

$$\{\operatorname{Fr} U_k, \bigcup_\alpha V'_{k\alpha}|\ k = 1, 2, \ldots\}$$

локально конечна в G, откуда получаем замкнутость их объединения Φ. Более того, $\dim \Phi \leqslant n-1$, так как

$$\dim \operatorname{Fr} U_k \leqslant n-1 \quad \text{и} \quad \dim \Big(\bigcup_\alpha \operatorname{Fr} V'_{k\alpha}\Big) \leqslant n-1 \quad \text{для всех } k.$$

Множество $O \setminus A = G \setminus \Phi$ открыто в X. Построим открытое покрытие $\{V_{k\alpha}\}$ множества $O \setminus A$ кратности 1. Для этого полагаем, что

$$V_0 = O \setminus \overline{U}_1 \quad \text{и} \quad V_{k\alpha} = O \cap \Big(V'_{k\alpha} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \overline{V}'_{k\beta}\Big)$$

для любого $k > 0$ (считая индекс α трансфинитным числом). Так как $O = X \setminus \Phi$, то

$$V_{k\alpha}\Big(V'_{k\alpha} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \overline{V}'_{k\beta}\Big) \setminus \Phi = \Big(V'_{k\alpha} \setminus \bigcup_k \operatorname{Fr} U_k\Big) \setminus \Big(\bigcup_{\beta<\alpha} \overline{V}'_{k\beta} \cup \bigcup_{k,\alpha} \operatorname{Fr} V_{k\alpha}\Big)$$

Но $V'_{k\alpha} \setminus \bigcup\limits_k \operatorname{Fr} U_k = V'_{k\alpha} \cap (U_k \setminus \overline{U}_{k+1})$ открыто в X, а $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \overline{V}'_{k\beta} \cup \bigcup\limits_{k,\alpha} \operatorname{Fr} V'^{\alpha}_k$ замкнуто в X. Следовательно, множество $V_{k\alpha}$ открыто в X. Заметим еще, что

$$\bigcup_\alpha V_{k\alpha} = \bigcup_\alpha \Big(V'_{k\alpha} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \overline{V}'_{k\beta}\Big) \setminus \Phi \supseteq \bigcup_\alpha V'_{k\alpha} \setminus \Phi = C_k \setminus \Phi.$$

Поэтому $\bigcup\limits_{k,\alpha} V_{k\alpha} \supseteq O$ и, значит, $\{V'_{k\alpha}\}$ — открытое покрытие множества O. Из построения множеств $V_{k\alpha}$ видно, что $V_{k\alpha} \cup V_{k'\alpha'} = \emptyset$ при $k \neq k'$ или $\alpha \neq \alpha'$.

Для определения ретрагирующего отображения $r\colon O \to A$ выберем такую систему точек $x_{k\alpha}$ из A (не обязательно различных), что $\varrho(x_{k\alpha}, y) < 2/k$ при всех $y \in V_{k\alpha}$. Для этого возьмём некоторую точку $y_{k\alpha} \in V_{k\alpha} \subseteq V'_{k\alpha}$ и найдем $x_{k\alpha}$ в A, удовлетворяющую условию $\varrho(x_{k\alpha}, y_{k\alpha}) < 1/k$. Так как $\operatorname{diam} V_{k\alpha} \leqslant \operatorname{diam} V'_{k\alpha} < 1/k$, то для всех точек $y \in V_{k\alpha}$ выполнено неравенство $\varrho(y, y_{k\alpha}) < 1/k$. Поэтому

$$\varrho(x_{k\alpha}, y) \leqslant \varrho(x_{k\alpha}, y_{k\alpha}) + \varrho(y_{k\alpha}, y) < 2/k.$$

Ретракцию $r(x)$ определим следующим равенством:

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A, \\ x_{k\alpha} & \text{если } x \in V_{k\alpha}. \end{cases}$$

Так как система $\{V_{k\alpha}\}$ имеет кратность 1, то отображение $r(x)$ определено корректно. Оно отображает множество O на A и неподвижно на A. Остается показать, что $r(x)$ непрерывно. Непрерывность отображения $r(x)$

в точках множества $G\setminus\Phi$ очевидна. Для доказательства непрерывности в точках множества A рассмотрим открытую в O ε-окрестность $O(x,\varepsilon)$ некоторой точки $x\in A$. Тогда $O(x,\varepsilon)\cap\overline{U}_k$ открыто в O. Возьмём k столь большим, что $2/k<\varepsilon$. Покажем теперь, что $r\big(O(x,\varepsilon)\cap U_k\big)\subseteq O(x,2\varepsilon)$. Тем самым мы докажем, что $r(x)$ непрерывно в точке x. В самом деле, имеем:

$$\varrho\big(r(x),r(y)\big)=\varrho\big(x,r(y)\big)\leqslant\varrho(x,y)+\varrho\big(y,r(y)\big)<\varepsilon+2/k<2\varepsilon\,.$$

Итак, лемма 1 доказана.

Замечание. Если A является окрестностным ретрактом пространства X, то в качестве O можно взять дополнение до границы Φ такой окрестности U множества A, которая ретрагируема на A и $\dim\Phi\leqslant n-1$. Действительно, если дана ретракция $r'\colon U\to A$, то ретракцию $r\colon O\to A$ пределим по формуле

$$r(x)=\begin{cases}r'(x) & \text{при}\quad x\in U\,,\\ x_0 & \text{при}\quad x\in X\setminus\overline{U}\,,\end{cases}$$

где x_0 — некоторая точка множества A.

Лемма 2. *Пусть X — нормальное пространство. Если всякое открытое в X множество H содержит такое замкнутое в H множество Φ, что $\dim\Phi\leqslant n-1$ $(\operatorname{Ind}\Phi\leqslant n-1)$ и $X\setminus\Phi$ ретрагируется на $X\setminus H$, то $\dim X\leqslant n$ (соотв. $\operatorname{Ind}X\leqslant n$).*

Доказательство. Пусть A и B — произвольные непересекающиеся замкнутые множества пространства X, а $H=X\setminus(A\cup B)$. По условию существует такое множество φ, замкнутое в H, что $\dim\Phi\leqslant n-1$ (соотв. $\operatorname{Ind}\Phi\leqslant n-1$) и $A\cup B$ является ретрактом множества $X\setminus\Phi$.

Обозначим через r какое-нибудь из отображений ретракции разности $X\setminus\Phi$ на сумму $A\cup B$. Нетрудно видеть, что множества $r^{-1}A$ и $r^{-1}B$ открыто-замкнуты в $X\setminus\Phi$ и не пересекаются. Следовательно, замыкание множества $r^{-1}A$ в X не пересекается с множеством B, т. е. $\overline{r^{-1}A}\cap B=\emptyset$, и аналогично, $\overline{r^{-1}B}\cap A=\emptyset$. В силу нормальности пространства X существуют открытые непересекающиеся множества U',V', для которых $A\subset U'$ и $\overline{U}'\cap\cap\overline{r^{-1}B}=\emptyset$, $B\subset V'$ и $\overline{V}'\cap\overline{r^{-1}A}=\emptyset$. Множества $U=U'\cup r^{-1}A$ и $V=V'\cup r^{-1}B$ открыты в X, так как Φ замкнуто в H. Кроме того, $U\cap V=\emptyset$. Значит, множество $C=X\setminus(U\cup V)$ замкнуто в пространстве X, разделяет множества A и B и целиком лежит в Φ. В силу монотонности размерности имеем: $\dim C\leqslant n-1$ $(\operatorname{Ind}C\leqslant n-1)$. Так как A и B — произвольные замкнутые непересекающиеся множества в X, то из достигнутого известным приемом выводится, что $\dim X\leqslant n$ [2]. То, что в соответствующем случае $\operatorname{Ind}X\leqslant n$ — не требует доказательства.

Доказательство теоремы. Необходимость следует из леммы 1. Действительно, в силу монотонности размерности: $\dim H\leqslant\dim G\leqslant n$. Значит, существует замкнутое в H множество Φ размерности $\dim\Phi\leqslant n-1$ такое, что $X\setminus\Phi$ ретрагируемо на $X\setminus H$.

Для доказательства достаточности возьмём произвольное замкнутое в X множество A, содержащиеся в G, и любую его окрестность U, не пересекающуюся с $X\setminus G$. Замкнутое множество $B=X\setminus U$ содержит множество $X\setminus G$ и не пересекается с A. По условию теоремы найдется такое замкнутое в $X\setminus(A\cup B)$ множество Φ, что $\dim\Phi\leqslant n-1$ и что $X\setminus\Phi$ ретрагируется на $A\cup B$. Так же как и в лемме 2 легко показать, что в этом случае множества A и B можно разделить замкнутым множеством C размерности $\dim C\leqslant n-1$. Таким образом для любого замкнутого в X множества A, лежащего в G, и его окрестности U, также лежащей в G, существует замкнутое множество C размерности $\leqslant n-1$, разделяющее A и $G\setminus U$. В рассматриваемом случае, когда X — метризуемо, этого вполне достаточно, чтобы получить искомое неравенство $\dim G\leqslant n$. Теорема доказана.

Я очень признателен Ю. М. Смирнову, общение с которым поддерживало меня во многие трудные минуты и без которого эта работа так и не была бы написана.

Цитированная литература

[1] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и функций*, Москва 1948.

[2] E. Čech, *Příspěvek k teorii dimense*, Časopis pro matem. a fysiky, část matem., 62.8 (1933), стр. 277-291.

[3] C. Dowker, *Mapping theorems for non-compact spaces*, Amer. J. Math. 69 (1947), стр. 200-242.

[4] М. Катетов, *О размерности метрических пространств*, ДАН СССР 79, № 1 (1951), стр. 189-191.

[5] Б. Т. Левшенко и Ю. М. Смирнов, *Proc. 2 Symp. in Prague*, Prague 1966.

[6] K. Morita, *Normal families and dimension theory for metric spaces*, Math. Ann. 128 (1954), стр. pp. 350-362.

Reçu par la Rédaction le 15. 5. 1967