Berandungen gruppentheoretischer Eigenschaften

von

Reinhold Baer und **Annemarie Schlette** (Frankfurt a. M.)

Die Betrachtung der „Randeigenschaften" in der Theorie der endlichen Gruppen wird durch die Untersuchung solcher Gruppen nahegelegt, die eine gewisse gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{e}$ nicht erfüllen, während alle ihre echten Untergruppen dies tun. Diese minimalen nicht-$\mathfrak{e}$-Gruppen bilden die kleinste „Randklasse" zu der Eigenschaft $\mathfrak{e}$. Explizite Bestimmungen solcher Klassen findet man z.B. bei Rédei [6], [7], [8] für Kommutativität und Nilpotenz und bei Baer [2] für σ-Verstreutheit. Allgemein heiße die gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{b}$ ein *Rand* von $\mathfrak{e}$, wenn gilt:

Ist jede echte Untergruppe einer Gruppe G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe oder eine $\mathfrak{b}$-Gruppe (oder beides).

Ist etwa $\mathfrak{e}$ eine der Eigenschaften Kommutativität, Nilpotenz, Überauflösbarkeit, σ-Verstreutheit, ist weiter $\mathfrak{b}$ Auflösbarkeit oder Nicht-Perfektheit, so besagen der Satz von Iwasawa-Rédei-Schmidt und seine Verallgemeinerungen, daß $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{b}$ berandet wird; vgl. auch Baer ([1], S. 172, Corollary 1) oder Huppert ([4], S. 429, Satz 22).

Von den Rändern werden diejenigen hervorgehoben, die im wesentlichen abgeschlossen sind unter der Bildung epimorpher Bilder: Die gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{b}$ heißt ein *Rand* von $\mathfrak{e}$ im engeren Sinne, wenn gilt:

Ist eine Gruppe G keine $\mathfrak{e}$-Gruppe, während alle ihre echten Untergruppen $\mathfrak{e}$-Gruppen sind, so ist jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G eine $\mathfrak{b}$-Gruppe.

In den Abschnitten 1 und 2 werden die Ränder (Satz 1.1) und die Ränder im engeren Sinne (Satz 2.1) charakterisiert.

In den folgenden Abschnitten wird an die Eigenschaft $\mathfrak{b}$ eine zusätzliche Forderung gestellt: $\mathfrak{b}$ heiße *einfache Eigenschaft*, falls gilt:

Eine Gruppe G ist dann und nur dann eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, wenn es wenigstens ein einfaches epimorphes Bild von G gibt, das eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist.

Dies ist eine Verallgemeinerung von 'Nicht-Perfektheit' (s. § 3). Von den einfachen Eigenschaften ausgehend, gelangt man zu dem Begriff der $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit (§ 4), der mit dem Begriff der Auflösbarkeit zusammenfällt, falls $\mathfrak{b}$ die Eigenschaft ist, nicht perfekt zu sein.

Durch diese Zusatzvoraussetzung an die Eigenschaft $\mathfrak{b}$ können die Aussagen der Sätze 1.1 und 2.1 verschärft werden (Sätze 3.2 und 4.5) und man erhält Strukturaussagen über die „innere" Eigenschaft $\mathfrak{e}$ (Sätze 3.3 und 4.6).

Ist $\mathfrak{b}$ eine einfache Eigenschaft, so ist jede $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppe eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, aber nicht jede $\mathfrak{b}$-Gruppe ist $\mathfrak{b}$-auflösbar. Das führt zu der Eigenschaft $\mathfrak{b}^*$:

Eine Gruppe G ist genau dann eine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe, wenn jede $\mathfrak{b}$-Untergruppe von G eine $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppe ist.

Nach Definition ist $\mathfrak{b}$ ein Rand von $\mathfrak{b}^*$.

Satz 5.2 gibt eine Charakterisierung der minimalen nicht-$\mathfrak{b}^*$-Gruppen. Diese führt zu Satz 5.3: Ist $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit eine (untergruppenvererbliche) n-Eigenschaft, so ist $\mathfrak{b}^*$ eine $(n+1)$-Eigenschaft. Falls die Vermutung von Burnside richtig ist, daß sich jede einfache Gruppe von 2 Elementen erzeugen läßt, dann ist $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit für jede einfache Eigenschaft $\mathfrak{b}$ eine 2-Eigenschaft (Zusatz 5.4). Ist $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit eine 1-Eigenschaft, so kann $\mathfrak{b}^*$ eine 1- oder eine 2-Eigenschaft sein (Bemerkung 5.5, (A)). Es bleibt offen, ob $\mathfrak{b}^*$ eine 3- oder eine 2-Eigenschaft ist, wenn $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit eine 2-Eigenschaft ist (Bemerkung 5.5, (B)).

§ 6 beschäftigt sich mit der Berandung von „Erweiterungseigenschaften" $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$: Eine Gruppe ist eine $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$-Gruppe, wenn sie einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler mit $\mathfrak{f}$-Faktorgruppe besitzt. Es werden Kriterien dafür angegeben, daß $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{b}$ berandet wird, falls $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{b}$ berandet wird (Sätze 6.2 und 6.3).

Bezeichnungen. Eine gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{a}$ bestimme eindeutig eine Unterklasse der Klasse aller endlichen Gruppen. Mit $\mathfrak{a}$ werde daher sowohl die Eigenschaft als auch die durch sie bestimmte Gruppenklasse bezeichnet. Es werden nur nichttriviale Eigenschaften betrachtet, dh. solche, für die die zugehörigen Gruppenklassen nicht leer sind.

Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gruppentheoretische Eigenschaften, ist jede $\mathfrak{x}$-Gruppe eine $\mathfrak{y}$-Gruppe, so schreiben wir $\mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{y}$.

$\mathfrak{x} \cap \mathfrak{y}$ (bzw. $\mathfrak{x} \cup \mathfrak{y}$) sei die Klasse all der Gruppen, die in $\mathfrak{x}$ und (bzw. oder) in $\mathfrak{y}$ enthalten sind.

Alle betrachteten Gruppen sind endlich.

1. Randeigenschaften. $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{b}$ seien (nichttriviale) gruppentheoretische Eigenschaften, und die 1 sei eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Dann ist $\mathfrak{b}$ ein *Rand* von $\mathfrak{e}$ (oder: $\mathfrak{e}$ wird von $\mathfrak{b}$ berandet), falls gilt:

(′) *Ist jede echte Untergruppe einer Gruppe G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe oder eine $\mathfrak{b}$-Gruppe (oder beides).*

Bezeichnet $\mathfrak{e}_U$ ($\subseteq \mathfrak{e}$) die Klasse all der Gruppen, deren sämtliche Untergruppen $\mathfrak{e}$-Gruppen sind, so ist $\mathfrak{e}_U$, weil die 1 eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist, eine nichttriviale untergruppenvererbliche Eigenschaft und aus (′) folgt:

Genau dann wird $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{b}$ berandet, wenn $\mathfrak{e}_U$ von $\mathfrak{b}$ berandet wird.

Bei der Betrachtung der (′) erfüllenden Eigenschaftenpaare $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$ kann man sich also o.B.d.A. auf untergruppenvererbliche Eigenschaften $\mathfrak{e}$ beschränken. Über $\mathfrak{b}$ wird zunächst nichts weiter vorausgesetzt. Häufig wird noch nicht einmal die 1 eine $\mathfrak{b}$-Gruppe sein.

Satz 1.1. *Ist $\mathfrak{e}$ untergruppenvererblich, so sind die folgenden Aussagen über das Eigenschaftenpaar $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$ äquivalent:*

(1) *$\mathfrak{b}$ ist ein Rand von $\mathfrak{e}$.*

(2) *Ist jede $\mathfrak{b}$-Untergruppe einer Gruppe G, von deren maximalen Normalteilern wenigstens einer eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist, selbst eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist auch G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

(3) *Ist jede $\mathfrak{b}$-Untergruppe einer Gruppe G, deren maximale Normalteiler sämtlich die Eigenschaft $\mathfrak{e}$ haben, selbst eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist auch G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

(4) *Eine Gruppe G ist (dann und nur dann) eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, wenn jede $\mathfrak{b}$-Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist.*

(5) *Es gibt eine Eigenschaft $\mathfrak{f}$, so daß G dann und nur dann eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist, wenn jede $\mathfrak{b}$-Untergruppe von G eine $\mathfrak{f}$-Gruppe ist.*

Beweis. Angenommen, es gebe ein Eigenschaftenpaar $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$ (mit $1 \in \mathfrak{e}$), das die Bedingung (1) erfüllt, aber (2) nicht erfüllt. Dann gibt es eine Gruppe G, die keine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist, aber folgender Bedingung genügt:

(+) *Jede $\mathfrak{b}$-Untergruppe von G, die wenigstens einen maximalen Normalteiler besitzt, der die Eigenschaft $\mathfrak{e}$ hat, ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

Unter den Untergruppen von G, die keine $\mathfrak{e}$-Gruppen sind, gibt es eine K kleinster Ordnung. Jede echte Untergruppe von K ist dann eine $\mathfrak{e}$-Gruppe und K wegen (1) eine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Da die 1 eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist, ist $K \neq 1$ und besitzt also einen maximalen Normalteiler, der als echte Untergruppe eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Das ist ein Widerspruch zu (+). Also folgt (2) aus (1).

Die Aussage (3) ist in (2) und (4) in (3) enthalten.

(5) folgt aus (4) mit $\mathfrak{f} = \mathfrak{e}$ und der Untergruppenvererblichkeit von $\mathfrak{e}$.

Gilt (5), ist jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe und G keine $\mathfrak{b}$-Gruppe, so ist jede $\mathfrak{b}$-Untergruppe U von G verschieden, also eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Anwendung von (5) — auf U — zeigt, daß U eine $\mathfrak{f}$-Gruppe ist. Also ist jede $\mathfrak{b}$-Untergruppe von G eine $\mathfrak{f}$-Gruppe, und G wegen (5) eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Daher ist $\mathfrak{b}$ ein Rand von $\mathfrak{e}$ und es gilt (1).

Damit ist Satz 1.1 bewiesen.

Diskussion 1.2. Ist jede echte Untergruppe einer Gruppe G abelsch, so folgt aus dem Satz von Iwasawa-Schmidt, daß G auflösbar ist. Also ist 'auflösbar' ein Rand von 'abelsch', und aus Satz 1.1, (2) folgt

(A) *Die Gruppe G ist abelsch, wenn alle auflösbaren Untergruppen von G mit einem abelschen, maximalen Normalteiler abelsch sind.*

Ist in G der Normalisator jeder abelschen Untergruppe gleich deren Zentralisator, so gilt die Bedingung von (A): Wäre nämlich eine auflösbare Untergruppe U von G mit abelschem, maximalem Normalteiler M nicht abelsch, so wäre M gleich dem Zentrum von U und U hätte eine zyklische Zentrumsfaktorgruppe. Aber solche Gruppen sind abelsch. Daher gilt:

(B) *Die Gruppe G ist abelsch, wenn der Normalisator jeder abelschen Untergruppe von G gleich deren Zentralisator ist.*

Dies ist ein Kommutativitätskriterium von Zassenhaus (s. [12], p. 61, Theorem 7). Umgekehrt folgt aus dem Kommutativitätskriterium von Zassenhaus die Behauptung (A). Folglich beinhaltet die Äquivalenz von (1) und (2) von Satz 1.1 die Äquivalenz der Sätze von Iwasawa-Schmidt (in der schwachen Form) und von Zassenhaus.

Lemma 1.3. $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *seien gruppentheoretische Eigenschaften.*

(a) *Wird $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{b}$ berandet, so wird jede Eigenschaft $\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{y} \subseteq \mathfrak{x}$ und $1 \in \mathfrak{y}$ von $\mathfrak{x} \cup \mathfrak{b}$ berandet.*

(b) *Wird $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{b}$ berandet, so wird $\mathfrak{x}$ von jeder Eigenschaft $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}$ berandet.*

(c) *Mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ist auch $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ ein Rand von $\mathfrak{x}$.*

Beweis. (a): Sei G keine $\mathfrak{y}$-Gruppe, während jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{y}$-Gruppe ist. Wegen $\mathfrak{y} \subseteq \mathfrak{x}$ ist dann jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{x}$-Gruppe, und da $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{b}$ berandet wird, ist nach Definition G eine $\mathfrak{x}$-Gruppe oder eine $\mathfrak{b}$-Gruppe.

(b) und (c) folgen sofort aus der Definition (').

2. Ränder im engeren Sinne.

$\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{b}$ seien wieder (nichttriviale) Eigenschaften und die 1 sei eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Dann heißt $\mathfrak{b}$ *ein Rand von $\mathfrak{e}$ im engeren Sinne*, wenn gilt:

('') *Ist eine Gruppe G keine $\mathfrak{e}$-Gruppe, während alle ihre echten Untergruppen $\mathfrak{e}$-Gruppen sind, so ist jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G eine $\mathfrak{b}$-Gruppe.*

Eigenschaftenpaare $\mathfrak{e}, \mathfrak{b}$, die ('') erfüllen, erfüllen auch ('). Definiert man $\mathfrak{e}_U$ wie in Abschnitt 1, so folgt aus (''):

Genau dann wird $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{b}$ im engeren Sinne berandet, wenn $\mathfrak{e}_U$ von $\mathfrak{b}$ im engeren Sinne berandet wird.

Also kann man sich auch hier o.B.d.A. auf untergruppenvererbliche Eigenschaften $\mathfrak{e}$ beschränken.

Satz 2.1. *Ist $\mathfrak{e}$ untergruppenvererblich, so sind die folgenden Eigenschaften des Eigenschaftenpaares $\mathfrak{e}, \mathfrak{b}$ äquivalent:*

(1) *$\mathfrak{e}$ wird von $\mathfrak{b}$ im engeren Sinne berandet.*

(2) *Ist in einer Gruppe G jede Untergruppe, deren von 1 verschiedene epimorphe Bilder sämtlich $\mathfrak{b}$-Gruppen sind, eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

(3) *Existiert ein $\mathfrak{e}$-Normalteiler N von G derart, daß jede N enthaltende Untergruppe U von G mit $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe U/N eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

Beweis. Es gelte (1). Angenommen, hieraus folge (2) nicht. Dann gibt es ein (1) erfüllendes Eigenschaftenpaar $\mathfrak{e}, \mathfrak{b}$ und eine Gruppe G derart, daß G keine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist und daß gilt:

(+) *Jede Untergruppe von G, deren von 1 verschiedene epimorphe Bilder sämtlich $\mathfrak{b}$-Gruppen sind, ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

Unter den Untergruppen von G, die keine $\mathfrak{e}$-Gruppen sind, gibt es eine K kleinster Ordnung. Dann ist jede echte Untergruppe von K eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, und wegen (1) ist jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von K eine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Also folgt wegen (+), daß K doch eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß (2) aus (1) folgt.

Es gelte (2) und G sei eine Gruppe mit

(++) *Es gibt einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler N von G derart, daß jede N enthaltende Untergruppe X von G mit $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe X/N eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist.*

U sei eine Untergruppe von G, deren sämtliche von 1 verschiedenen epimorphen Bilder $\mathfrak{b}$-Gruppen sind. Zu zeigen ist $U \in \mathfrak{e}$: Für $U \subseteq N$ folgt $U \in \mathfrak{e}$ wegen der Untergruppenvererblichkeit von $\mathfrak{e}$. Für $U \nsubseteq N$ ist

$$UN/N \simeq U/(U \cap N)$$

als von 1 verschiedenes epimorphes Bild von U eine $\mathfrak{b}$-Gruppe. (++) liefert $UN \in \mathfrak{e}$ und hieraus folgt $U \in \mathfrak{e}$. Bedingung (2) zeigt jetzt, daß G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist und damit ist bewiesen, daß (3) aus (2) folgt.

Es gelte (3) und G sei eine Gruppe, die keine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist, deren echte Untergruppen aber $\mathfrak{e}$-Gruppen sind. Ein Normalteiler $N \neq G$ von G ist dann eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Wäre G/N keine $\mathfrak{b}$-Gruppe, so wäre jede N enthaltende Untergruppe U von G mit $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe U/N als echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe und aus (3) folgte, daß G, im Widerspruch zur Annahme, eine $\mathfrak{e}$-Gruppe wäre. Also ist G/N eine $\mathfrak{b}$-Gruppe und Satz 2.1 ist bewiesen.

Satz 2.2. *Dann und nur dann wird jede von $\mathfrak{b}$ berandete Eigenschaft von $\mathfrak{b}$ im engeren Sinne berandet, wenn alle von 1 verschiedenen epimorphen Bilder einer jeden $\mathfrak{b}$-Gruppe ebenfalls $\mathfrak{b}$-Gruppen sind.*

Beweis. Ist $\mathfrak{b}$ ein Rand von $\mathfrak{e}$ und vererbt sich $\mathfrak{b}$ auf epimorphe Bilder $\neq 1$, so gilt — wegen Satz 1.1, (1) — Bedingung (1) von Satz 2.1. Also ist dann $\mathfrak{b}$ ein Rand von $\mathfrak{e}$ im engeren Sinne.

Angenommen, es gibt eine $\mathfrak{b}$-Gruppe G, von deren von 1 verschiedenen epimorphen Bildern wenigstens eines keine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Es sei $\mathfrak{a}$ die Eigenschaft, einer echten Untergruppe von G isomorph zu sein, und eine Gruppe X sei genau dann eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, wenn gilt: Jede $\mathfrak{b}$-Untergruppe von X ist eine $\mathfrak{a}$-Gruppe. Nach Satz 1.1 ist dann $\mathfrak{b}$ ein Rand von $\mathfrak{e}$. Da G keine $\mathfrak{a}$-Gruppe, aber eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist, ist G keine $\mathfrak{e}$-Gruppe, aber jede echte Untergruppe von G ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Es gibt aber von 1 verschiedene epimorphe Bilder von G, die keine $\mathfrak{b}$-Gruppen sind, so daß $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{b}$ wegen Satz 2.1, (1,2) nicht im engeren Sinne berandet wird.

Damit ist Satz 2.2 bewiesen.

3. Einfache Ränder. Eine *einfache Gruppe* ist eine Gruppe $E \neq 1$, deren einzige Normalteiler 1 und E sind. Die gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{b}$ möge *einfach* heißen, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

Die Gruppe G ist dann und nur dann eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, wenn es wenigstens ein einfaches epimorphes Bild von G gibt, das eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist.

Für eine einfache Eigenschaft $\mathfrak{b}$ sind dann alle $\mathfrak{b}$-Gruppen von 1 verschieden und die Klasse aller $\mathfrak{b}$-Gruppen ist durch Vorgabe der einfachen $\mathfrak{b}$-Gruppen bestimmt.

Sind zum Beispiel die einfachen $\mathfrak{b}$-Gruppen genau die zyklischen Gruppen von Primzahlordnung, so ist $\mathfrak{b}$ die Eigenschaft, nicht perfekt zu sein (eine Gruppe G heißt *nicht perfekt*, wenn die Kommutatorgruppe G' von G verschieden ist). Ist eine Gruppe $G \neq 1$ nicht perfekt, so kann G einfache epimorphe Bilder besitzen, die perfekt sind, z.B., wenn G das direkte Produkt $G = A \otimes B$ einer einfachen, nicht-abelschen Gruppe A und einer auflösbaren Gruppe $B \neq 1$ ist.

(3.1) *Ist $\mathfrak{b}$ eine einfache Eigenschaft, so gilt:*

(a) *Ist G/M eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, so auch G.*

(b) *Direkte Produkte von $\mathfrak{b}$-Gruppen sind $\mathfrak{b}$-Gruppen.*

(c) *Äquivalent sind:*

(i) *$\mathfrak{b}$ vererbt sich auf Untergruppen $\neq 1$;*

(ii) *$\mathfrak{b}$ vererbt sich auf epimorphe Bilder $\neq 1$;*

(iii) *Alle einfachen Gruppen sind $\mathfrak{b}$-Gruppen;*

(iv) *Alle Gruppen $\neq 1$ sind $\mathfrak{b}$-Gruppen.*

Beweis. Ist G/M eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, so gibt es einen Normalteiler N/M von G/M mit einfacher $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe $(G/N)/(N/M) \cong G/N$, und nach Definition ist dann auch G eine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Also gilt (a).

(b) ist ein Spezialfall von (a).

(c): Die Äquivalenz von (iii) und (iv) ist klar, und natürlich folgen (i) und (ii) aus (iv). Angenommen, (iii) folgt nicht aus (i) oder (ii). Dann gibt es eine einfache Gruppe A, die keine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Da $\mathfrak{b}$ nicht trivial ist, gibt es eine einfache $\mathfrak{b}$-Gruppe B und nach Definition ist $A \otimes B$ eine

$\mathfrak{b}$-Gruppe. Sowohl aus (i) als auch aus (ii) folgt nun der Widerspruch, daß A eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Damit ist (c) gezeigt und (3.1) bewiesen.

Satz 3.2. *Ist $\mathfrak{b}$ einfach und $\mathfrak{e}$ untergruppenvererblich, so sind die olgenden Eigenschaften des Paares $\mathfrak{e}, \mathfrak{b}$ äquivalent:*

(1) *$\mathfrak{b}$ ist ein Rand von $\mathfrak{e}$.*

(2) *Ist jede Untergruppe U von G mit $\mathfrak{e}$-Normalteiler V und einfacher $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe U/V eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist G selbst eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

(3) *Ist jede Untergruppe U von G, von deren einfachen epimorphen Bildern wenigstens eines eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist, eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist G selbst eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

Beweis. Würde (2) nicht aus (1) folgen, so gäbe es eine Gruppe G minimaler Ordnung mit folgenden Eigenschaften:

(a) *G ist keine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

(b) *Jede Untergruppe U von G mit $\mathfrak{e}$-Normalteiler V und einfacher $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe U/V ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

Da jede echte Untergruppe von G ebenfalls (b) erfüllt, folgt aus der Minimalität von G:

(c) *Echte Untergruppen von G sind $\mathfrak{e}$-Gruppen.*

Da $\mathfrak{e}$ wegen (1) von $\mathfrak{b}$ berandet wird, ergibt Kombination von (a) und (c) mit Satz 1.1, daß G eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Aus der Einfachheit von $\mathfrak{b}$ folgt die Existenz eines Normalteilers N von G mit einfacher $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe G/N. Wegen (c) ist N eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Also folgt aus (b), daß G, im Widerspruch zu (a), eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Dh. (2) folgt aus (1).

(3) folgt als schwächere Aussage aus (2).

Da $\mathfrak{b}$ einfach ist, liefert (3) die Bedingung (4) von Satz 1.1. Also ist $\mathfrak{b}$ ein Rand von $\mathfrak{e}$.

Damit ist Satz 3.2 bewiesen.

Ist $\mathfrak{b}$ die einfache Eigenschaft, nicht perfekt zu sein, so erhält man aus Satz 3.2:

Satz 3.3. *Die folgenden Eigenschaften der untergruppenvererblichen Eigenschaft $\mathfrak{e}$ sind äquivalent:*

(1) *Ist G keine $\mathfrak{e}$-Gruppe, aber jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist wenigstens eine maximale Untergruppe von G ein Normalteiler von G.*

(2) *G ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, wenn $\{U, x\}$ für jede $\mathfrak{e}$-Untergruppe U von G und jedes U normalisierende Element x aus G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist.*

(3) *G ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, wenn alle nichtperfekten Untergruppen von G schon $\mathfrak{e}$-Gruppen sind.*

Bemerkung 3.4. Wegen Bedingung (2) von Satz 3.3 erfüllen z.B. alle 1-Eigenschaften (wie „p-Gruppe sein" oder „vom Exponenten n

sein" usw. — Definition siehe Seite 15) die äquivalenten Bedingungen des Satzes.

Weiter genügt die Eigenschaft "Gruppe mit abelschen Sylowuntergruppen sein" den Bedingungen.

Für $\mathfrak{e} =$ 'kommutativ sein' liefert der Satz von Zassenhaus die Gültigkeit von [1] und für $\mathfrak{e} =$ 'Nilpotenz' liefert der Satz von Iwasawa-Schmidt die Gültigkeit von [3]; siehe auch Diskussion 1.2.

Die Eigenschaft, auflösbar zu sein, genügt nicht der Bedingung (1), wie die sog. minimalen einfachen Gruppen zeigen.

ZUSATZ 3.5. *Genügt* $\mathfrak{e}$ *den äquivalenten Bedingungen von Satz* 3.3, *ist jede* $\mathfrak{e}$*-Gruppe auflösbar, so gilt: Ist jede echte Untergruppe von* G *eine* $\mathfrak{e}$*-Gruppe, so ist* G *auflösbar.*

Beweis. Ist jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist entweder G selbst eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, also auflösbar, oder es folgt aus Satz 3.3, (1) die Existenz einer maximalen Untergruppe M von G, die gleichzeitig Normalteiler ist. Dann ist M eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, also auflösbar, und G/M ist zyklisch von Primzahlordnung, sodaß auch G auflösbar ist.

4. $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit. In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{b}$ stets eine einfache Eigenschaft.

Für jede Gruppe G sei $G^{\mathfrak{b}}$ der Durchschnitt aller Normalteiler X von G mit einfacher $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe G/X. Diese '$\mathfrak{b}$-*Ableitung*' $G^{\mathfrak{b}}$ von G ist eine charakteristische Untergruppe von G. Weiter ist dann und nur dann $G = G^{\mathfrak{b}}$ (in Worten: G ist $\mathfrak{b}$-perfekt), wenn G keine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist.

Die höheren Ableitungen $G^{\mathfrak{b}(i)}$ von G werden induktiv durch die Regel

$$G = G^{\mathfrak{b}(0)}, \qquad G^{\mathfrak{b}(i+1)} = (G^{\mathfrak{b}(i)})^{\mathfrak{b}}$$

definiert. Das durch $G^{\mathfrak{b}(n)} = G^{\mathfrak{b}(n+1)}$ gekennzeichnete Schlußglied der $\mathfrak{b}$-Ableitungsreihe von G werde mit $G^{\mathfrak{b}(\infty)}$ bezeichnet, und die Gruppe G heiße $\mathfrak{b}$-*auflösbar*, wenn $G^{\mathfrak{b}(\infty)} = 1$, dh. also, wenn fast alle $\mathfrak{b}$-Ableitungen von G gleich 1 sind.

Jede $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppe $\neq 1$ ist eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, aber nicht jede $\mathfrak{b}$-Gruppe ist $\mathfrak{b}$-auflösbar. Einfache $\mathfrak{b}$-Gruppen sind stets $\mathfrak{b}$-auflösbar.

Aus dem Satz von Jordan-Hölder folgt:

(4.1) *Die Gruppe* G *ist dann und nur dann* $\mathfrak{b}$*-auflösbar, wenn alle ihre Kompositionsfaktoren einfache* $\mathfrak{b}$*-Gruppen sind.*

Aus (4.1) folgt:

(4.2) *Stets ist* $G/G^{\mathfrak{b}(\infty)}$ *eine* $\mathfrak{b}$*-auflösbare und* $G^{\mathfrak{b}(\infty)}$ *eine* $\mathfrak{b}$*-perfekte Gruppe.*

$\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit vererbt sich auf Normalteiler, auf epimorphe Bilder und auf Erweiterungen, aber i.a. nicht auf Untergruppen, wie das folgende Resultat zeigt:

LEMMA 4.3. *Dann und nur dann vererbt sich* $\mathfrak{b}$*-Auflösbarkeit auf Untergruppen, wenn einfache Faktoren einfacher* $\mathfrak{b}$*-Gruppen* $\mathfrak{b}$*-Gruppen sind.*

Hierbei werde unter einem *Faktor* der Gruppe G irgendein epimorphes Bild irgendeiner Untergruppe von G verstanden.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar, weil $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppen $\neq 1$ stets $\mathfrak{b}$-Gruppen sind.

Seien umgekehrt einfache Faktoren einfacher $\mathfrak{b}$-Gruppen wieder $\mathfrak{b}$-Gruppen. Angenommen, hieraus folge nicht, daß sich $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit auf Untergruppen vererbt. Dann gibt es unter den $\mathfrak{b}$-auflösbaren Gruppen, deren Untergruppen nicht alle $\mathfrak{b}$-auflösbar sind, eine Gruppe G kleinster Ordnung. Wären die von 1 verschiedenen Untergruppen von G alle $\mathfrak{b}$-Gruppen, so wären sie alle $\mathfrak{b}$-auflösbar, entgegen der Wahl von G. Für G gilt also:

(a) G *ist* $\mathfrak{b}$*-auflösbar;*

(b) *Es gibt eine Untergruppe* U *von* G*, die keine* $\mathfrak{b}$*-Gruppe ist.*

Mit G ist jedes seiner epimorphen Bilder $\mathfrak{b}$-auflösbar. Gäbe es einen Normalteiler N von G mit $1 \neq N \neq G$, so wäre die Ordnung von G/N echt kleiner als die von G und wegen der minimalen Wahl von G wären die Untergruppen von G/N alle $\mathfrak{b}$-auflösbar. Also wäre auch

$$U/(N \cap U) \simeq NU/N \subseteq G/N$$

$\mathfrak{b}$-auflösbar und hieraus folgte $U \in \mathfrak{b}$. Das widerspricht (b) und zeigt

(c) G *ist einfach.*

Ist schließlich N ein maximaler Normalteiler von U, so ist U/N als einfacher Faktor der einfachen $\mathfrak{b}$-Gruppe G nach Voraussetzung eine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Aus der Einfachheit von $\mathfrak{b}$ folgt $U \in \mathfrak{b}$, und dieser Widerspruch zeigt die Gültigkeit von Lemma 4.3.

SATZ 4.4. *Ist* $\mathfrak{b}$ *eine einfache Eigenschaft und* $\mathfrak{e}$ *eine untergruppenvererbliche Eigenschaft* $\mathfrak{b}$*-auflösbarer Gruppen, so sind die folgenden Eigenschaften von* $\mathfrak{e}, \mathfrak{b}$ *äquivalent:*

(1) $\mathfrak{b}$ *ist ein Rand von* $\mathfrak{e}$ *im engeren Sinne.*

(2) $\mathfrak{b}$ *ist ein Rand von* $\mathfrak{e}$.

(3) *Ist eine Gruppe* G *keine* $\mathfrak{e}$*-Gruppe, während jede ihrer echten Untergruppen eine* $\mathfrak{e}$*-Gruppe ist, so ist* G *eine* $\mathfrak{b}$*-auflösbare Gruppe.*

Beweis. Daß (2) aus (1) folgt, ist klar.

Gilt (2), ist G keine $\mathfrak{e}$-Gruppe, während jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist, so ist G, wegen Satz 1.1 eine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Aus der Einfachheit von $\mathfrak{b}$ folgt die Existenz eines Normalteilers N von G mit einfacher $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe G/N. Dann ist N eine echte Untergruppe von G, also eine $\mathfrak{e}$-Gruppe und insbesondere $\mathfrak{b}$-auflösbar. Als Erweiterung der $\mathfrak{b}$-auflösbaren Gruppe N durch die $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppe G/N ist dann G eine $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppe. Also ist (3) eine Folge von (2).

Schließlich gelte (3). Da jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild einer $\mathfrak{b}$-auflösbaren Gruppe $\mathfrak{b}$-auflösbar und also eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist, folgt Bedingung (1) von Satz 2.1 aus (3), dh. (3) impliziert (1).

Damit ist Satz 4.4 bewiesen.

Satz 4.5. *Ist $\mathfrak{b}$ eine einfache Eigenschaft und $\mathfrak{e}$ untergruppenvererblich, so sind die folgenden Eigenschaften von $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$ äquivalent:*

(1) *$\mathfrak{b}$ ist ein Rand von $\mathfrak{e}$ im engeren Sinn.*

(2) *Ist jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, gibt es einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler N von G mit $G = NG^{\mathfrak{b}(\infty)}$, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

(3) *Ist jede Untergruppe von G, deren einfache epimorphe Bilder sämtlich $\mathfrak{b}$-Gruppen sind, eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

Beweis. (1)$\to$(2): Jede echte Untergruppe von G sei eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, und es gebe einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler N von G mit $G = NG^{\mathfrak{b}(\infty)}$.

Ist erstens $G = N$, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Ist zweitens $G = G^{\mathfrak{b}(\infty)}$, so ist G — nach (4.2) — eine $\mathfrak{b}$-perfekte Gruppe, also keine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Da $\mathfrak{b}$, wegen (1), ein Rand von $\mathfrak{e}$ ist, ist G auch in diesem Falle eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.

Sei schließlich $G \neq N$ und $G \neq G^{\mathfrak{b}(\infty)}$. Dann ist

$$1 \neq G/N \cong G^{\mathfrak{b}(\infty)}/(N \cap G^{\mathfrak{b}(\infty)}) .$$

Mit $G^{\mathfrak{b}(\infty)}$ ist auch jedes seiner epimorphen Bilder $\mathfrak{b}$-perfekt. Also gibt es von 1 verschiedene epimorphe Bilder von G, die keine $\mathfrak{b}$-Gruppen sind. Wegen (1) ist $\mathfrak{b}$ ein Rand von $\mathfrak{e}$ im engeren Sinne; daher zeigt Satz 2.1, daß G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist.

(2)$\to$(3): Angenommen, es gebe ein Eigenschaftenpaar $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$, das (2), aber nicht (3) erfüllt. Dann gibt es eine Gruppe G minimaler Ordnung mit

(i) *G ist keine $\mathfrak{e}$-Gruppe,*

(ii) *jede Untergruppe von G, deren einfache epimorphe Bilder sämtlich $\mathfrak{b}$-Gruppen sind, ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

Bedingung (ii) vererbt sich auf Untergruppen, daher folgt aus der minimalen Wahl von G:

(iii) *Echte Untergruppen von G sind $\mathfrak{e}$-Gruppen.*

Wäre G eine $\mathfrak{b}$-perfekte Gruppe so wäre $G = 1 \cdot G^{\mathfrak{b}(\infty)}$ mit dem $\mathfrak{e}$-Normalteiler 1 von G und wegen (2) wäre G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, im Widerspruch zu (i). Daher ist G nicht $\mathfrak{b}$-perfekt und es gilt

(iv) *G ist eine $\mathfrak{b}$-Gruppe.*

Wegen (i) und (ii) gibt es ein einfaches epimorphes Bild G/M von G, das keine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist, und dieses ist nach (iv) von G verschieden. M ist als maximaler Normalteiler von G echt in G enthalten, wegen (iii) also eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Wäre $G^{\mathfrak{b}(\infty)} \subseteq M$, so würde aus der $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit von $G/G^{\mathfrak{b}(\infty)}$ — siehe (4.2) — folgen, daß G/M eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch und der Maximalität von M folgt $G = MG^{\mathfrak{b}(\infty)}$, und (2) zeigt, daß G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Dies ist ein Widerspruch zu (i) und daher ist (3) eine Folge von (2).

(3)$\to$(1): Sei G keine $\mathfrak{e}$-Gruppe aber jede echte Untergruppe von G sei eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Sei M ein maximaler Normalteiler von G. Als echte Untergruppe von G ist M eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Wäre G/M keine $\mathfrak{b}$-Gruppe, so wäre G wegen (3) eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Also ist jedes einfache, und wegen (3.1, a) jedes epimorphe Bild $\neq 1$ von G eine $\mathfrak{b}$-Gruppe und (1) folgt aus (3). Damit ist Satz 4.5 bewiesen.

Ist $\mathfrak{b}$ die einfache Eigenschaft, nicht perfekt zu sein, so erhält man aus Satz 4.5:

Satz 4.6. *Die folgenden Eigenschaften der untergruppenvererblichen Eigenschaft $\mathfrak{e}$ sind äquivalent:*

(1) *Ist G keine $\mathfrak{e}$-Gruppe, aber jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist jedes einfache epimorphe Bild von G abelsch.*

(2) *Ist jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, gibt es einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler E von G mit $G = EG^{(\infty)}$, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

(3) *Ist jede Untergruppe von G, deren einfache epimorphe Bilder abelsch sind, eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

Bezeichnung. $G^{(\infty)}$ ist für $G^{\mathfrak{b}(\infty)}$ gesetzt, wenn $\mathfrak{b}$ die Eigenschaft, nicht perfekt zu sein, ist. Dann ist $G^{(\infty)} = 1$ genau dann, wenn G auflösbar ist.

Bemerkung 4.7. Jede Eigenschaft, die die Bedingungen von Satz 4.6 (Satz 4.5) erfüllt, erfüllt auch die Bedingungen von Satz 3.3 (Satz 3.2).

Wegen Satz 4.4 gilt: Genügt $\mathfrak{e}$ den Bedingungen von Satz 3.3 (Satz 3.2) und ist jede $\mathfrak{e}$-Gruppe $\mathfrak{b}$-auflösbar, so erfüllt $\mathfrak{e}$ auch die Bedingungen von Satz 4.6 (Satz 4.5).

Zusatz 4.8. *Ist $\mathfrak{e}$ untergruppen- und epimorphismenvererblich und $\mathfrak{b}$ einfach, so sind die folgenden Eigenschaften von $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$ äquivalent:*

(1) *$\mathfrak{e}$ wird von $\mathfrak{b}$ im engeren Sinne berandet.*

(2) (a) *Ist N ein $\mathfrak{e}$-Normalteiler von G mit $\mathfrak{e}$-Faktorgruppe G/N, ist jede N enthaltende Untergruppe U von G mit $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe U/N eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

(b) *Einfache Gruppen, deren echte Untergruppen $\mathfrak{e}$-Gruppen sind, sind $\mathfrak{e}$-Gruppen oder $\mathfrak{b}$-Gruppen.*

(3) (a) *Ist N ein $\mathfrak{e}$-Normalteiler von G, ist G/N eine einfache $\mathfrak{b}$-perfekte $\mathfrak{e}$-Gruppe, sind alle echten Untergruppen von G ebenfalls $\mathfrak{e}$-Gruppen, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

(b) *Einfache Gruppen, deren echte Untergruppen $\mathfrak{e}$-Gruppen sind, sind $\mathfrak{e}$-Gruppen oder $\mathfrak{b}$-Gruppen.*

Bemerkung. Gibt es keine einfachen $\mathfrak{b}$-perfekten $\mathfrak{e}$-Gruppen — z.B. wenn alle $\mathfrak{e}$-Gruppen $\mathfrak{b}$-auflösbar sind — so ist (3.a) leer erfüllt, kann fortgelassen werden.

Beweis. Wenn (1) gilt, ist (2.a) ein Spezialfall von Satz 2.1, (3) und (2.b) ein Spezialfall von (1). Also folgt (2) aus (1).

Es gelte (2). Sei N ein $\mathfrak{e}$-Normalteiler von G mit einfacher $\mathfrak{b}$-perfekter $\mathfrak{e}$-Faktorgruppe G/N und jede echte Untergruppe von G sei eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Ist dann U eine Untergruppe von G mit $N \subseteq U$ und $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe U/N, so muß U/N echt in G/N, und folglich U echt in G enthalten sein. Es folgt, daß U eine $\mathfrak{e}$-Untergruppe von G ist. Anwendung von (2.a) zeigt, daß G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Also gilt (3.a) und da die Aussagen (3.b) und (2.b) identisch sind, ist (3) eine Folge von (2).

Schließlich gelte (3). Die Gruppe G sei keine $\mathfrak{e}$-Gruppe, aber jede echte Untergruppe von G sei eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Wäre nicht jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, so gäbe es einen maximalen Normalteiler M von G mit einfacher Faktorgruppe G/M, die keine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist, da ja $\mathfrak{b}$ einfach ist. Da epimorphe Bilder von $\mathfrak{e}$-Gruppen wieder $\mathfrak{e}$-Gruppen sind, und da jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist, ist jede echte Untergruppe von G/M eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Anwendung von (3.b) zeigt, daß G/M eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, also eine einfache $\mathfrak{b}$-perfekte $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Wegen $M \subset G$ ist M ein $\mathfrak{e}$-Normalteiler. (3.a) zeigt, daß G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch folgt, daß jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Also gilt Satz 2.1, (1) und hieraus folgt (1).

Damit ist Zusatz 4.8 bewiesen.

Satz 4.5, (2.b) legt die Frage nahe, wann Produkte von $\mathfrak{e}$-Normalteilern wieder $\mathfrak{e}$-Normalteiler sind. Im allgemeinen kann man dies nicht erwarten: Produkte abelscher Normalteiler brauchen nicht abelsch zu sein.

Hilfssatz 4.9. *Ist $\mathfrak{b}$ eine einfache Eigenschaft, so sind Produkte $\mathfrak{b}$-perfekter Normalteiler wieder $\mathfrak{b}$-perfekt.*

Beweis. Sei $P = QR$ das Produkt seiner $\mathfrak{b}$-perfekten Normalteiler Q und R. Ein maximaler Normalteiler M von P kann nicht gleichzeitig Q und R enthalten; o.B.d.A. sei $Q \nsubseteq M$. Dann folgt $P = QM$ aus der Maximalität von M. Also ist

$$P/M \cong Q/(Q \cap M).$$

Mit P/M ist auch $Q/(Q \cap M)$ einfach und aus der $\mathfrak{b}$-Perfektheit von Q folgt, daß P/M keine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Dies zeigt die $\mathfrak{b}$-Perfektheit von P und beweist Hilfssatz 4.9.

Satz 4.10. *Ist $\mathfrak{b}$ eine einfache Eigenschaft und $\mathfrak{e}$ untergruppenvererblich, so sind die folgenden Eigenschaften von $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}$ äquivalent:*

(1) (a) *$\mathfrak{e}$ wird von $\mathfrak{b}$ berandet;*

(b) *Produkte von (zwei) $\mathfrak{e}$-Normalteilern sind $\mathfrak{e}$-Gruppen.*

(2) (a) *$\mathfrak{e}$ wird von $\mathfrak{b}$ im engeren Sinne berandet;*

(b) *Ist $G = AB$ das Produkt zweier $\mathfrak{e}$-Normalteiler A und B von G, ist A oder B nicht $\mathfrak{b}$-perfekt, so ist G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe.*

Beweis. Es gelte (1). Die Bedingung (2.b) folgt aus (1.b). Weiter sei jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, und N sei ein $\mathfrak{e}$-Normalteiler von G mit $G = NG^{\mathfrak{b}(\infty)}$. Ist G eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, so ist $G^{\mathfrak{b}(\infty)}$ als echte Untergruppe ein $\mathfrak{e}$-Normalteiler von G und mit (1.b) folgt, daß G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Ist G keine $\mathfrak{b}$-Gruppe, so folgt aus (1.a), daß G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Dies zeigt die Gültigkeit der Bedingung (2) von Satz 4.5 und damit gilt die gegenwärtige Bedingung (2.a). Also folgt (2) aus (1).

Umgekehrt gelte (2). Dann ist (1.a) eine Abschwächung von (2.a). Sei $G = AB$ das Produkt zweier $\mathfrak{e}$-Normalteiler A und B von G. Ist A oder B nicht $\mathfrak{b}$-perfekt, so folgt aus (2.b), daß G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Daher seien im folgenden A und B beide $\mathfrak{b}$-perfekt. Wegen Hilfssatz 4.9 ist dann auch G eine $\mathfrak{b}$-perfekte Gruppe. Sei U eine Untergruppe von G mit $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe U/A. Dann folgt aus der Einfachheit von $\mathfrak{b}$ die Existenz eines einfachen epimorphen Bildes von U/A und U, das eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Also ist U nicht $\mathfrak{b}$-perfekt. Aus $A \subseteq U \subseteq AB = G$ und dem Dedekindschen Modulsatz folgt $U = A(B \cap U)$. Wäre $B \cap U$ eine $\mathfrak{b}$-perfekte Gruppe, so folgte aus der $\mathfrak{b}$-Perfektheit von A und Hilfssatz 4.9 die $\mathfrak{b}$-Perfektheit von U. Dies widerspricht der Wahl von U. Also ist der Normalteiler $B \cap U$ von U nicht $\mathfrak{b}$-perfekt. Er ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe als Untergruppe von B, und Anwendung von (2.b) zeigt, daß U eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Wegen (2.a) kann Satz 2.1, (3) angewandt werden: G ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, und es gilt (1.b).

Damit ist Satz 4.10 bewiesen.

5. Gruppen mit $\mathfrak{b}$-auflösbaren $\mathfrak{b}$-Untergruppen.

Satz 5.1. *Die folgenden Eigenschaften der einfachen Eigenschaft $\mathfrak{b}$ sind äquivalent:*

(1) *Jede [einfache] Gruppe ist eine $\mathfrak{b}$-Gruppe.*

(2) *Jede Gruppe ist $\mathfrak{b}$-auflösbar.*

(3) *Jede $\mathfrak{b}$-Gruppe ist $\mathfrak{b}$-auflösbar.*

(4) *$\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit wird von $\mathfrak{b}$ berandet.*

Vgl. auch (3.1), (c).

Beweis. Es ist klar, daß (2) aus (1) und (3) aus (2) folgt.

Angenommen, (1) folge nicht aus (3). Dann gibt es eine [einfache] Gruppe A, die keine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Ist B eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, so ist das direkte Produkt $A \otimes B$ eine $\mathfrak{b}$-Gruppe und wegen (3) $\mathfrak{b}$-auflösbar. Als Normalteiler von $A \otimes B$ ist A auch $\mathfrak{b}$-auflösbar. Also ist A eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, und dieser Widerspruch zeigt, daß (1) aus (3) folgt.

Daß (4) aus (2) folgt, ist trivial.

Gilt (1) nicht, so gibt es einfache Gruppen, die keine $\mathfrak{b}$-Gruppen sind und unter diesen gibt es eine E kleinster Ordnung. Ist U eine echte Untergruppe von E, so ist jeder Kompositionsfaktor von U eine einfache Gruppe, deren Ordnung kleiner als die von E ist. Die Kompositionsfaktoren von U sind also $\mathfrak{b}$-Gruppen, so daß U eine $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppe ist. E selbst ist nicht $\mathfrak{b}$-auflösbar, da E sein einziger Kompositionsfaktor, aber keine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Also ist E keine $\mathfrak{b}$-Gruppe und nicht $\mathfrak{b}$-auflösbar, während jede echte Untergruppe von E eine $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppe ist. Anwendung von Satz 1.1, (1) zeigt, daß $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit nicht von $\mathfrak{b}$ berandet wird: (1) folgt aus (4), und (1)-(4) sind äquivalent.

Satz 5.1 legt es nahe, folgende Eigenschaft $\mathfrak{b}^*$ (für einfache Eigenschaften $\mathfrak{b}$) zu untersuchen:

Eine Gruppe G ist genau dann eine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe, wenn jede $\mathfrak{b}$-Untergruppe von G eine $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppe ist.

Satz 1.1, (5) zeigt, daß $\mathfrak{b}$ ein Rand von $\mathfrak{b}^*$ ist.

Satz 5.2. *Ist $\mathfrak{b}$ eine einfache Eigenschaft, sind Untergruppen $\mathfrak{b}$-auflösbarer Gruppen wieder $\mathfrak{b}$-auflösbar, so sind folgende Eigenschaften der Gruppe G äquivalent:*

(1) *G ist keine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe, aber jede echte Untergruppe von G ist eine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe.*

(2) *Es gibt einen und nur einen Normalteiler M von G mit folgenden Eigenschaften:*

(A) *G/M ist eine einfache $\mathfrak{b}$-Gruppe von Primzahlordnung;*

(B) *M ist eine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe, aber nicht $\mathfrak{b}$-auflösbar;*

(C) *Jede maximale Untergruppe $\neq M$ von G ist $\mathfrak{b}$-auflösbar.*

Beweis. Gilt (1), so folgt, weil $\mathfrak{b}$ ein Rand von $\mathfrak{b}^*$ ist:

(a) *G ist eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, aber nicht $\mathfrak{b}$-auflösbar.*

Da $\mathfrak{b}$ einfach ist, gibt es also einen (maximalen) Normalteiler M von G mit

(b) *G/M ist eine einfache $\mathfrak{b}$-Gruppe.*

Wegen (1) ist also M eine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe. Wäre M eine $\mathfrak{b}$-Gruppe, so wäre M damit $\mathfrak{b}$-auflösbar, und es folgte aus (b), daß auch G, im Widerspruch zu (a), $\mathfrak{b}$-auflösbar wäre. Also gilt

(c) *M ist eine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe, aber keine $\mathfrak{b}$-Gruppe.*

M ist in einer maximalen Untergruppe U von G enthalten. Angenommen, M ist echt in U enthalten. Dann ist U nicht $\mathfrak{b}$-auflösbar, weil es M nicht ist. Als echte Untergruppe von G ist U eine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe und daher keine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Also gibt es kein einfaches epimorphes Bild von U, das eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. G/M ist als einfache $\mathfrak{b}$-Gruppe $\mathfrak{b}$-auflösbar. Daher ist auch die Untergruppe $U/M \neq 1$ von G/M eine $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppe und also eine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Mit (3.1, a) folgt hieraus $U \in \mathfrak{b}$. Dieser Widerspruch zeigt

(d) *M ist eine maximale Untergruppe von Primzahlindex in G.*

Sei nun U eine maximale Untergruppe $\neq M$ von G. Dann ist $G = MU$ und

$$U/(U \cap M) \cong UM/M \cong G/M$$

ist eine einfache $\mathfrak{b}$-Faktorgruppe von U, wegen (b). Also ist U eine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Als echte Untergruppe von G ist U eine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe wegen (1), und daher gilt

(e) *Jede maximale Untergruppe $\neq M$ von G ist $\mathfrak{b}$-auflösbar.*

Mit (a)-(e) ist gezeigt, daß (2) aus (1) folgt.

Umgekehrt gelte (2). Da $\mathfrak{b}^*$ untergruppenvererblich ist, ist wegen (2.B) und (2.C) jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe, und wegen (2.A) ist G eine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Aber G ist nicht $\mathfrak{b}$-auflösbar, denn M ist nicht $\mathfrak{b}$-auflösbar, (2.B). Also ist G keine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe und (2) impliziert (1).

Damit ist Satz 5.2 bewiesen.

Die gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{e}$ heiße eine *n-Eigenschaft* (n eine positive ganze Zahl), wenn gilt:

G ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, wenn jede von n [oder weniger] Elementen erzeugte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist.

Ist $\mathfrak{b}_n$ die Eigenschaft, von n Elementen erzeugt zu sein, und $\mathfrak{e}$ eine Eigenschaft, die insbesondere von der 1 erfüllt wird, so besagt Satz 1.1:

Dann und nur dann wird $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{b}_n$ berandet, wenn $\mathfrak{e}$ eine n-Eigenschaft ist.

1-Eigenschaften sind z.B. die Eigenschaften p-Gruppe sein, vom Exponenten n sein, und 2-Eigenschaften sind Nilpotenz, σ-Verstreutheit, Auflösbarkeit, Kommutativität, Überauflösbarkeit u.a. Hier kann man also von der berandeten Eigenschaft auf die Randeigenschaft schließen.

Satz 5.3. *Ist $\mathfrak{b}$ eine einfache Eigenschaft und $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit untergruppenvererblich, ist $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit eine n-Eigenschaft, so ist $\mathfrak{b}^*$ eine $(n+1)$-Eigenschaft.*

Beweis. Wäre der Satz falsch, so gäbe es eine Gruppe G kleinster Ordnung mit den Eigenschaften

(a) *G ist keine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe;*

(b) *Jede von $(n+1)$ (oder weniger) Elementen erzeugte Untergruppe von G ist eine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe.*

Da jede Untergruppe von G die Bedingung (b) erfüllt, folgt aus der Minimalität von G:

(c) *Echte Untergruppen von G sind $\mathfrak{b}^*$-Gruppen.*

Weil $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit untergruppenvererblich ist, folgt dann aus (a), (c) und Satz 5.2:

(d) *Es gibt einen Normalteiler $M \neq G$ von G, der nicht $\mathfrak{b}$-auflösbar ist und jede nicht in M enthaltene echte Untergruppe von G ist $\mathfrak{b}$-auflösbar.*

Kombination von (a) und (b) ergibt weiter

(e) *G wird nicht von $n+1$ Elementen erzeugt.*

Wären alle von n Elementen erzeugten Untergruppen von M sogar $\mathfrak{b}$-auflösbar, so wäre M selbst $\mathfrak{b}$-auflösbar, weil $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit nach Voraussetzung eine n-Eigenschaft ist. Dies widerspricht aber (d). Also gibt es eine von n Elementen erzeugte Untergruppe N von M, die nicht $\mathfrak{b}$-auflösbar ist. Da M eine echte Untergruppe von G ist, gibt es ein nicht in M enthaltenes Element g in G. Die Untergruppe $\{N, g\}$ wird von $n+1$ Elementen erzeugt, ist wegen (e) also von G verschieden; sie ist nicht in M enthalten und daher wegen (d) $\mathfrak{b}$-auflösbar. Hieraus folgt die $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit von N und dieser Widerspruch beweist Satz 5.3.

ZUSATZ 5.4. *$\mathfrak{b}$ sei eine einfache Eigenschaft und $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit vererbe sich auf Untergruppen. Werden alle einfachen Gruppen von n $(n \geqslant 2)$ Elementen erzeugt, dann ist $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit eine n-Eigenschaft.*

(Falls insbesondere alle einfachen Gruppen von 2 Elementen erzeugt werden können, ist $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit stets eine 2-Eigenschaft.)

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, dann gäbe es eine Gruppe G minimaler Ordnung, die selbst nicht $\mathfrak{b}$-auflösbar wäre, aber deren sämtliche von n Elementen erzeugte Untergruppen $\mathfrak{b}$-auflösbar wären. Insbesondere wird dann G nicht von n Elementen erzeugt und alle echten Unter- und Faktorgruppen von G sind $\mathfrak{b}$-auflösbar. Hätte G einen von 1 und G verschiedenen Normalteiler N, so wäre G mit N und G/N eine $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppe. Also ist G eine einfache Gruppe und als solche nach Voraussetzung von n Elementen erzeugt. Dieser Widerspruch beweist Zusatz 5.4.

Bemerkung 5.5. (A) p und q seien zwei Primzahlen und p teile $q-1$. Weiter sei σ eine Menge von Primzahlen, die p enthält, aber q nicht enthält und $\mathfrak{b}_\sigma$ sei die einfache Eigenschaft, definiert durch folgende Regel:

Die Gruppe G ist dann und nur dann eine $\mathfrak{b}_\sigma$-Gruppe, wenn wenigstens ein einfaches epimorphes Bild von G eine σ-Gruppe ist.

Dann ist eine Gruppe dann und nur dann $\mathfrak{b}_\sigma$-auflösbar, wenn sie eine σ-Gruppe ist. Also ist $\mathfrak{b}_\sigma$-Auflösbarkeit eine untergruppenvererbliche 1-Eigenschaft.

Ist nun G die nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq, so hat G, wegen $p|(q-1)$ einen Normalteiler vom Index p, ist also eine $\mathfrak{b}_\sigma$-Gruppe, aber wegen $q \notin \sigma$ ist G nicht $\mathfrak{b}_\sigma$-auflösbar. Jede zyklische Untergruppe von G ist eine $\mathfrak{b}_\sigma^*$-Gruppe. Das zeigt:

$\mathfrak{b}_\sigma^*$ ist nach Satz 5.3 zwar eine 2-Eigenschaft, aber keine 1-Eigenschaft.

(B) Ist $\mathfrak{b}$ die einfache Eigenschaft, daß wenigstens ein einfaches epimorphes Bild einer Gruppe zyklisch ist, so ist $\mathfrak{b}$-Auflösbarkeit genau Auflösbarkeit. Dies ist eine untergruppenvererbliche 2-Eigenschaft [John Thompson]. Eine Gruppe G ist in diesem Fall genau dann eine $\mathfrak{b}^*$-Gruppe, wenn alle ihre Untergruppen entweder perfekt oder auflösbar sind. Nach Folgerung 5.3 ist $\mathfrak{b}^*$ eine 3-Eigenschaft. Es ist nicht entschieden, ob $\mathfrak{b}^*$ vielleicht eine 2-Eigenschaft ist.

6. Berandung von Erweiterungseigenschaften. Sind $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ irgendwelche gruppentheoretische Eigenschaften, so werde (nach Ph. Hall) unter der *Erweiterungseigenschaft* $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ die Eigenschaft verstanden, einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler mit $\mathfrak{f}$-Faktorgruppe zu besitzen. Wir werden ein Kriterium dafür ableiten, daß $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{b}$ berandet wird, wenn $\mathfrak{b}$ ein Rand von $\mathfrak{e}$ ist.

Die drei Eigenschaften $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{b}$ werden in diesem Abschnitt die folgenden Bedingungen — oder einige davon — erfüllen:

(I) *$\mathfrak{b}$ ist eine einfache Eigenschaft.*

(II) *$\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ sind untergruppen- und epimorphismenvererblich.*

(III) *$\mathfrak{e}$ wird von $\mathfrak{b}$ berandet.*

(IV) *Ist E eine $\mathfrak{e}$-Gruppe und F eine $\mathfrak{f}$-Gruppe, so sind die Ordnungen von E und F teilerfremd.*

(V) *$\mathfrak{f}$-Gruppen sind $\mathfrak{b}$-auflösbar.*

(VI) *$\mathfrak{e}$-Gruppen von Primzahlordnung sind $\mathfrak{b}$-Gruppen.*

Ist $\mathfrak{x}$ eine der Eigenschaften $\mathfrak{e}$ oder $\mathfrak{f}$, so ist die Menge $P(\mathfrak{x})$ der Primzahlen, die Ordnungen von $\mathfrak{x}$-Gruppen sind, wegen (II) auch genau die Menge der Primzahlteiler von Ordnungen von $\mathfrak{x}$-Gruppen. Bedingung (IV) besagt, daß $P(\mathfrak{e})$ und $P(\mathfrak{f})$ keine Primzahl gemein haben, und hieraus ergibt sich die wiederum zu (IV) äquivalente Aussage:

(IV′) Jede $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$-Gruppe ist $P(\mathfrak{e})$-abgeschlossen: dh. die Menge der Elemente, deren Ordnungen nur durch Primzahlen aus $P(\mathfrak{e})$ teilbar sind, ist eine, natürlich charakteristische, Untergruppe.

Aus (II) folgt, daß Untergruppen und epimorphe Bilder von $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$-Gruppen wieder $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$-Gruppen sind.

Lemma 6.1. *Werden* (II)-(IV) *von* $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{b}$ *erfüllt, so gilt:*

(A) *Ist das epimorphe Bild* X *einer Untergruppe einer* $\mathfrak{ef}$-*Gruppe eine* $P(\mathfrak{e})$-*Gruppe* ($P(\mathfrak{f})$-*Gruppe*), *so ist* X *eine* $\mathfrak{e}$-*Gruppe* ($\mathfrak{f}$-*Gruppe*).

(B) *Ist* G *weder eine* $\mathfrak{e}$-*Gruppe noch eine* $\mathfrak{b}$-*Gruppe, ist jede echte Untergruppe von* G *eine* $\mathfrak{ef}$-*Gruppe, so ist* G *keine* $P(\mathfrak{e})$-*Gruppe.*

(C) *Ist* F *eine* $\mathfrak{f}$-*Untergruppe der* $\mathfrak{ef}$-*Gruppe* G, *so wird* F *von allen* F *normalisierenden* $P(\mathfrak{e})$-*Elementen zentralisiert und* $N(F)/C(F)$ *ist eine* $\mathfrak{f}$-*Gruppe.*

Bezeichnung. $N(F)$ bezeichne den *Normalisator* und $C(F)$ den *Zentralisator* von F in G.

Beweis. (A): Ist X ein Faktor einer $\mathfrak{ef}$-Gruppe, so ist X wegen (II) ebenfalls eine $\mathfrak{ef}$-Gruppe. X besitzt also einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler N mit $\mathfrak{f}$-Faktorgruppe X/N. Jeder Primteiler der Ordnung von N (der Ordnung von X/N) gehört zu $P(\mathfrak{e})$ (zu $P(\mathfrak{f})$), und $P(\mathfrak{e})$ und $P(\mathfrak{f})$ besitzen nach (IV) keine gemeinsamen Primzahlen. Ist daher X eine $P(\mathfrak{e})$-Gruppe ($P(\mathfrak{f})$-Gruppe), so muß X eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ($\mathfrak{f}$-Gruppe) sein.

(B): Sei G weder eine $\mathfrak{e}$-Gruppe noch eine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Sei weiter jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{ef}$-Gruppe. Wäre G eine $P(\mathfrak{e})$-Gruppe, so wäre jede echte Untergruppe von G gleichzeitig eine $\mathfrak{ef}$-Gruppe und eine $P(\mathfrak{e})$-Gruppe (wegen (II)) und nach (A) eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. G selbst ist keine $\mathfrak{e}$-Gruppe und $\mathfrak{e}$ wird wegen (III) von $\mathfrak{b}$ berandet. Also folgt aus Satz 1.1, daß G eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Dies widerspricht der Wahl von G, und (B) ist bewiesen.

(C): Sei F eine $\mathfrak{f}$-Untergruppe der $\mathfrak{ef}$-Gruppe G. Der Normalisator $N(F)$ von F besitzt als $\mathfrak{ef}$-Gruppe, (II), einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler E mit $\mathfrak{f}$-Faktorgruppe $N(F)/E$. Aus (IV) folgt $E \cap F = 1$. Da E und F normal in $N(F)$ sind, zentralisieren sich E und F. Also ist $E \subseteq C(F)$ und mit $N(F)/E$ ist auch $N(F)/C(F)$ eine $\mathfrak{f}$-Gruppe.

Satz 6.2. *Erfüllen* $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ *und* $\mathfrak{b}$ *die Bedingungen* (I)-(VI), *so sind äquivalent:*

(1) $\mathfrak{ef}$ *wird von* $\mathfrak{b}$ *berandet.*

(2) *Ist die einfache Gruppe* G *weder eine* $\mathfrak{e}$-*Gruppe noch eine* $\mathfrak{f}$-*Gruppe, ist jede echte Untergruppe von* G *eine* $\mathfrak{ef}$-*Gruppe, so ist* G *eine* $\mathfrak{b}$-*Gruppe.*

Beweis. $\mathfrak{ef}$ werde von $\mathfrak{b}$ berandet. Ist G eine einfache Gruppe, deren sämtliche echte Untergruppen $\mathfrak{ef}$-Gruppen sind, ist aber G weder eine $\mathfrak{e}$-Gruppe noch eine $\mathfrak{f}$-Gruppe, so ist G auch keine $\mathfrak{ef}$-Gruppe, da G sonst eine Erweiterung einer $\mathfrak{e}$-Gruppe durch eine $\mathfrak{f}$-Gruppe wäre. Satz 1.1 zeigt, daß G eine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist, dh. (2) gilt, wenn (1) gilt.

Angenommen, $\mathfrak{ef}$ wird nicht von $\mathfrak{b}$ berandet. Dann gibt es eine Gruppe G minimaler Ordnung mit folgenden Eigenschaften:

(a) G *ist keine* $\mathfrak{ef}$-*Gruppe* (*also auch keine* $\mathfrak{e}$- *und keine* $\mathfrak{f}$-*Gruppe*).

(b) G *ist keine* $\mathfrak{b}$-*Gruppe, dh.* G *ist* $\mathfrak{b}$-*perfekt.*

(c) *Echte Untergruppen von* G *sind* $\mathfrak{ef}$-*Gruppen.*

Ist E ein echtes epimorphes Bild von G, so ist E keine $\mathfrak{b}$-Gruppe (wegen (b)). Echte Untergruppen von E sind $\mathfrak{ef}$-Gruppen (wegen (c) und (II)). Aus der Minimalität von G folgt, daß E eine $\mathfrak{ef}$-Gruppe ist. Also gilt

(d) *Echte epimorphe Bilder von* G *sind* $\mathfrak{ef}$-*Gruppen.*

Lemma 6.1, (B) zeigt (in Verbindung mit (a), (b), (c)):

(e) G *ist nicht* $P(\mathfrak{e})$-*abgeschlossen.*

Aus (a) folgt $G \neq 1$. Also existiert ein maximaler Normalteiler M von G. Natürlich ist G/M eine einfache Gruppe, und aus (b) folgt

(f) G/M *ist keine* $\mathfrak{b}$-*Gruppe* (*also auch keine* $\mathfrak{f}$-*Gruppe wegen* (V)).

Wegen (c) ist M eine $\mathfrak{ef}$-Gruppe. Folglich gibt es einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler E von M mit $\mathfrak{f}$-Faktorgruppe M/E. Da E wegen (IV) ein Hallscher Normalteiler von M ist, ist E eine charakteristische Untergruppe von M, also ein Normalteiler von G. Folglich gilt:

(g) *Es gibt einen* $\mathfrak{e}$-*Normalteiler* E *von* G *mit* $E \subseteq M$ *und* $\mathfrak{f}$-*Faktorgruppe* M/E.

Wäre $E \neq 1$, so wäre $G/E = H$ als echtes epimorphes Bild von G wegen (d) eine $\mathfrak{ef}$-Gruppe. Also gibt es dann einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler N von H mit $\mathfrak{f}$-Faktorgruppe H/N. Wegen (V) ist H/N eine $\mathfrak{b}$-auflösbare Gruppe. Wegen (b) ist das epimorphe Bild H/N von G eine $\mathfrak{b}$-perfekte Gruppe. Die einzige $\mathfrak{b}$-auflösbare und $\mathfrak{b}$-perfekte Gruppe ist die 1. Also ist $H/N = 1$ und $H = N = G/E$ ist eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Dann ist G als Erweiterung der $\mathfrak{e}$-Gruppe E durch die $\mathfrak{e}$-Gruppe G/E wenigstens eine $P(\mathfrak{e})$-Gruppe und das widerspricht (e). Aus diesem Widerspruch folgt $E = 1$, so daß (mit (g)) gilt:

(h) M *ist eine* $\mathfrak{f}$-*Gruppe; falls* $M \neq 1$, *dann ist* M *eine* $\mathfrak{b}$-, *aber keine* $\mathfrak{e}$-*Gruppe.*

Angenommen, es wäre $M \neq 1$. Dann ist G/M wegen (d) eine $\mathfrak{ef}$-Gruppe und aus der Einfachheit von G/M und (f) folgt, daß G/M eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Wäre G/M abelsch, so wäre G/M als einfache Gruppe zyklisch von Primzahlordnung und wegen (VI) also eine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Dies widerspricht (f). Also ist G/M nicht abelsch und insbesondere nicht zyklisch. Ist g ein nicht in M enthaltenes Element aus G, so ist $M\{g\}/M$ zyklisch, also von G/M verschieden. Folglich ist $\{M, g\}$ eine echte Untergruppe von G, wegen (b) also eine $\mathfrak{ef}$-Gruppe, dh. $\{M, g\}$ besitzt einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler X mit $\mathfrak{f}$-Faktorgruppe $\{M, g\}/X$. Andererseits ist $\{M, g\}/M$ als Untergruppe der $\mathfrak{e}$-Gruppe G/M wegen (II) eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, dh. M ist ein $\mathfrak{f}$-Normalteiler von $\{M, g\}$ mit $\mathfrak{e}$-Faktorgruppe $\{M, g\}/M$, sodaß $\{M, g\}$ auch eine $\mathfrak{f}\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Weil $P(\mathfrak{e})$ und $P(\mathfrak{f})$ disjunkte Primzahlmengen sind, sind X und M beide Hallsche Normalteiler von $\{M, g\}$. Daher besitzt X ein $P(\mathfrak{e})'$-und M ein $P(\mathfrak{f})'$-Komplement in $\{M, g\}$ (s. Scott [10], S. 224, (9.3.6)) und hieraus folgt mit (c), daß $\{M, g\}$ das direkte Produkt vom M und einer (zyklischen) $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Da M ein maximaler Normalteiler von G ist, gilt $G = M \cdot C(M)$.

Da weiter M wegen (h) eine $\mathfrak{f}$-Gruppe und G/M, wie oben bemerkt, eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist, ist M ein Hallscher Normalteiler von G, also $Z(M) = M \cap C(M)$ ein Hallscher Normalteiler von $C(M)$. Anwendung des Schurschen Satzes — s. Zassenhaus [11], S. 162, Satz 25 — zeigt, daß $Z(M)$ ein direkter Faktor von $C(M)$ und also M ein direkter Faktor von G ist. Ist etwa $G = M \otimes L$, so ist $L \cong G/M$ und also eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Wegen (h) ist folglich G das direkte Produkt einer $\mathfrak{e}$-Gruppe und einer $\mathfrak{f}$-Gruppe. Ein solches direktes Produkt ist aber eine $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$-Gruppe im Widerspruch zu (a). Folglich ist $M = 1$, und es gilt

(k) *G ist einfach.*

Wegen (a) ist G weder eine $\mathfrak{e}$-Gruppe noch eine $\mathfrak{f}$-Gruppe und wegen (c) ist G auch keine $\mathfrak{b}$-Gruppe. Wegen (b) ist jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$-Gruppe. Also gilt (2) nicht, wenn (1) nicht gilt, dh. (1) folgt aus (2).

Damit ist Satz 6.2 bewiesen.

Der Reihe der Bedingungen (I)-(VI) werde eine weitere Bedingung hinzugefügt:

(VII) *Sind $F_1, \dots, F_n$ endlich viele von 1 verschiedene $\mathfrak{f}$-Gruppen, so gibt es (wenigstens) eine Primzahl p mit:*

(a) *Die Elemente von zu p teilerfremder Ordnung aus F_i bilden eine Untergruppe von F_i (dh. jedes F_i ist p'-abgeschlossen)*; und

(b) *Die Ordnung von wenigstens einem F_i ist durch p teilbar.*

Aus dieser Bedingung ergibt sich, daß jede $\mathfrak{f}$-Gruppe einen Sylowturm besitzt und sogar, daß endlich viele $\mathfrak{f}$-Gruppen Sylowtürme gleichen Typs haben: vgl. Huppert, S. 415. Man kann hieraus weiter die Existenz einer teilweisen Ordnung σ der Primzahlen derart erschließen, daß alle $\mathfrak{f}$-Gruppen σ-verstreut sind; vgl. Baer [1], § 9.

Satz 6.3. *Genügen $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b}$ den Bedingungen* (I)-(VII) *so wird $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{b}$ berandet.*

Beweis. Sei G eine einfache Gruppe, deren echte Untergruppen $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$-Gruppen sind und die keine $\mathfrak{b}$-Gruppe ist. Wäre jede echte Untergruppe von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so wäre G wegen (III) eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Es werde also vorausgesetzt, daß nicht alle echten Untergruppen von G der Klasse $\mathfrak{e}$ angehören. Ist dann K die Klasse all der von 1 verschiedenen $\mathfrak{f}$-Faktorgruppen echter Untergruppen von G, so ist K nicht leer, aber mit G endlich. Wegen (VII) gibt es also eine Primzahl p mit folgenden Eigenschaften:

(a) *Jede Gruppe in K ist p'-abgeschlossen.*

(b) *Wenigstens eine Gruppe in K hat eine durch p teilbare Ordnung.*

Ist U eine echte Untergruppe von G, so ist U eine $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$-Gruppe, besitzt also einen $\mathfrak{e}$-Normalteiler E mit $\mathfrak{f}$-Faktorgruppe U/E. Da p wegen der Definition von K zu $P(\mathfrak{f})$ gehört, folgt aus (IV), daß p kein Teiler der Ordnung von E ist. Also ist E eine p'-Gruppe. Da U/E eine $\mathfrak{f}$-Gruppe ist, ist U/E entweder gleich 1 oder gehört zu K, ist wegen (a) also auf jeden Fall p'-abgeschlossen. Erweiterungen von p'-Gruppen durch p'-abgeschlossene Gruppen sind p'-abgeschlossen, daher gilt:

(c) *Jede echte Untergruppe von G ist p'-abgeschlossen.*

Sei $P \neq 1$ eine p-Untergruppe von G. Wäre $P = G$, so wäre die einfache Gruppe G eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung und wegen (b) und (II) eine $\mathfrak{f}$-Gruppe, und wir wären fertig. Also gelte

(d) *$G \neq P$, dh. G ist keine p-Gruppe.*

Dann ist $N(P)$ eine echte Untergruppe der einfachen Gruppe G, wegen (c) also p'-abgeschlossen. Hieraus folgt, daß $N(P)/C(P)$ eine p-Gruppe ist. Anwendung eines Satzes von Frobenius — s. M. Hall [3], S. 217, Theorem 14.4.7 — zeigt, daß G selbst eine p'-abgeschlossene Gruppe ist. Als einfache Gruppe ist G also entweder eine p-Gruppe oder eine p'-Gruppe. Der erste Fall ist wegen (d) unmöglich und der zweite Fall kann wegen (b) nicht eintreten. Aus diesem Widerspruch folgt, daß G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe oder eine $\mathfrak{f}$-Gruppe ist. Also gilt Bedingung (2) von Satz 6.2, sodaß $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{b}$ berandet wird, und Satz 6.4 ist bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] R. Baer, *Classes of finite groups and their properties*, Ill. J. 1 (1957), S. 115-187.

[2] — *Verstreute Gruppen*, Abh. math. Sem. Hamb. 29 (1965), S. 1-36.

[3] M. Hall, *The theory of groups*, New York, 1959.

[4] B. Huppert, *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*, Math. Zeitschr. 60 (1954), S. 409-434.

[5] K. Iwasawa, *Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind*, Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. 23 (1941), S. 1-4.

[6] L. Rédei, *Die endlichen einstufig nicht nilpotenten Gruppen*, Publ. Math. Debrec. 4 (1956), S. 303-324.

[7] — *Algebra*, Leipzig, 1959.

[8] — *Eine Bemerkung über die endlichen einstufig nichtkommutativen Gruppen*, Acta Sci. Math. Szeged 19 (1958), S. 127-128.

[9] O. Schmidt, *Gruppen, deren sämtliche Untergruppen nilpotent sind*, Mat. Sborn. 31 (1924), S. 366-372 (russ.).
[10] W. R. Scott, *Group Theory*, New Jersey, 1964.
[11] H. Zassenhaus, *Gruppentheorie*, 2nd ed., Göttingen, 1958.
[12] — *A grouptheoretic proof of a theorem of Maclagan-Wedderburn*, Proc. of the Glasgow Math. Assoc. I (1952), S. 53-64.

Reçu par la Rédaction le 17. 7. 1967

Strongly cellular cells in E^3 are tame

by

H. C. Griffith* and **L. R. Howell, Jr.** (Tallahassee, Florida)

1. Introduction. Bing and Kirkor [4] have shown that a 1-cell in E^3 is tame if and only if it is strongly cellular. The purpose of this paper is to extend this result to 2-cells and 3-cells, and to use the concept to characterize tame 2-spheres. The main results are these.

THEOREM I. *If Z is a k-cell in E^3, $k = 1, 2$, or 3, then Z is tame if and only if it is strongly cellular.*

THEOREM II. *A 2-sphere in S^3 is tame if and only if each of its complementary domains has a strongly cellular closure.*

Numerous characterizations of tame cells are known. Cells of dimension one are treated in [9]. The 3-cell case reduces to the question of whether or not the boundary 2-sphere is tame. Useful characterizations of tame 2-cells and 2-spheres have been given by Bing [3], Burgess [6], Harrold [8], Hemple [10], and others. The criteria to be used here are, in the 3-cell case, the result due to Bing [2] that *tame 2-spheres* are those which can be approximated in each complementary domain, and in the 2-cell case, the result given in [7] that *tame 2-cells* are those which have both the strong enclosure and the hereditary disk properties.

2. Definitions and notation. The real interval $[0,1]$ will be denoted by I. A *homotopy* of S in T is a continuous function $h\colon S\times I\to T$ such that $h(x,0)=x$ for all x in S, and h_t will then denote the function given by $h_t(x)=h(x,t)$. If C is a cell, then $C^\bullet$ and C° will denote the *combinatorial boundary* and *combinatorial interior* of C. The set of all points in E^n lying within ε of some point of A is denoted by $B(A,\varepsilon)$.

A set Z in E^n is strongly cellular (Bing and Kirkor [4]) *if there is an n-cell C in E^n and a homotopy $H\colon C\times I\to C$ such that, if $S=C^\bullet$, then*

(1) *H_0 is the identity map, and $H_t|Z$ is the identity for all t,*

(2) *$H_t|S$ is a homeomorphism and $Z\cap H_t(S)=\emptyset$ for $t<1$,*

(3) *$H_t(S)\cap H_u(S)=\emptyset$ for $t\neq u$.*

(4) *$H_1(C)=Z$.*

* Work on this paper was supported by the National Science Foundation under NSF G-5458.