Komplementäre Halbgruppen

Axiomatik und Arithmetik

von

Bruno Bosbach (Bensberg *)

Unter einem *Gruppoid* verstehen wir jede Menge S, in der eine eindeutige zweistellige Operation, genannt *Multiplikation*, erklärt ist. Als *Halbgruppe* bezeichnen wir jedes Gruppoid, das $a(bc) = (ab)c$ erfüllt. Sei S eine Halbgruppe. Dann bedeute $a|_l b$ die Existenz eines x aus S mit $ax = b$, $a|_r b$ die Existenz eines y aus S mit $ya = b$. Als *rechtsregulär* bezeichnen wir S genau dann, wenn alle a der Äquivalenz $ax = ay \Leftrightarrow x = y$ genügen, entsprechend seien *linksreguläre* Halbgruppen definiert. Als *regulär* bezeichnen wir eine Halbgruppe genau dann, wenn sie sowohl rechts- als auch linksregulär ist. Eine Halbgruppe heiße wie üblich *idempotent*, wenn $a^2 = a$ für alle a aus S gegeben ist. Wir nennen die Halbgruppe S *rechtskomplementär*, wenn zu je zwei Elementen a, b aus S genau ein $a \ast b$ in S existiert mit $b|_l ax \Leftrightarrow a \ast b|_l x$. Analog definieren wir *linkskomplementäre* Halbgruppen und bezeichnen das *Linkskomplement* mit $b:a$. Als Leseform ließe sich einführen *a rechtsergänzt zu b* bzw. *a linksergänzt zu b*. Ist S eine rechtskomplementäre Halbgruppe, so existiert in S eine 1 mit $a1 = a = 1a$ und es gilt $a|_l b \wedge b|_l a \Rightarrow a = b$, wie wir später sehen werden. Dadurch ist jede rechtskomplementäre Halbgruppe *teilweise geordnet*, weshalb wir auch $a \leqslant_l b$ schreiben werden statt $a|_l b$ und $a <_l b$ statt $a|_l b \wedge b \nmid_l a$. Eine Halbgruppe S, die sowohl rechts- als auch linkskomplementär ist, heiße *komplementär*, wenn sie $aS = Sa$ erfüllt für alle a aus S, also $|_l$ und $|_r$ gleichbedeutend sind.

Komplementäre Halbgruppen sind $\cup$-abgeschlossen, da jede rechtskomplementäre Halbgruppe $\cup$-abgeschlossen ist, sie sind jedoch nicht notwendig $\cap$-abgeschlossen. So sind sie streng allgemeiner als die von Swamy betrachteten DRL-*Semigroups*, insofern deren *Struktur* und *Kongruenzen* durch ihren *positiven Kern* vollständig bestimmt sind, wie wir später zeigen werden, und insofern dieser Kern *kommutativ* und *$\cap$-abgeschlossen* ist. Trotz der Verwandtschaft der Strukturen überschneiden

---

* Albertus-Magnus-Gymnasium, derzeit abgeordnet an das Seminar für Didaktik der Mathematik an der Universität Münster.

sich die Fragestellungen und Ergebnisse von Swamy mit denen des Autors kaum.

Als Beispiel einer *angeordneten* (totalgeordneten) rechtsregulären rechtskomplementären Halbgruppe, die keine komplementäre Halbgruppe ist, sei die Menge der *Ordinalzahlen* von der Mächtigkeit $\aleph_0$ bezüglich der Addition genannt. Als Beispiele für komplementäre Halbgruppen nennen wir den Bereich N der natürlichen Zahlen bezüglich der Multiplikation oder allgemein jede *Zerlegungshalbgruppe* (in [2] bezeichnet als *vollkanonisches Holoid*), den Bereich R der rationalen Zahlen $\geqslant 0$ bezüglich der Addition oder allgemein die Klasse der *archimedischen komplementären* Halbgruppen, den Bereich R betrachtet bezüglich der *Anordnungsautomorphismen* φ mit $a \leqslant \varphi(a)$ für alle a oder allgemein jeden *Verbandsgruppenkern* und schließlich die Potenzmenge von N betrachtet bezüglich $\cup$ oder allgemein jeden *Booleschen Ring* betrachtet bezüglich seiner Multiplikation. Diese Konkretisierungen machen die zentrale Stellung der komplementären Halbgruppe sichtbar und lassen ihren engen Bezug zu dem von Birkhoff in der 2. und 3. Auflage seiner *Lattice theory* formulierten Problem erkennen: "*Is there a common abstraction which includes Boolean algebras* (*Boolean rings*) *and l-groups as special cases?*"

Dieser Note liegt der folgende Plan zu Grunde:

In § 1 wird die Struktur der rechtskomplementären Halbgruppen unter Berücksichtigung der rechtsregulären und idempotenten Halbgruppen durch Gleichungssysteme charakterisiert, so daß diese fast unmittelbar eine Charakterisierung der entsprechenden komplementären Halbgruppen in § 2 ermöglichen.

§ 3 liefert die für alle weiteren Untersuchungen wesentlichen arithmetischen Gesetze komplementärer Halbgruppen.

In § 4 engen wir die komplementäre Halbgruppe durch jeweils ein Zusatzaxiom nacheinander ein zur Zerlegungshalbgruppe, zur archimedischen komplementären Halbgruppe, zum Verbandsgruppenkern, zur Booleschen Algebra bzw. zum Booleschen Ring, sowie zur komplementären Halbgruppe, deren Elemente sich als Produkt uv mit idempotentem u und regulärem v darstellen lassen und die eine elegante Charakterisierung der direkten Produkte von Verbandsgruppenkernen mit Booleschen Ringen ermöglicht. § 5 liefert Unabhängigkeitsbeispiele.

Bezüglich weiterer Untersuchungen sei verwiesen auf [3] und [4], sowie auf [2] und die dort zitierten Arbeiten über Zerlegungshalbgruppen. Der Vollständigkeit halber muß hier noch erwähnt werden, daß die rechtskomplementäre Halbgruppe in engem Zusammenhang steht mit gewissen logischen Systemen. Das geht schon daraus hervor, daß die rechtskomplementäre Halbgruppe durch jeweils ein Zusatzaxiom eingeengt werden kann zur Booleschen Algebra bzw. zu einer BCK-*Algebra*, wie sie von Iseki betrachtet wurde, und es scheint interessant, daß sich

aus Satz 6 dieser Note zusammen mit Theorem 1 aus [9] ergibt, daß eine rechtskomplementäre Halbgruppe bezüglich $\ast$ und $\leqslant$ genau dann eine BCK-Algebra darstellt, wenn sie kommutativ ist.

Die nachfolgenden Ausführungen sind weitgehend voraussetzungslos geschrieben. In der Terminologie schließen wir uns Birkhoff bzw. Fuchs an, lediglich den *positiven Kegel* der Verbandsgruppe nennen wir *Verbandsgruppenkern*, und es soll eine *Verbandshalbgruppe volldistributiv* heißen, wenn sie $a(b \cup c)d = abd \cup acd$, $a(b \cap c)d = abd \cap acd$ und $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$ erfüllt. Schließlich nennen wir die betrachteten Strukturen (rechts-)komplementär statt "*teilweise natürlich geordnet* (*rechts-*)*residuiert*". Bezüglich der Symbolik sei vereinbart, daß $a|b$ stets $a|_l b$ bedeuten soll, $a \cup b$ das KGV(a, b) und $a \cap b$ den GGT(a, b) bezüglich $|$. Die Multiplikation soll stets stärker binden als $\ast$, $:$, $\cup$ und $\cap$. Hinter den einzelnen Axiomen erwähnen wir jeweils, abgekürzt in der Form [Bn], dasjenige Beispiel, das die Unabhängigkeit dieses Axioms von den übrigen des aufgestellten Systems beweist, hinter den einzelnen Beweiszeilen vielfach in runden Klammern denjenigen Hilfssatz, der den vollzogenen Schritt begründet. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß wir *duale Aussagen* natürlich als *wesensgleich* erachten und sie mitunter ohne Kommentar nur in einer Form beweisen.

Diese Note ist Teil einer umfangreicheren Untersuchung, die eingeleitet wurde in [2] und fortgesetzt wird in [3] und [4]. Speziell liefert [3], daß sich die *Kongruenzen* in komplementären Halbgruppen durch *Vollideale* ($ab \in I \Longleftrightarrow a \in I \ni b$, $aI = Ia$) und die *Rechtskongruenzen* bezüglich $\cdot$ und $\ast$ durch *Halbideale* ($ab \in I \Longleftrightarrow a \in I \ni b$) kennzeichnen lassen. Ferner wird in der Arbeit [3], die als 2. Teil dieser Note aufzufassen ist, gezeigt, daß jede komplementäre Halbgruppe eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte (volldistributive) *Quotientenhülle* Q besitzt, die sich aus der Menge aller *Quotienten* ab^{-1} mit beliebigem $a \in S$ und regulärem $b \in S$ zusammensetzt.

Ins *Literaturverzeichnis* sind nur die Untersuchungen aufgenommen, die in direktem Zusammenhang mit den nachfolgenden Ausführungen stehen. Verwandte Betrachtungen können dem Literaturverzeichnis zu [7] entnommen werden.

1. Zur Axiomatik rechtskomplementärer Halbgruppen. Im folgenden sei S ein Gruppoid, das bezüglich einer 2. beliebigen Operation $\ast$ die Axiome erfüllt:

$$\text{(A1)} \quad a(a \ast b) = b(b \ast a)\,, \quad \text{[B1]}$$

$$\text{(A2)} \quad ab \ast c = b \ast (a \ast c)\,, \quad \text{[B2]}$$

$$\text{(A3)} \quad a(b \ast b) = a\,. \quad \text{[B3]}$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&(1) & a\ast a &= (a\ast a)(b\ast b) && \text{(A3)}\\
&& &= (a\ast a)[b(a\ast a)\ast b] && \text{(A3)}\\
&& &= (a\ast a)[(a\ast a)\ast(b\ast b)] && \text{(A2)}\\
&& &= (b\ast b)[(b\ast b)\ast(a\ast a)] && \text{(A1)}\\
&& &= (b\ast b)[a(b\ast b)\ast a] && \text{(A2)}\\
&& &= (b\ast b)(a\ast a) && \text{(A3)}\\
&& &= b\ast b && \text{(A3)}\\
&& &= e;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2) & (ab)c\ast d &= c\ast(ab\ast d) && \text{(A2)}\\
&& &= c\ast[b\ast(a\ast d)] && \text{(A2)}\\
&& &= bc\ast(a\ast d) && \text{(A2)}\\
&& &= a(bc)\ast d; && \text{(A2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(3) & (ab)c &= [(ab)c][a(bc)\ast a(bc)] && \text{(A3)}\\
&& &= [(ab)c][(ab)c\ast a(bc)] && (2)\\
&& &= [a(bc)][a(bc)\ast(ab)c] && \text{(A1)}\\
&& &= [a(bc)][(ab)c\ast(ab)c] && (2)\\
&& &= a(bc); && \text{(A3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(4) & (e\ast a)\ast e &= (e\ast a)\ast(e\ast e) && (1)\\
&& &= e(e\ast a)\ast e && \text{(A2)}\\
&& &= a(a\ast e)\ast e && \text{(A1)}\\
&& &= (a\ast e)\ast(a\ast e) && \text{(A2)}\\
&& &= e; && (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(5) & e\ast a &= (e\ast a)[(e\ast a)\ast e] && (4)\\
&& &= e[e\ast(e\ast a)]\\
&& &= e(ee\ast a)\\
&& &= e(e\ast a);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(6) & (e\ast a)\ast a &= e(e\ast a)\ast a && (5)\\
&& &= (e\ast a)\ast(e\ast a)\\
&& &= e;
\end{aligned}
$$

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
&(7) & e\ast a &= (e\ast a)e\\
&& &= (e\ast a)[(e\ast a)\ast a] && (6)\\
&& &= a[a\ast(e\ast a)]\\
&& &= a(ea\ast a)\\
&& &= ea(ea\ast a) && (5)\\
&& &= a(a\ast ea)\\
&& &= ea(a\ast ea); && (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(8) & e\ast ea &= e(ea)[ea\ast e(ea)] && (7)\\
&& &= ea(ea\ast ea)\\
&& &= ea;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(9) & ea &= ea(ea\ast ea)\\
&& &= ea[a\ast(e\ast ea)]\\
&& &= ea(a\ast ea) && (8)\\
&& &= e\ast a; && (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(10) & ea &= e\ast a\\
&& &= a(ea\ast a) && (7)\\
&& &= a[(e\ast a)\ast a] && (9)\\
&& &= ae && (6)\\
&& &= a\,.
\end{aligned}
$$

Aus (10) folgt, daß e Einselement in S ist. Wir schreiben deshalb im weiteren Verlauf 1 statt e und zeigen:

$$
\begin{aligned}
&(11) & 1\ast a &= 1a && (9)\\
&& &= a;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(12) & a\ast 1 &= 1(1\ast a)\ast 1 && (5|11)\\
&& &= a(a\ast 1)\ast 1\\
&& &= (a\ast 1)\ast(a\ast 1)\\
&& &= 1;
\end{aligned}
$$

(13) $$ax = b \Leftrightarrow b\ast a = 1\,.$$

Denn

$$
\begin{aligned}
ax = b \Rightarrow b\ast a &= ax\ast a\\
&= x\ast(a\ast a)\\
&= x\ast 1 && (12)\\
&= 1
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
b\ast a = 1 \Rightarrow b &= b(b\ast a)\\
&= a(a\ast b)\,.
\end{aligned}
$$

(14) $$ax = b \wedge by = a \Rightarrow$$
$$a = a1 = a(a\ast b) = b(b\ast a) = b1 = b. \qquad (13)$$

(15) $$ax = by \Longleftrightarrow x\ast(a\ast b) = 1\,.$$

Denn
$$\begin{aligned} ax = by \Rightarrow x\ast(a\ast b) &= ax\ast b \\ &= by\ast b \\ &= 1 \qquad (13) \end{aligned}$$

und
$$\begin{aligned} x\ast(a\ast b) = 1 &\Rightarrow ax\ast b = 1 \\ &\Rightarrow ax = by\,. \end{aligned}$$

Aus (14) folgt, daß S durch $|_l$ teilweise geordnet wird, nach (15) ist S rechtskomplementär. Bevor wir umgekehrt zeigen, daß auch jede rechtskomplementäre Halbgruppe die Axiome A1, A2, A3 erfüllt, beweisen wir noch die Abgeschlossenheit von S bezüglich $\cup$. Es gilt:

(16) $$a(a\ast b) = a \cup b = b \cup a = b(b\ast a)\,.$$

Denn
$$\begin{aligned} a(a\ast b)\ast a &= (a\ast b)\ast(a\ast a) \\ &= (a\ast b)\ast 1 = 1 \\ &= (b\ast a)\ast 1 = 1 \\ &= (b\ast a)\ast(b\ast b) \\ &= b(b\ast a)\ast b \end{aligned}$$

und
$$\begin{aligned} c\ast a = 1 = c\ast b &\Rightarrow \\ (a\ast c)\ast(a\ast b) &= a(a\ast c)\ast b \\ &= c(c\ast a)\ast b \\ &= (c\ast a)\ast(c\ast b) \\ &= 1\ast 1 = 1 \\ \Rightarrow c = a(a\ast c) &\geqslant a(a\ast b)\,. \end{aligned}$$

Es sei nun umgekehrt S eine rechtskomplementäre Halbgruppe. Dann gelten bezüglich der Bildung des Rechtskomplementes $a\ast b$ die Axiome A1, A2, A3.

Denn $a\ast a = e$ muß Linksteiler aller b aus S sein und deshalb auch mit seinen sämtlichen Potenzen jedes Element linksteilen, weshalb $e^2 = e$ sein muß, da sowohl e als auch e^2 die Bedingung für $a\ast a$ erfüllt. Ist weiter $a|_l b \wedge b|_l a$, so folgt $a = e\ast a = b$. Schließlich gelten hiernach:

(17) $$a(a\ast b) = b(b\ast a)\,.$$

Denn
$$\begin{aligned} a(a\ast b) &= bx \\ &\geqslant b(b\ast a) \\ &= ay \\ &\geqslant a(a\ast b)\,. \end{aligned}$$

(18) $$ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,.$$

Denn
$$\begin{aligned} & abx = cy \\ \Longleftrightarrow\;& bx = (a\ast c)u \\ \Longleftrightarrow\;& x = [b\ast(a\ast c)]v\,. \end{aligned}$$

(19) $$\begin{aligned} a(b\ast b) &= a(a\ast e) \\ &= e(e\ast a) \\ &= a\,. \end{aligned}$$

Hiernach können wir formulieren:

Satz 1. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine rechtskomplementäre Halbgruppe, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome* A1, A2, A3 *erfüllt.*

Es stellt sich unmittelbar die Frage, ob A3 ersetzt werden kann durch $(b\ast b)a = a$. Daß dies nicht möglich ist, zeigt Beispiel 7. Nehmen wir jedoch eine der Forderungen $(b\ast b)\ast a = a$ oder $a(a\ast a) = a$ hinzu, so wird die Lücke geschlossen, was gezeigt wird durch

Satz 1′. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine rechtskomplementäre Halbgruppe, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome erfüllt:*

(A1)	$a(a\ast b) = b(b\ast a)\,,$	[B4]
(A2)	$ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,,$	[B5]
(A3*)	$(b\ast b)a = a\,,$	[B6]
(A3′)	$(b\ast b)\ast a = a\,,$	[B7]
oder (A3″)	$a(a\ast a) = a\,.$	[B7]

Zunächst können wir in beiden Fällen $a\ast a = b\ast b$ wie folgt beweisen:

(1′) $$\begin{aligned} a\ast a &= (a\ast a)\ast(a\ast a) \quad (\mathrm{A3'})\text{ bzw. }(\mathrm{A3''} \wedge \mathrm{A2}) \\ &= (b\ast b)(a\ast a)\ast(a\ast a) \\ &= (a\ast a)\ast[(b\ast b)\ast(a\ast a)] \\ &= (a\ast a)\ast(b\ast b)[(b\ast b)\ast(a\ast a)] \\ &= (a\ast a)\ast(a\ast a)[(a\ast a)\ast(b\ast b)] \\ &= (a\ast a)\ast[(a\ast a)\ast(b\ast b)] \\ &= (a\ast a)\ast(b\ast b) \quad = b\ast b,\text{ falls A3′ gilt} \\ &= (a\ast a)[(a\ast a)\ast(b\ast b)] \\ &= (b\ast b)[(b\ast b)\ast(a\ast a)] \\ &= (b\ast b)\ast(a\ast a) \\ &= b\ast b = e\,. \end{aligned}$$

Damit folgt $a(b\ast b) = a(a\ast a)$, so daß wir uns auf A3′ beschränken können bei der Herleitung von Hilfssatz

$$\text{(2′)}\qquad \begin{aligned} a(b\ast b) &= a[(a\ast e)\ast(a\ast e)] \\ &= a[a(a\ast e)\ast e] \\ &= a[e(e\ast a)\ast e] \\ &= a(a\ast e) \\ &= e(e\ast a) \\ &= a\,. \end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir die rechtsregulären rechtskomplementären Halbgruppen charakterisieren. Unmittelbar ergibt sich diesbezüglich aus dem Vorhergehenden, daß solche Gruppoide notwendig die Axiome erfüllen:

$$\begin{array}{lll} \text{(A1)} & a(a\ast b) = b(b\ast a)\,, & \text{[B8]} \\ \text{(A2)} & ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,, & \text{[B9]} \\ \text{(V1)} & a\ast ab = b\,. & \text{[B3]} \end{array}$$

Somit bleibt zu zeigen, daß die Gültigkeit von A1, A2, V1 auch hinreicht. Hier gilt zunächst:

$$\text{(20)}\qquad \begin{aligned} ab &= a(a\ast ab) \\ &= (ab)(ab\ast a)\,; \end{aligned}$$

$$\text{(21)}\qquad \begin{aligned} ab\ast ab &= ab\ast(ab)(ab\ast a) && (20) \\ &= ab\ast a\,; \end{aligned}$$

$$\text{(22)}\qquad \begin{aligned} (ab)(ab\ast ab) &= (ab)(ab\ast a) \\ &= a(a\ast ab) \\ &= ab\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$\text{(23)}\qquad \begin{aligned} au = a \Rightarrow ab &= (au)b \\ &= [(au)b][(au)b\ast au] && (20) \\ &= [(au)b][a(ub)\ast au] && (2) \\ &= [(au)b][a(ub)\ast a] \\ &= [(au)b][a(ub)\ast a(ub)] && (21) \\ &= [(au)b][(au)b\ast a(ub)] && (2) \\ &= [a(ub)][a(ub)\ast(au)b] \\ &= [a(ub)][(au)b\ast(au)b] && (2) \\ &= [a(ub)][ab\ast ab] \\ &= [a(ub)][ab\ast a] && (21) \\ &= [a(ub)][(au)b\ast a] \\ &= [a(ub)][a(ub)\ast a] && (2) \\ &= a(ub)\,; && (20) \end{aligned}$$

$$\text{(24)}\qquad \begin{aligned} au = a \Rightarrow ub &= a\ast a(ub) \\ &= a\ast(au)b && (23) \\ &= a\ast ab \\ &= b\,; \end{aligned}$$

$$\text{(25)}\qquad \begin{aligned} ub = b \Rightarrow u\ast b &= u\ast ub \\ &= b\,. \end{aligned}$$

(26) *Je zwei Linkseinheiten u und v erfüllen*

$$\begin{aligned} u &= v\ast u && (25) \\ &= v(v\ast u) \\ &= u(u\ast v) \\ &= uv \\ &= v. \end{aligned}$$

Für die auf Grund der vorhergehenden Hilfssätze existierende und eindeutig bestimmte Linkseinheit e gilt weiter:

$$\text{(27)}\qquad \begin{aligned} a(a\ast e) &= e(e\ast a) \\ &= e\ast a \\ &= a \\ \Rightarrow a\ast e &= e \\ \Rightarrow \quad ae &= a\,. \end{aligned}$$

Zeigen wir jetzt noch $b\ast b = e$, so haben wir den Anschluß an A1, A2, A3 hergestellt. Die gewünschte Gleichung liefert

$$\text{(28)}\qquad \begin{aligned} b\ast b &= be\ast be \\ &= e\ast(b\ast be) \\ &= e\ast e \\ &= e\,. \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir damit unter Berücksichtigung von Satz 1 den

Satz 2. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine rechtsreguläre rechtskomplementäre Halbgruppe, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome A1, A2, V1 erfüllt.*

Für idempotente komplementäre Halbgruppen ergeben sich als notwendig die Axiome

$$\begin{array}{lll} \text{(I1)} & a^2(a\ast b) = b(b\ast a)\,, & \text{[B1]} \\ \text{(A2)} & ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,, & \text{[B2]} \\ \text{(A3)} & a(b\ast b) = a\,. & \text{[B3]} \end{array}$$

Daß diese Axiome auch hinreichen, zeigt fast unmittelbar der Hilfssatz

(29)
$$\begin{aligned} a^2 &= a^2(a\ast a) \\ &= a(a\ast a) \\ &= a\,. \end{aligned}$$

Somit gilt

SATZ 3. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine idempotente komplementäre Halbgruppe, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome* I1, A2, A3 *erfüllt.*

Es gibt Halbgruppen, in denen zwar nicht zu jedem Paar a, b ein Paar x, y existiert mit $ax = by$, wohl aber dann, wenn ein solches Paar gegeben ist, auch die Komplemente $a\ast b$ und $b\ast a$ existieren. Das einfachste Beispiel hierfür ist die Halbgruppe der Elemente 1, a, b mit $1x = x = x1$, $ab = aa = a$ und $bb = ba = b$. Wir wollen zeigen, daß diese Halbgruppen durch Adjunktion einer 0 und gegebenenfalls einer 1 zu rechtskomplementären Halbgruppen erweitert werden können. Hierzu setze man $a\ast 0 = 0$, $0\ast a = 1$, $1\ast a = a$ und $a\ast 1 = 1$. Dann sind, wie man durch Fallunterscheidung leicht feststellt, die Axiome A1, A2, A3 erfüllt. Ist S rechtsregulär, so ist die Erweiterung immer noch *fastrechtsregulär* in dem Sinne, daß $ax = ay \Rightarrow x = y \vee a = 0$ erfüllt ist. In solchen fastrechtsregulären rechtskomplementären Halbgruppen haben, wie man leicht bestätigt, stets folgende Axiome Gültigkeit:

(A1) $a(a\ast b) = b(b\ast a)\,,$ [B8]

(A2) $ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,,$ [B9]

(V1*) $a\ast ab = b \;\vee$ [B3]

$\vee\; d(a\ast ac) = d(c, d \in S)\,.$

Sind umgekehrt A1, A2, V1* erfüllt, so gilt, falls $a\ast ab \neq b$ ist,

(30)
$$\begin{aligned} d(c\ast c) &= d[c\ast c(a\ast ab)] \\ &= d(a\ast ab) = d \\ \vee\; d &= d[c\ast c(a\ast ab)]\,, \end{aligned}$$

in jedem Fall also A3, weshalb S rechtskomplementär ist, so daß nur zu zeigen bleibt, daß S fastrechtsregulär ist. Hier gilt, falls $a\ast ab \neq b$ ist,

(31)
$$\begin{aligned} ax &= ax[x\ast(a\ast a)] \\ &= ax(ax\ast a) \\ &= a(a\ast ax) \\ &= a \\ \Rightarrow a &= a(a\ast x)[(x\ast a)\ast a] \qquad (31) \\ &= x(x\ast a)[(x\ast a)\ast a] \\ &= xa[a\ast(x\ast a)] \\ &= xa\,, \end{aligned}$$

was $a = 0$ bedeutet und den Beweis abschließt zu

SATZ 4. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine fastrechtsreguläre rechtskomplementäre Halbgruppe, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome* A1, A2, V1* *erfüllt.*

2. Zur Axiomatik komplementärer Halbgruppen. In diesem Paragraphen soll, ausgehend von der Struktur der rechtskomplementären Halbgruppe, die Struktur der komplementären Halbgruppe analysiert werden. Hier gilt zunächst

SATZ 5. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine komplementäre Halbgruppe, wenn es bezüglich zweier weiterer Operationen $\ast$ und $:$ die Axiome erfüllt:*

(A1) $a(a\ast b) = b(b\ast a)\,,$ [B1]

(A2) $ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,,$ [B2]

(A3) $a(b\ast b) = a\,,$ [B3]

(A4) $c : ab = (c : b) : a\,,$ [B10]

(A5) $(a : a)(b : c)c = c(c\ast b)(a\ast a)\,.$ [B11]

Denn dies folgt aus

(32)
$$\begin{aligned} & (a : a)(1 : 1)1 = 1(1\ast 1)1 \\ \Rightarrow\;& (a : a)(1 : 1) = 1 \\ \Rightarrow\;& a : a = 1 \\ \Rightarrow\;& (a : a)b = b \\ \Rightarrow\;& (a : a)(b : a)a = a(a\ast b)(a\ast a) \\ \Rightarrow\;& (b : a)a = a(a\ast b) \\ &\qquad = b(b\ast a) \\ &\qquad = (a : b)b \\ \Rightarrow\;& aS = Sa\,. \end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf dieses Paragraphen interessieren wir uns für die charakteristischen Merkmale spezieller komplementärer Halbgruppen und beweisen:

SATZ 6. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine kommutative komplementäre Halbgruppe, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome erfüllt:*

(A1) $a(a\ast b) = b(b\ast a)\,,$ [B1]

(A2) $ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,,$ [B12]

(A2′) $ab\ast c = a\ast(b\ast c)\,,$ [B10]

(A3) $a(b\ast b) = a\,.$ [B3]

Denn aus diesen Axiomen ergibt sich

(33)
$$\begin{aligned} ab\ast ba &= a\ast(b\ast ba) \\ &= 1 \\ \Rightarrow ab &= ba\,. \end{aligned}$$

Es sei noch erwähnt, daß nach (33) die Kommutativität zwar aus den vier Axiomen gemeinsam folgt, daß sie sich aber auf Grund der zitierten Beispiele nicht schon aus einem Teil dieser Axiome herleiten läßt.

Hingewiesen sei ferner auf das System in [2].

Satz 7. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine reguläre kommutative komplementäre Halbgruppe, also ein abelscher Verbandsgruppenkern, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome erfüllt:*

(A1)	$a(a\ast b) = b(b\ast a)\,,$	[B8]
(A2′)	$ab\ast c = a\ast(b\ast c)\,,$	[B9]
(V1)	$a\ast ab = b\,.$	[B3]

Daß diese Axiome notwendig erfüllt sind, ergibt sich aus Satz 2. Umgekehrt läßt sich analog zum Beweis von Satz 2 zeigen, daß ein jedes Gruppoid dieser Art Axiom A3 erfüllt, da (2) und (28) leicht modifiziert werden können. Somit erledigt sich der Beweis analog zu (33).

Neben der Vertauschung von a und b in A2 bietet sich die Vertauschung von a und b in V1 an. Wir werden sehen, daß auch hierdurch der abelsche Verbandsgruppenkern charakterisiert wird. Dagegen zeigen die Halbgruppen mit $ab = b = a\ast b$, daß A1 nicht ersetzt werden kann durch $a(a\ast b) = (b\ast a)b$.

Satz 7′. *Ein Gruppoid S ist genau dann ein abelscher Verbandsgruppenkern, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome erfüllt:*

(A1)	$a(a\ast b) = b(b\ast a)\,,$	[B8]
(A2)	$ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,,$	[B9]
(V1′)	$a\ast ba = b\,.$	[B3]

Wir beweisen nacheinander:

(3′)
$$\begin{aligned} a^2 &= a(a\ast a^2) && \text{(V1′)} \\ &= a^2(a^2\ast a); \end{aligned}$$

(4′)
$$\begin{aligned} a^2\ast a &= a^2(a^2\ast a)\ast a && \text{(3′)} \\ &= (a^2\ast a)\ast(a^2\ast a) \\ &= u; \end{aligned}$$

(5′)
$$\begin{aligned} u^2\ast u &= u\ast(u\ast u) \\ &= u\ast u && \text{(4′)} \\ &= u; \end{aligned}$$

(6′)
$$\begin{aligned} u &= u\ast u^2 \\ &= u\ast u(u\ast u^2) && \text{(V1′)} \\ &= u\ast u^2(u^2\ast u) \\ &= u\ast u^2u && \text{(5′)} \\ &= u^2; \end{aligned}$$

(7′)
$$\begin{aligned} u^2 = u \Rightarrow au &= u^2\ast(au)u && \text{(6′)} \\ &= u\ast[u\ast(au)u] \\ &= u\ast au \\ &= a; \end{aligned}$$

(8′)
$$\begin{aligned} u\ast a &= u\ast au && \text{(7′)} \\ &= a; \end{aligned}$$

(9′)
$$\begin{aligned} u^2 = u \wedge v^2 = v \Rightarrow u &= uv \\ &= u(u\ast v) \\ &= v(v\ast u) \\ &= vu \\ &= v; \end{aligned}$$

(10′)
$$\begin{aligned} a\ast u &= a\ast(u\ast u) \\ &= ua\ast u \\ &= u(u\ast a)\ast u && \text{(8′)} \\ &= a(a\ast u)\ast u \\ &= (a\ast u)\ast(a\ast u) \\ &= u; \end{aligned}$$

(11′)
$$\begin{aligned} au &= a(a\ast u) && \text{(10′)} \\ &= u(u\ast a) \\ &= ua; \end{aligned}$$

(12′)
$$\begin{aligned} b\ast b &= b\ast(u\ast bu) \\ &= ub\ast bu \\ &= bu\ast ub && \text{(11′)} \\ &= u\ast(b\ast ub) \\ &= u\ast u \\ &= u; \end{aligned}$$

(13′)
$$\begin{aligned} ab\ast ba &= b\ast(a\ast ba) \\ &= b\ast b \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Offenbar implizieren (11′) und (12′) Axiom A3, während (13′) die Kommutativität sichert.

Die Sätze 1, 2 und 7′ zeigen den tieferen Zusammenhang auf zwischen den rechtskomplementären, den rechtsregulären rechtskomplementären und den kommutativen regulären komplementären Halbgruppen.

Schließlich gilt

Satz 8. *Ein Gruppoid S ist genau dann ein komplementärer Halbverband, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome erfüllt:*

(I1) $a^2(a\ast b) = b(b\ast a)$, [B1]

(A2) $ab\ast c = b\ast(a\ast c)$, [B13]

(I2) $ab\ast b = a\ast(b\ast b)$, [B10]

(A3) $a(b\ast b) = a$. [B3]

Denn auf Grund von Axiom I2 gilt $a\ast b|b$ wegen $b\ast(a\ast b) = ab\ast b = a\ast(b\ast b) = 1$, also $ab \geqslant a\cup b$, was zusammen mit $ab \leqslant a\cup b$ dann $ab = a\cup b = b\cup a = ba$ liefert.

Satz 8 hat noch mitergeben, daß jede idempotente komplementäre Halbgruppe notwendig kommutativ ist.

3. Arithmetik und ideale Arithmetik komplementärer Halbgruppen. Wir entwickeln zunächst einige Regeln, die bereits in [2] ausgesprochen wurden und auch im Nichtkommutativen gelten.

(34) $$a\leqslant b \Rightarrow a\ast c \geqslant b\ast c \quad \textit{und} \quad a\leqslant b \Rightarrow c\ast a \leqslant c\ast b\,, \qquad \wedge\ c:a \geqslant c:b\,, \qquad \wedge\ a:c \leqslant b:c\,.$$

Denn

$$a\leqslant b \Rightarrow b(a\ast c) \geqslant c \wedge c(c\ast b) \geqslant a\,.$$

(35) $$a(b\cup c) = ab\cup ac \quad \textit{und} \quad (a\cup b)c = ac\cup bc\,.$$

Denn

$$a(b\cup c) \geqslant ab\cup ac$$

und

$$\begin{aligned} ab\cup ac &= ab(ab\ast ac)\\ &= ab[b\ast(a\ast ac)]\\ &= a(a\ast ac)[(a\ast ac)\ast b]\\ &\geqslant ac(c\ast b) && (34)\\ &= a(b\cup c)\,. \end{aligned}$$

(36) *Existiert $a\cap b$, so existieren auch $ax\cap bx$ und $xa\cap xb$ und es gilt*

$$x(a\cap b) = xa\cap xb \quad \textit{und} \quad (a\cap b)x = ax\cap bx\,.$$

Denn

$$xa \geqslant x(a\cap b) \leqslant xb$$

und

$$\begin{aligned} & xa \geqslant c \leqslant xb\\ \Rightarrow\ & a \geqslant x\ast c \leqslant b\\ \Rightarrow\ & x\ast c \leqslant a\cap b\\ \Rightarrow\ & x(x\ast c) \leqslant x(a\cap b)\\ \Rightarrow\ & c \leqslant x(a\cap b)\,. \end{aligned}$$

(37) *Ist S $\cap$-abgeschlossen, so gilt*

$$a\cup(b\cap c) = (a\cup b)\cap(a\cup c)\,.$$

Denn

$$a\cup(b\cap c) \leqslant (a\cup b)\cap(a\cup c)$$

und

$$\begin{aligned} a\cup(b\cap c) &= (b\cap c)[(b\cap c)\ast a]\\ &= b[(b\cap c)\ast a]\cap c[(b\cap c)\ast a]\\ &\geqslant b(b\ast a)\cap c(c\ast a) && (34)\\ &= (a\cup b)\cap(a\cup c). \end{aligned}$$

(38) $$a\ast(b\cup c) = (a\ast b)\cup(a\ast c) \quad \textit{und} \quad (b\cup c):a = (b:a)\cup(c:a)\,.$$

Denn

$$\begin{aligned} & ax \geqslant b\cup c\\ \Longleftrightarrow\ & x \geqslant (a\ast b)\cup(a\ast c)\,. \end{aligned}$$

(39) *Existiert $a\cap b$, so gilt:*

$$(a\cap b)\ast c = (a\ast c)\cup(b\ast c) \quad \textit{und} \quad c:(a\cap b) = (c:a)\cap(c:b)\,.$$

Denn

$$\begin{aligned} & (a\cap b)x \geqslant c\\ \Longleftrightarrow\ & ax \geqslant c \leqslant bx\\ \Longleftrightarrow\ & a\ast c \leqslant x \geqslant b\ast c\,. \end{aligned}$$

Aus (38) und (39) folgt speziell:

(40) $$a\ast a(a\ast b) = a\ast(a\cup b) = (a\ast a)\cup(a\ast b) = a\ast b \quad \textit{und} \quad (a\cap b)\ast a = (a\ast a)\cup(b\ast a) = b\ast a\,.$$

Nach diesen bekannten Gesetzen zeigen wir weiter:

(41) $$a\ast b = [b:(a\ast b)]\ast b \quad \textit{und} \quad a:b = a:[(a:b)\ast a]$$

Denn

$$[b:(a\ast b)]\ast b \leqslant a\ast b$$

und

$$[b:(a\ast b)]\ast b \geqslant a\ast b \quad \text{wegen} \quad b:(a\ast b) \leqslant a\,.$$

Komplementäre Halbgruppen sind nicht notwendig $\cap$-abgeschlossen. Es sei deshalb gezeigt, wann c der GGT zu den Elementen a und b ist. Hier gilt:

(42) *Sind a und b zwei beliebige Elemente aus S, so ist c genau dann GGT zu a und b, wenn für jedes d aus S gilt:*

$$c\ast d = (a\ast d)\cup(b\ast d) \quad \textit{bzw.} \quad d : c = (d : a)\cup(d : b).$$

Die Bedingung folgt aus der Behauptung nach (39). Umgekehrt ergibt sich aus der Bedingung $c\ast c = 1 \Rightarrow (a\ast c)\cup(b\ast c) = 1 \Rightarrow a\ast c = 1 = b\ast c \Rightarrow a \geqslant c \leqslant b$ und $a \geqslant d \leqslant b \Rightarrow (a\ast d)\cup(b\ast d) = 1 \Rightarrow c\ast d = 1 \Rightarrow d|c$.

Nach (42) sind zwei Elemente a, b genau dann fremd, wenn für alle c aus S die Gleichung $(a\ast c)\cup(b\ast c) = c$ erfüllt ist. Das liefert für fremde Elemente a, b speziell $a\ast b = b$ und damit

(43) *Sind a und b fremd, so gilt $ab = ba$ und $a|bc \vee a|cb \Rightarrow a|c$.*

Denn nach Voraussetzung ist:

$$\begin{aligned} ab &= a(a\ast b)\\ &= b(b\ast a)\\ &= ba \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c\ast a &= c\ast(b\ast a)\\ &= bc\ast a\\ &= 1. \end{aligned}$$

Der Rest folgt, indem man die zweite Herleitung bezüglich : durchführt.

Wir nennen $p \in S$ *halbprim*, wenn $p = ab \Rightarrow p = a \vee p = b$ gegeben ist. Dann gilt:

(44) *Ein Element p aus S ist genau dann halbprim, wenn $c\ast p = 1 \vee c\ast p = p$ für alle c aus S erfüllt ist, was $p|ab \Rightarrow p|a \vee p|b$ impliziert.*

Ist p halbprim, so ergibt sich aus $p = [p : (c\ast p)](c\ast p) \Rightarrow c\ast p = p \vee p : (c\ast p) = p$, daß $c\ast p = p$ oder $c\ast p = [p : (c\ast p)]\ast p = p\ast p = 1$ ist. Umgekehrt folgt aus $p = ab \wedge p \neq a$, daß $a\ast p = p$ und damit auch $b = p$ sein muß.

Gilt schließlich $p|ab$, so erhalten wir $ab\ast p = 1 \Rightarrow b\ast(a\ast p) = 1 \Rightarrow a\ast p = 1 \vee b\ast p = 1 \Rightarrow p|a \vee p|b$.

(45) *Je zwei Halbprimelemente p, q sind miteinander vertauschbar.*

Ist $pq = q$, so folgt $xp = q$ und es muß $x = q \vee p = q$ gelten. Für $pq = p$ schließen wir analog. Gilt aber $p \neq pq \neq q \neq p$, so ist $p\ast q = q$ und $q\ast p = p$, woraus sich $pq = p(p\ast q) = q(q\ast p) = qp$ ergibt.

Für idempotente Elemente gilt

(46) *Die idempotenten Elemente aus S liegen im Zentrum und sind abgeschlossen bezüglich der Operationen $\cdot$, $\ast$, $:$, $\cup$ und $\cap$.*

Zunächst gilt $ab = a\cup b$, falls $a^2 = a$ ist, denn es ist ja dann $b \leqslant a\cup b$ und $a(a\cup b) = a\cup b$.

Hieraus ergibt sich für je zwei Idempotente a, b die Gleichung $(ab)^2 = a^2b^2 = ab = a\cup b = (a\cup b)^2$.

Gilt weiter $a\ast b = x$ mit idempotenten a, b, so folgt $ax^2 = axax = ax \Rightarrow ax\ast x^2 = xa\ast x^2 = a\ast(x\ast x^2) = 1 \Rightarrow a(x\ast x^2) = a$. Gäbe es nun ein $y < x$ mit $y(x\ast x^2) = x$, so hätten wir $ax = ay(x\ast x^2) = y(x\ast x^2)a = ya = ay$ mit Widerspruch, so daß $x^2 = x(x\ast x^2) = x$ gelten muß. Dual folgt $a : b = (a : b)^2$.

Ist schließlich die betrachtete Halbgruppe $\cap$-abgeschlossen, so ist für idempotente a, b $(a\cap b)^2 = a\cap ab\cap b = a\cap b$.

Zur Erarbeitung der weiteren Arithmetik benötigen wir den Bereich $\mathfrak{S}$ der endlichen *v-Ideale*. Wir gehen aus von beliebigen Halbgruppen S und bemerken, daß die v-Ideale charakterisiert sind durch

$$(s|uav \Rightarrow s|ucv) \Rightarrow c \in \mathfrak{a}.$$

A fortiori ist S selbst ein v-Ideal in S und man bestätigt leicht, daß der Durchschnitt einer Familie von v-Idealen wieder ein v-Ideal ist, sowie, daß der Durchschnitt $\{A\}$ aller A umfassenden v-Ideale gleich der Menge aller c ist, welche die Bedingung erfüllen

$$s|uAv \Rightarrow s|ucv.$$

Weiter gilt $\{A\}\{B\} \subseteq \{AB\}$ wegen

$$s|uABv \Rightarrow s|u\{A\}\{B\}v,$$

sowie

$$\{A\} = \{A'\} \wedge \{B\} = \{B'\} \Rightarrow \{AB\} = \{A'B'\}$$

wegen

$$s|uABv \Rightarrow s|uA'Bv \Rightarrow s|uA'B'v.$$

Auf Grund dieser Zusammenhänge wird jedem Paar von v-Idealen eindeutig ein Produktideal zugeordnet. Schließlich bildet zu je zwei v-Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ die Menge $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ aller x mit $\mathfrak{a}x \subseteq \mathfrak{b}$ und entsprechend die Menge $\mathfrak{a}\backslash\mathfrak{b}$ aller y mit $y\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ ein v-Ideal. Denn für $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = \mathfrak{x}$ gilt:

$$\begin{aligned} r|u\mathfrak{x}v &\Rightarrow r|ucv\\ \Rightarrow s|u\mathfrak{b}v &\Rightarrow s|u\mathfrak{a}\mathfrak{x}v\\ &\Rightarrow s|u\mathfrak{a}cv\\ &\Rightarrow \mathfrak{a}c \subseteq \mathfrak{b}\\ &\Rightarrow c \in \mathfrak{x}. \end{aligned}$$

Im folgenden sei S komplementär. Dann gehören genau diejenigen Elemente aus S zu $\{A\}$, die gemeinsames Vielfaches aller gemeinsamen Teiler von A sind. Denn $s|A \Rightarrow s|\{A\}$ und aus $g|A \Rightarrow g|c$ für alle $g \in S$ folgt:

$$\begin{aligned} s|uAv &\Rightarrow s : v|uA \\ &\Rightarrow u \ast (s : v)|A \\ &\Rightarrow u \ast (s : v)|c \\ &\Rightarrow u[u \ast (s : v)]|uc \\ &\Rightarrow u \cup (s : v)|uc \\ &\Rightarrow s : v|uc \\ &\Rightarrow (s : v)v|ucv \\ &\Rightarrow s \cup v|ucv \\ &\Rightarrow s|ucv \,. \end{aligned}$$

Speziell bedeutet das letzte Ergebnis, daß $\{A\} = \{a\}$ äquivalent ist mit $a = \bigcap A$. Weiter ergibt sich für Ideale mit endlicher Basis die wichtige Äquivalenz

$$\mathfrak{a}|_l\mathfrak{b} \iff \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b} \iff \mathfrak{a}|_r\mathfrak{b} \,.$$

Zunächst gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, so haben wir, wenn $A = a_1 \dots a_n$ eine endliche Basis von $\mathfrak{a}$ ist und b zu $\mathfrak{a}$ gehört, für $c = \bigcup\limits_1^n (a_\nu \ast b)$ die Implikationen:

$$d|b \Rightarrow d|\mathfrak{a}c$$

und

$$\begin{aligned} d|\mathfrak{a}c &\Rightarrow c \leqslant b \cup d = g \leqslant \mathfrak{a}c \\ &\Rightarrow g : c|\mathfrak{a} \Rightarrow g : c|b \\ &\Rightarrow (g : c)x = b \Rightarrow \mathfrak{a}x \geqslant b \\ &\Rightarrow x \geqslant c \Rightarrow (g : c)c \leqslant b \\ &\Rightarrow g|b \Rightarrow d|b \,. \end{aligned}$$

Somit ist $\mathfrak{a}\{c\} = \{b\}$, und wir erhalten, wenn wir b eine endliche Basis $B = b_1 \dots b_m$ von $\mathfrak{b}$ durchlaufen lassen und zu jedem b_μ das entsprechende c_μ konstruieren, mit diesen c_μ die 1. Behauptung auf Grund von $\mathfrak{a}\{c_\mu\} = b_\mu$. Der Rest folgt dual.

Da S isomorph ist zum Bereich aller Hauptideale $\{a\}$, identifizieren wir im folgenden die Hauptideale mit ihren Erzeugenden. Dann ist $\mathfrak{S}$ eine $\cap$-abgeschlossene volldistributive Verbandshalbgruppe, die S als teilerordnungstreue Unterhalbgruppe enthält. Der Beweis dieser Behauptung kann aus [2] übernommen werden. Es soll deshalb im weiteren Verlauf b das Ideal $\{b\}$ bedeuten und $\mathfrak{a} \ast b$ das eindeutig bestimmte Element c mit $\mathfrak{a}x \subseteq \{b\} \iff c|x$. Für $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ergibt sich dann leicht $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \ast c = b \ast (\mathfrak{a} \ast c)$

sowie $\{a, b\} \ast c = (a \ast c) \cup (b \ast c)$. Für idempotente Ideale $\mathfrak{a}$ erhalten wir das Ergebnis

(47) $$\mathfrak{a}x = x\mathfrak{a} \,, \quad \mathfrak{a} \ast x = x : \mathfrak{a} \,, \quad \mathfrak{a}x = \mathfrak{a}(\mathfrak{a} \ast x) \,.$$

Denn $\mathfrak{a}x \leqslant x\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a}x \leqslant \mathfrak{a} \cup x = \mathfrak{a}(\mathfrak{a} \ast x) \leqslant \mathfrak{a}x$.

Hiernach können wir den wichtigen Hilfssatz beweisen

(48) $\{a \ast b, b \ast a\}^2 = \{a \ast b, b \ast a\}$ *und* $(a \ast b) \ast (b \ast a) = b \ast a = (b \ast a) : (a \ast b)$ *und es gelten analog die dualen Aussagen.*

Denn

$$\begin{aligned} a \ast b &= \{a, b\}(b \ast a) \ast b \\ &= (b \ast a) \ast [\{a, b\} \ast b] \\ &= (b \ast a) \ast (a \ast b) \\ \Rightarrow \{a \ast b, b \ast a\}^2 &= \{\{a \ast b, b \ast a\}(a \ast b), \{a \ast b, b \ast a\}(b \ast a)\} \\ &= \{a \ast b, b \ast a\} \end{aligned}$$

wegen

$$a \ast b = \{a \ast b, b \ast a\} \ast (a \ast b) \,,$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \{a \ast b, b \ast a\}x &= x\{a \ast b, b \ast a\} \\ \Rightarrow \{a \ast b, b \ast a\} \ast c &= c : \{a \ast b, b \ast a\} \\ \Rightarrow (a \ast b) : (b \ast a) &= (a \ast b) : \{a \ast b, b \ast a\} \\ &= \{a \ast b, b \ast a\} \ast (a \ast b) \\ &= (b \ast a) \ast (a \ast b) \\ &= a \ast b \,. \quad \text{Der Rest folgt dual.} \end{aligned}$$

Hilfssatz (48) liefert noch die Ergebnisse

(49) $$(a \ast b)(b \ast a) = (b \ast a)(a \ast b) \,,$$
$$a \ast b \geqslant x \leqslant b \ast a \Rightarrow x(a \ast b) = a \ast b = (a \ast b)x \,.$$

Der Beweis der ersten Behauptung verläuft analog zum Beweis von (43). Der zweite Teil ergibt sich aus (48) auf Grund der Implikation $\{a \ast b, b \ast a\}(a \ast b) = a \ast b \Rightarrow x(a \ast b) = a \ast b$ und Hilfssatz (47).

Wir nennen eine komplementäre Halbgruppe *normal*, wenn sie das Axiom erfüllt:

(N) $$(a \ast b) \cap (b \ast a) = 1 = (a : b) \cap (b : a) \,.$$

Dann läßt sich zeigen:

(50) *Normale komplementäre Halbgruppen sind durch jedes der beiden nachfolgenden Gesetze* (N′) *bzw.* (N*) *charakterisiert:*

(N′) $$[b : (a \ast b)] \cup [a : (b \ast a)] = a \cap b \,,$$

(N*) $$(a \ast b) \cap (b \ast a) = 1 \,.$$

Gilt für die beiden Elemente a, b die Relation $(a*b) \cap (b*a) = 1$, so haben wir

$$a \geqslant x = [b : (a*b)] \cup [a : (b*a)] = x \leqslant b\,, \quad \text{also} \quad x*b \leqslant a*b\,,$$

woraus aus Dualitätsgründen die Behauptung auf Grund der Implikation folgt:

$$\begin{aligned} c|a \wedge c|b \quad & \Rightarrow x*c \leqslant x*b \leqslant a*b \\ & \wedge\ x*c \leqslant x*a \leqslant b*a \\ & \Rightarrow x*c \leqslant (a*b) \cap (b*a) = 1 \\ & \Rightarrow c|x\,. \end{aligned}$$

Ist weiter N′ erfüllt, so gilt

$$\begin{aligned} (a:b) \cap (b:a) &= [(a:b) : ((b:a)*(a:b))] \cup \\ &\quad \cup [(b:a) : ((a:b)*(b:a))] \\ &= [(a:b):(a:b)] \cup [(b:a):(b:a)] \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Damit ist aus Dualitätsgründen alles gezeigt.

Für $\cap$-abgeschlossene komplementäre Halbgruppen gilt noch ein Satz, der für den kommutativen Fall bereits in [13] bewiesen wurde, jedoch mit einer Methode, die sich nicht übernehmen läßt. Wir zeigen:

(51) *Eine $\cap$-abgeschlossene komplementäre Halbgruppe S ist genau dann normal, wenn sie eins der beiden Gesetze erfüllt:*

$$(\mathrm{N}^*_\cap) \qquad a*(b \cap c) = (a*b) \cap (a*c)\,,$$

$$(\mathrm{N}^*_\cup) \qquad (a \cup b)*c = (a*c) \cap (b*c)\,.$$

Ist S normal, so folgt zunächst für $a \leqslant b \cap c$ die Gleichungskette:

$$\begin{aligned} a*(b \cap c) &= [a*(b \cap c)][(b*c) \cap (c*b)] \\ &= [a*(b \cap c)][(b \cap c)*c] \cap \\ &\quad \cap [a*(b \cap c)][(b \cap c)*b] \\ &= (a*b) \cap (a*c)\,. \end{aligned}$$

Nehmen wir hiernach a beliebig an, so ist

$$\begin{aligned} a*(b \cap c) &= a*[a \cup (b \cap c)] \\ &= a*[(a \cup b) \cap (a \cup c)] \\ &= [a*(a \cup b] \cap [a*(a \cup c)] \\ &= (a*b) \cap (a*c)\,, \end{aligned}$$

wie behauptet.

Umgekehrt impliziert das Gesetz $\mathrm{N}^*_\cap$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned} (a*b) \cap (b*a) &= [(a \cap b)*b] \cap [(a \cap b)*a] \\ &= (a \cap b)*(b \cap a) = 1\,. \end{aligned}$$

Analog liefert uns das Gesetz $\mathrm{N}^*_\cup$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned} (a*b) \cap (b*a) &= [a*(a \cup b)] \cap [b*(a \cup b)] \\ &= (a \cup b)*(a \cup b) = 1\,. \end{aligned}$$

Schließlich haben wir in normalen komplementären Halbgruppen zunächst für $a \cup b \leqslant c$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned} (a \cup b)*c &= [(a*b) \cap (b*a)][(a \cup b)*c] \\ &= [(a*(a \cup b)) \cap (b*(a \cup b))][(a \cup b)*c] \\ &= [a*(a \cup b)][(a \cup b)*c] \\ &\quad \cap [b*(a \cup b)][(a \cup b)*c] \\ &= (a*c) \cap (b*c)\,, \end{aligned}$$

woraus für beliebiges $a \cup b$ resultiert

$$\begin{aligned} (a \cup b)*c &= [(a \cup b) \cap c]*c \\ &= [(a \cap c) \cup (b \cap c)]*c \\ &= [(a \cap c)*c] \cap [(b \cap c)*c] \\ &= (a*c) \cap (b*c)\,. \end{aligned}$$

Aus (50) folgt noch

(52) *Eine komplementäre Halbgruppe ist schon dann normal, wenn sie eins der beiden nachfolgenden Gesetze erfüllt:*

$$(\mathrm{BV}') \quad a : (b*a) = b : (a*b) \qquad \textit{oder} \qquad (\mathrm{BV}) \quad a : (b*a) = (b:a)*b\,.$$

Es ist $a : (b*a) = a \cap b$, denn dies folgt unter den gemachten Voraussetzungen wegen $a \geqslant a : (b*a) \leqslant b$ und $a \geqslant c \leqslant b \Rightarrow (c:a)*c = c = c : (a*c)$ aus $a \geqslant c \leqslant b \Rightarrow a : (b*a) \geqslant a : (c*a)$ nach (50).

Im letzten Teil dieses Paragraphen befassen wir uns mit der Arithmetik der regulären Elemente. Dabei soll a regulär heißen, wenn es die Äquivalenz erfüllt: $ax = ay \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow xa = ya$. Gleichbedeutend mit dieser Definition ist offenbar, daß für alle x gelten soll $[a*a(xa:a)]*x = 1$. Eine weitere wichtige Charakterisierung, die eine entscheidende Rolle bei der Konstruktion der Quotientenhülle spielen wird, lernen wir im Anschluß an den nächsten Hilfssatz kennen. Vorweg zeigen wir:

(53) *Die regulären Elemente einer jeden komplementären Halbgruppe bilden ein Halbideal R, was speziell bedeutet, daß sie abgeschlossen sind bezüglich der Operationen $\cdot$, $*$, $:$, $\cup$ und $\cap$.*

Unmittelbar aus der Definition folgt, daß 1 regulär ist, fast unmittelbar ergibt sich, daß mit a und b auch ab und mit ab auch a regulär ist. Hieraus entspringt die Regularität von $a\ast b$, $b : a$, $a \cup b$ und $a \cap b$, falls es existiert. Daß für ein jedes reguläre a alle $a \cap b$ existieren folgt aus $a\ast b \geqslant x \leqslant\leqslant b\ast a \Rightarrow x(b\ast a) = 1(b\ast a) \Rightarrow x = 1$ und dem ersten Teil des Beweises zu (50).

Nun bringen wir die angekündigte Charakterisierung:

(54) *Ein Element aus S ist genau dann regulär, wenn es als a mit allen Paaren b, c oder als b mit allen Paaren a, c das folgende Gleichungspaar erfüllt:*

(R*) $$a\ast bc = (a\ast b)[(b\ast a)\ast c]\,,$$

(R:) $$cb : a = [c : (a : b)](b : a)\,.$$

Genügt x den Bedingungen des Satzes, so wähle man $a = b = x$. Dann erhält man $x\ast xc = (x\ast x)[(x\ast x)\ast c] = c = [c : (x : x)](x : x) = cx : x$. Umgekehrt kann man zeigen:

$$\begin{aligned} a(a\ast b)[(b\ast a)\ast c] &= b(b\ast a)[(b\ast a)\ast c] \\ &\geqslant bc \\ \Rightarrow\ (a\ast b)[(b\ast a)\ast c] &\geqslant a\ast bc\,. \end{aligned}$$

Wegen $a\ast bc \geqslant a\ast b$, etwa $a\ast bc = (a\ast b)y$ gilt weiter die Relation

$$a(a\ast b)y \geqslant bc\,.$$

Hieraus ergibt sich für reguläres a oder b die Implikation:

$$\begin{aligned} &(a \cap b)(b\ast a)(a\ast b)y \geqslant (a \cap b)(a\ast b)c \\ \Rightarrow\ &(b\ast a)(a\ast b)y \geqslant (a\ast b)c \\ \Rightarrow\ &(a\ast b)(b\ast a)y \geqslant (a\ast b)c\,. \end{aligned}$$

Wir untersuchen den weiteren Sachverhalt zunächst für $a \in R$. Dann gilt auch $b\ast a \in R$, so daß wir erhalten:

$$\begin{aligned} (a\ast b)(b\ast a)y &\geqslant (a\ast b)c \cup (a\ast b)(b\ast a) \\ &= (a\ast b)[c \cup (b\ast a)] \\ &= (a\ast b)(b\ast a)[(b\ast a)\ast c)] \\ &= (b\ast a)(a\ast b)[(b\ast a)\ast c] \\ \Rightarrow\ x = (a\ast b)y &\geqslant (a\ast b)[(b\ast a)\ast c] \quad \text{für } x = a\ast bc \\ \Rightarrow\ x = a\ast bc &\geqslant (a\ast b)[(b\ast a)\ast c]\,. \end{aligned}$$

Ist dagegen b aus R, also auch $a\ast b$ aus R, so schließen wir:

$$\begin{aligned} &(a\ast b)(b\ast a)y \geqslant (a\ast b)c \\ \Rightarrow\ &(b\ast a)y \geqslant c \\ \Rightarrow\ &y \geqslant (b\ast a)\ast c \\ \Rightarrow\ &x = (a\ast b)y \geqslant (a\ast b)[(b\ast a)\ast c] \\ \Rightarrow\ &x = a\ast bc \geqslant (a\ast b)[(b\ast a)\ast c]\,. \end{aligned}$$

Der Rest der Behauptung läßt sich dual beweisen.

4. Klassische komplementäre Halbgruppen. In diesem Abschnitt soll die komplementäre Halbgruppe zu den in der Einleitung erwähnten klassischen Strukturen spezialisiert werden. Dabei setzen wir als bekannt voraus, daß sich jeder Boolesche Ring auffassen läßt als abschnittskomplementärer distributiver Verband und umgekehrt jeder abschnittskomplementäre distributive Verband betrachtet werden kann als Boolescher Ring vermöge der Zuordnung $a \cap b = ab$, $a \cup b = a + ab + b$, bzw. $a + b = (a\ast b) \cup (b\ast a)$, was die 0 des Ringes mit der 1 des Verbandes indentifiziert. Wir zeigen:

SATZ 9. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine Zerlegungshalbgruppe, wenn es bezüglich zweier weiterer Operationen $\ast$ und $:$ die Axiome erfüllt:*

(A1)	$a(a\ast b) = b(b\ast a)\,,$	[B1]
(A2)	$ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,,$	[B2]
(A3)	$a(b\ast b) = a\,,$	[B3]
(A4)	$c : ab = (c : b) : a\,,$	[B10]
(A5)	$(a : a)(b : c)c = c(c\ast b)(a\ast a)\,,$	[B11]
(Z)	$\lvert S\ast a\rvert = n\,.$ (1)	[B14]

Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß unter Voraussetzung von Z jedes $a \in S$ in Halbprimelemente zerfällt, da dann auf Grund von (44) und [2] alles bewiesen ist. Hierzu beachte man, daß sich nach (41) jedes a zerlegen läßt in $a = bc$ mit $b = a : c$ und $c = b\ast a$ sowie $b \neq a \neq c$, sofern a kein Halbprimelement ist. Zerlegt man $b\ast a$ entsprechend und setzt das Verfahren fort, so gelangt man nach endlich vielen Schritten zu einer Zerlegung $a = b_1p_1$ mit $b_1 = a : p_1$ und $p_1 = b_1\ast a$ mit halbprimem p, und $b_1 < a$. Entsprechend läßt sich b_1 zerlegen in $b_1 = b_2p_2$ mit $b_2 = b_1 : p_2$ und $p_2 = b_2\ast b_1$. Dabei ist auf Grund der Konstruktion $p_2p_1 = b_2\ast a$, weil aus $b_2p_2p_1 \leqslant b_2x$ folgt $x = p_2y$ und damit $b_2p_2p_1 \leqslant b_2p_2y$, also $p_2p_1 \leqslant x$ ist. Wegen $b_1 = a : p_1$ und $b_1 > b_2 = b_1 : p_2$ muß $p_1p_2 > p_1$ gelten. Das bedeutet insgesamt, daß bei sukzessiver Anwendung des Verfahrens a schließlich in ein Produkt von Halbprimfaktoren zerfällt.

(1) In Worten: Es gebe für jedes a aus S nur endlich viele $x\ast a$.

Wir interessieren uns weiter für die komplementären Halbgruppen, in denen zu je zwei Elementen $a \neq 1$, b ein n existiert mit $a^n \geqslant b$. Sie sollen wie üblich archimedisch heißen. A fortiori sind archimedische komplementäre Halbgruppen angeordnet. Denn wegen $(a * b) * (b * a) = b * a$ muß nach A2 gelten $a * b = 1 \vee 1 = b * a$. Das bedeutet weiter nach Hölder und Clifford, daß sich jede archimedische komplementäre Halbgruppe einbetten läßt in die additive Halbgruppe der nicht negativen reellen Zahlen, nämlich wenn S regulär ist, oder aber in die Halbgruppe der reellen Zahlen x mit $0 \leqslant x \leqslant 1$ bezüglich der Verknüpfung $ab = \min(a+b, 1)$. Hieraus erhellt die besondere Bedeutung der archimedischen komplementären Halbgruppen, die durch den folgenden Satz charakterisiert werden:

Satz 10. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine archimedische komplementäre Halbgruppe, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $*$ die Axiome erfüllt:*

(A1)	$a(a * b) = b(b * a)$,	[B15]
(A2)	$ab * c = b * (a * c)$,	[B16]
(A3)	$a(b * b) = a$,	[B17]
(AA)	*Zu je zwei Elementen* $1 \neq a, b$ *existiert ein* n *mit* $a^n \vert b \vert a^{n+1}$.	[B10]

Zunächst ist S bezüglich $\leqslant$ trivialerweise angeordnet, da $a^{n-1} = a^0$ nach sich zieht $b \leqslant a$, während anderenfalls $a \leqslant b$ gilt. Hieraus folgt weiter $a * b \leqslant b$, da sonst nach A2 auch jedes $a^n * b \geqslant b$ wäre wegen $a * xy \geqslant a * x$. Somit ist jeder Rechtsteiler von c auch ein Linksteiler von c. Weiter gilt $au = a \Rightarrow u = 1 \vee a^2 = a$ infolge $au = a \Rightarrow au^n = a$ für alle n, also $a^2 = a$, falls $u \neq 1$ ist, was $b \leqslant a$ für alle b bedeutet. Ist aber $ax < v$, so haben wir die Gleichung $ax = a(a * ax)[(a * ax) * x] = ax[(a * ax) * x]$, was $a * ax = x$ bewirkt, woraus weiter $ax < ay < v \Rightarrow x < y$ folgt. Wenden wir nun das auf Hölder zurückgehende Verfahren zum Nachweis der Kommutativität an, so sind wir fertig. Es sei zunächst, falls ein solches existiert , x das kleinste von 1 verschiedene Element. Dann erschöpfen die Potenzen von x das gesamte S, denn $x^n \leqslant a < x^{n+1} \Rightarrow a = x^n(x^n * a) \Rightarrow x^n * a < x \Rightarrow x^n * a = 1 \Rightarrow a = x^n$. Gibt es kein kleinstes $x \neq 1$, so erhalten wir für $ab * ba \neq 1$ ein $x \neq 1$ mit $x^2 < ab * ba$ und damit $x^n \leqslant a \leqslant x^{n+1}$ und $x^m \leqslant b \leqslant x^{m+1}$, was $x^{n+m} \leqslant ab \leqslant x^{n+m+2} \leqslant abx^2 < ba$ impliziert, mit Widerspruch zu $x^{n+m+2} \geqslant ba$.

Bezüglich regulärer komplementärer Halbgruppen gilt:

Satz 11. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine reguläre komplementäre Halbgruppe, wenn es bezüglich zweier weiterer Operationen $*$ und $:$ die Axiome erfüllt:*

(A1)	$a(a * b) = b(b * a)$,	[B8]
(A2)	$ab * c = b * (a * c)$,	[B9]
(V1)	$a * ab = b$,	[B3]
(V2)	$a(a * b) = (b : a)a$,	[B18]
(V3)	$ba : a = a * ab$.	[B19]

Denn $ab = a(a * ab) = (ab : a)a = (ab : b)b = b(b * ab) \Rightarrow aS = Sa$, woraus folgt, daß das eindeutig bestimmte c mit $ca = b \cup a$ Linkskomplement von a bezüglich b ist.

Wir wenden uns als nächstes den Booleschen Verbänden zu und erhalten

Satz 12. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine Boolesche Algebra, wenn es bezüglich zweier weiterer Operationen $*$ und $\circ$ die Axiome erfüllt:*

(A1)	$a(a * b) = b(b * a)$,	[B20]
(A2)	$ab * c = b * (a * c)$,	[B2]
(A3)	$a(b * b) = a$,	[B3]
(B)	$b[(a \circ a) * c] = (a * b)[(a * b) * (a * (a \circ a)) * b)]$.	[B10]

Zunächst folgt für $b = 1$, daß $(a \circ a) * c = 1$, also $c \vert a \circ a$ für alle c aus S sein muß, was $a \circ a = 0$ bedeutet wegen $a \circ a \leqslant (a \circ a)x \leqslant a \circ a = x[x * (a \circ a)] = (a \circ a)[(a \circ a) * x] = a \circ a$. Setzen wir nun $a \circ a = 0$ und $a * 0 = a'$, so gilt:

$$a * a' = (a * a')[(a * a') * (a' * a')] = a'$$

und

$$a' * a = (a * a)[(a * a) * (a' * a)] = a\,,$$

was

$$0 = aa' = a(a * a') = a'(a' * a) = a'a = 0$$

bedingt. Ist weiter $ab = 0 = ba$ und $a * b = b$, so gilt $a' = b$ wegen der Implikation

$$ax \geqslant 0 \Rightarrow ax \geqslant b \Rightarrow x \geqslant a * b \Rightarrow x \geqslant b$$

und hieraus folgt wegen

$$a^2a' = a(aa') = a(a'a) = (aa')a = (a'a)a = a'a^2 = 0$$

sowie

$$a^2 * a' = a * (a * a') = a * a' = a'\,,$$

daß $a^{2'} = a'$ ist, was dann die Idempotenz von S bewirkt auf Grund von

$$a^2 = [(a^2)']' = (a')' = a\,.$$

Wegen $0 * c = 1$ ergibt sich hieraus Axiom I1 und aus Axiom B die Relation $a * b \vert b$ und damit nach Satz 8 $ab = ba$.

Hiernach bleibt nur zu zeigen, daß S $\cap$-abgeschlossen ist und $a \cap a' = 1$ erfüllt. Diesbezüglich gilt zunächst

$$\begin{aligned} a \geqslant c \leqslant a' \Rightarrow c &= (a\ast c)[(a\ast c)\ast(a'\ast c)] \\ &= 1(1\ast 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

und weiter gelten die Relationen

$$\begin{aligned} a\ast b &\leqslant a\ast 0 = a' \\ b\ast a &\leqslant a\,, \end{aligned}$$

woraus nach (50) die $\cap$-Abgeschlossenheit von S folgt.

Es sei nun umgekehrt S eine Boolesche Algebra. Dann gilt bezüglich $\cup$ $a\ast b = a' \cap b$. Denn $a \cup (a' \cap b) = a \cup b$. Ist weiter $y < a' \cap b$, so muß auch $a \cup y < a \cup b$ sein, da $a' \cap b = (a \cup b')'$ ist. Hieraus ergibt sich für $a' \cap b = c$ die Implikation

$$\begin{aligned} a \cup x \geqslant b &\Rightarrow a \cup b = a \cup (x \cap c) \\ &\Rightarrow x \cap c = c \\ &\Rightarrow c = a' \cap b \leqslant x\,. \end{aligned}$$

Setzen wir noch $a \circ b = 0$ für alle a, b, so erhalten wir die Gleichungskette:

$$\begin{aligned} (a\ast b)[(a\ast b)\ast((a\ast(a\circ a))\ast b)] &= (a\ast b) \cup (a'\ast b) \\ &= (a \cap a')\ast b \\ &= 1\ast b = b \\ &= b[(a\circ a)\ast c]\,. \end{aligned}$$

Aus Satz 12 folgt unmittelbar

Satz 13. *Ein Gruppoid S ist genau dann ein Boolescher Ring, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome erfüllt:*

(A1)	$a(a\ast b) = b(b\ast a)\,,$	[B20]
(A2)	$ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,,$	[B21]
(A3)	$a(b\ast b) = a\,,$	[B6]
(BR)	$(a\ast b)[(a\ast b)\ast((a\ast c)\ast b)] = b\,.$	[B10]

Denn setzt man $c = a^2$ und $b = a\ast a^2$, so erhält man $a\ast a^2 = 1$, also $a^2 = a(a\ast a^2) = a1 = a$, so daß die Teiler eines jeden a einen Booleschen Verband bilden nach Satz 12. Umgekehrt folgt aus $a \cap (a\ast c) = 1$ nach (42) das Axiom BR.

Im Beweis zu Satz 12 wurde gezeigt, daß $a' \cap b = a\ast b$ ist, was bedeutet, daß in Booleschen Ringen die Festsetzung $a + b = (a\ast b) \cup (b\ast a)$ eine assoziative Operation liefert. Angeregt durch einen Satz von Swamy können wir zeigen, daß diese Eigenschaft sogar charakteristisch ist. Es gilt genauer:

Satz 13'. *Ein Gruppoid S ist genau dann ein Boolescher Ring, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome erfüllt:*

(A1)	$a(a\ast b) = b(b\ast a)\,,$	[B1]
(A2)	$ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,,$	[B22]
(A3)	$a(b\ast b) = a\,,$	[B6]
(BR')	$[a\ast(b\ast c)(c\ast b)][(b\ast c)(c\ast b)\ast a] = [(a\ast b)(b\ast a)\ast c][c\ast(a\ast b)(b\ast a)]\,.$	[B10]

Zunächst gilt trivialerweise $a+a=1$, $1+a=a+1=a$, $a+ab = ab+a = a\ast ab$. Das impliziert weiter $a\ast a^2 = a\ast[(a\ast a^2)\ast a] = 1$, also $a^2 = a$ und somit $a\ast b = a\ast(a\ast b) \leqslant a\ast(a\ast b)(b\ast a) \leqslant a+a+b = b$, was $ab = ba$ bewirkt. Endlich gilt $a \geqslant x \leqslant a\ast b \Rightarrow x+(a\ast b) = x\ast(a\ast b) = ax\ast b = a\ast b \Rightarrow x = 1$.

Im Hinblick auf das erwähnte Birkhoffproblem scheinen noch solche komplementäre Halbgruppen interessant, in denen jedes Element als Produkt eines idempotenten u mit einem regulären v dargestellt werden kann. Zu ihnen gehören u.a. alle subdirekten Produkte von Booleschen Ringen mit Verbandsgruppenkernen. Komplementäre Halbgruppen mit der erwähnten Zerlegungseigenschaft sind vor allem insofern von Interesse, als sie identisch sind mit denjenigen komplementären Halbgruppen, deren Quotientenhülle *invers* ist, was in [3] gezeigt wird. Hier beweisen wir:

Satz 14. *Ein Gruppoid S ist genau dann eine komplementäre Halbgruppe mit der Eigenschaft, daß sich jedes a aus S zerlegen läßt in ein Produkt uv mit idempotentem u und regulärem v, wenn es bezüglich einer weiteren Operation $\ast$ die Axiome erfüllt:*

(A1)	$a(a\ast b) = b(b\ast a)\,,$	[B1]
(A2)	$ab\ast c = b\ast(a\ast c)\,,$	[B2]
(A3)	$a(b\ast b) = a\,,$	[B3]
(A4)	$c : ab = (c : b) : a\,,$	[B10]
(A5)	$(a : a)(b : c)c = c(c\ast b)(a\ast a)\,,$	[B11]
(IR)	$[(a\ast a^2)\ast(a\ast a^2)[b(a\ast a^2) : (a\ast a^2)]]\ast b = b\ast b\,.$	[B23]

Axiom (IR) sichert, daß jedes $a\ast a^2$ regulär ist, und das impliziert:

$$\begin{aligned} a^2 &= (a\ast a^2)[(a\ast a^2)\ast a][a : (a\ast a^2)](a\ast a^2) \\ &= (a\ast a^2)[(a\ast a^2)\ast a](a\ast a^2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad a &= (a \ast a^2)[(a \ast a^2) \ast a] \\
&= (a \ast a^2)[(a \ast a^2) \ast a][a : (a \ast a^2)] \\
&= a[a : (a \ast a^2)] \\
\Rightarrow \qquad a \ast a^2 &= [a : (a \ast a^2)] \ast (a \ast a^2) \\
\Rightarrow \qquad a &= [a : (a \ast a^2)][(a : (a \ast a^2)) \ast (a \ast a^2)] \\
&= (a \ast a^2)[(a \ast a^2) \ast (a : (a \ast a^2))] \\
\Rightarrow \qquad (a \ast a^2) \ast a &= (a \ast a^2) \ast [a : (a \ast a^2)] \leqslant a : (a \ast a^2) \\
\Rightarrow \qquad a &= (a \ast a^2)[(a \ast a^2) \ast a] \\
&= (a \ast a^2)[(a \ast a^2) \ast a][(a \ast a^2) \ast a] \\
\Rightarrow \quad [(a \ast a^2) \ast a]^2 &= (a \ast a^2) \ast a\,.
\end{aligned}
$$

Ist umgekehrt jedes a in der gewünschten Weise zerlegbar, so folgt $uv \ast (uv)^2 = uv \ast uv^2 = v \ast (u \ast uv^2) \leqslant v^2$ und damit die Behauptung.

Ausgehend von Satz 14 haben wir Zugang zu zwei wichtigen Korollaren. Bedenken wir nämlich, daß die Teilerfremdheit der regulären und idempotenten Elemente gesichert ist, wenn jedes idempotente Element nur den regulären Teiler 1 besitzt, und daß diese Eigenschaft den direkten Produkten von Booleschen Ringen mit Verbandsgruppenkernen a fortiori zukommt, so liegen die beiden Charakterisierungen nahe:

Korollar 1. *Eine komplementäre Halbgruppe S ist genau dann das direkte Produkt einer idempotenten und einer regulären komplementären Halbgruppe, wenn sie neben* IR *das Axiom erfüllt:*

(IV) $$[(a \ast a(ba : a)) \ast b]^2 = [a \ast a(ba : a)] \ast b.$$

Denn diese Bedingung ist offenbar notwendig. Sie ist aber auch hinreichend wegen $x \leqslant a = a^2 \Rightarrow x = [a \ast a(a : a)] \ast x = [a \ast a(xa : a)] \ast x = x^2$ und (43).

Korollar 2. *Eine komplementäre Halbgruppe S ist genau dann das direkte Produkt eines Booleschen Ringes und eines Verbandsgruppenkerns, wenn sie neben* IR *das Axiom erfüllt:*

(BV) $$a : (b \ast a) = (b : a) \ast b.$$

Diese Bedingung ist notwendig, da in Booleschen Ringen gilt $(a \ast b) \ast b = [(a \cap b) \ast b] \ast b = a \cap b$ und in Verbandsgruppenkernen die Gleichung $a = (a \cap b)(b \ast a) = (a : b)(a \cap b)$ erfüllt ist. Umgekehrt folgt aus BV für reguläre x die Implikation $x \leqslant a = a^2 \Rightarrow x = a : (x \ast a) = a : (x \ast xa) = a : a = 1$ und weiter zieht $a = a^2$ nach sich $a \cap (a \ast c) = (a \ast c) : : [a \ast (a \ast c)] = (a \ast c) : (a \ast c) = 1$, was zusammen mit (43) die Behauptung ergibt.

In [4] wird nachgewiesen, daß Axiom IR diejenigen komplementären Halbgruppen charakterisiert, deren Zerlegung nach dem regulären Kern idempotent ist. Analog wird sich zeigen, daß genau diejenigen komplementären Halbgruppen eine reguläre Zerlegung nach ihrem idempotenten Kern besitzen, die das Axiom IV erfüllen, und wir werden sehen, daß komplementäre Halbgruppen, die Axiom IV erfüllen, bezüglich der Multiplikation eingebettet werden können in komplementäre Halbgruppen, die Axiom IR erfüllen. Aus diesem Grunde erwähnen wir noch, daß das um IV erweiterte Axiomensystem der komplementären Halbgruppe unabhängig ist, was die Beispiele B1, B2, B3, B10, B11, B23 beweisen. Bezüglich der Kombination IV mit BV erhalten wir

Satz 15. *Eine komplementäre Halbgruppe ist genau dann das direkte Produkt eines Booleschen Ringes mit einem Verbandsgruppenkern, wenn sie die Axiome* IV *und* BV *erfüllt.*

Wie gezeigt, gilt zunächst $x \leqslant a = a^2 \Rightarrow x = x^2$. Weiter ist das Element a genau dann regulär, wenn es nur 1 als idempotenten Teiler besitzt. Denn ist a regulär, muß jeder idempotente Teiler 1 sein. Ist a nicht regulär, so gibt es ein Paar x, y mit (etwa) $xa = ya$ und $x \ast y \neq 1$. Dann ist $x(x \ast y)a = (x \cup y)a = xa$, so daß $(x \cup y) \ast (x \cup y)a < a$ gilt oder $x \ast xa = (x \ast y)a$, also $(x \ast y)a = a$, was zur Folge hat $(x \ast y) \ast a < a$, da $a : [(x \ast y) \ast a] = x \ast y \neq 1$ ist nach (52) und Voraussetzung. Das bedeutet insgesamt, daß ein z existiert mit $z \ast za < a$, also auch mit $1 \neq [z \ast z(az : z)] \ast a = u = u^2 \leqslant a$. Hieraus folgt IR, da $x = x^2 \leqslant a \ast a^2$ impliziert $a \geqslant x \leqslant a \ast a^2 \Rightarrow x = (a \ast a^2) : [x \ast (a \ast a^2)] = (a \ast a^2) : (ax \ast a^2) = (a \ast a^2) : (a \ast a^2) = 1$. Damit ist der Beweis beendet aus Dualitätsgründen und nach Korollar 2.

Ergänzung bei der Korrektur. Im Hinblick auf Koppelungsmöglichkeiten der Struktur der komplementären Halbgruppe mit der klassischen Struktur des Ringes scheint noch das folgende Resultat erwähnenswert:

Zusatz. *Es sei R ein Ring mit $aR = Ra$ für alle $a \in R$ und S die Halbgruppe der Hauptideale aus R bezüglich $\{a\}\,\{b\} = \{ab\}$. Dann gilt: Ist S komplementär, so ist S auch normal, und ferner erfüllt S unter dieser Voraussetzung genau dann Axiom* IR, *wenn R kein nilpotentes Element besitzt.*

Zunächst besitzt S und damit auch R eine 1, was die Implikation liefert:

$$
\begin{aligned}
&\{a\}/\{b\} = \{c\} \wedge aef = a \wedge cef = c \\
&\Rightarrow b \,|\, a(ef - 1 + c) \;\Rightarrow e \,|\, c \,|\, (ef - 1 + c) \;\Rightarrow e \,|\, 1\,,
\end{aligned}
$$

woraus nach (49) und (50) folgt, daß S normal ist, wenn S komplementär ist, und daß $\{c\}$ in S keinen idempotenten Teiler außer $\{1\}$ haben kann, wenn $\{b\} = \{a^2\}$ ist. Mit lateinischen Buchstaben für die Elemente aus S gilt weiter IR $\Rightarrow a^n = 0 \Rightarrow (uv)^n = 0 \Rightarrow uv^n = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow a = 0$ und ist R frei von nilpotenten Elementen, gilt $ab = 0 \Rightarrow (ba)^2 = 0 = (a \cup b)^2 \Rightarrow ba = 0 = a \cup b \Rightarrow a \ast 0 = 0 : a$, so daß mit $a \ast 0 = v$ und $v \ast 0$

$= u \leqslant a$ folgt $u \cap v = (v \ast 0) \cap (u \ast 0) = (u \cup v) \ast 0 = 1 (51) \Rightarrow u^2 | uv \wedge u^2 \cap v = 1 \Rightarrow u = u^2 \leqslant a$, was nach dem 1. Teil IR bedingt.

5. Beispiele.

BEISPIEL 1. Es sei S die Halbgruppe der Elemente $1, a, b$ mit der Verknüpfung $1x = x = x1$, $ab = aa = a$ und $ba = bb = b$, sowie $x \ast y = 1 = y : x$.

BEISPIEL 2. Es sei S der Verband der Elemente $1, a, b, c, 0$ mit $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 0$, $1 \leqslant c \leqslant 0$, $1 \ast x = x$, $0 \ast x = x \ast x = x \ast 1 = 1$, $a \ast 0 = b \ast 0 = c$, $c \ast 0 = a$, $a \ast b = c \ast b = b$, $a \ast c = b \ast c = c$, $c \ast a = a$, $b \ast a = 1$ sowie $b : a = a \ast b$ und $a \circ a = 0$. Man betrachte S bezüglich $\cup$.

BEISPIEL 3. Es sei S eine nichtkommutative Halbgruppe mit 0 betrachtet bezüglich $a \ast b = b : a = 0$.

BEISPIEL 4. Es sei S eine Menge von mindestens zwei Elementen a, b betrachtet bezüglich $ab = b = a \ast b$.

BEISPIEL 5. Es sei S eine kommutative Halbgruppe mit 1 und mindestens zwei verschiedenen Elementen a, b betrachtet bezüglich $a \ast b = 1$, falls $a = b$, und $a \ast b = b$, falls $a \neq b$ gilt.

BEISPIEL 6. Es sei S ein Halbverband mit mindestens zwei verschiedenen Elementen. Man setze $a \ast b = b$.

BEISPIEL 7. Es sei S die Menge aus Beispiel 4 betrachtet bezüglich $ab = b$ und $a \ast b = \text{const}$.

BEISPIEL 8. Es sei S eine abelsche Gruppe mit $a \ast b = b : a = a^{-1}b$.

BEISPIEL 9. Es sei S die Halbgruppe der Zahlen $1, 2, 4, 6, \ldots$ mit der üblichen Multiplikation. Man setze $a \ast b = b : a = b/a$, falls $a|b$, $a \ast b = b : a = 1$, falls $b|a$, und $a \ast b = b : a = b$ im letzten Fall.

BEISPIEL 10. Es sei S die Halbgruppe der Elemente $1, a, b, 0$ mit der Multiplikation $1x = x = x1$, $0x = 0 = x0$, $ab = aa = a$, $ba = bb = b$. Diese Halbgruppe ist rechtskomplementär. Man erkläre $a : b$ so, daß $a : a = 1$ sowie $(x : y)y = y(y \ast x)$ ist und setze $a \circ a = 0$.

BEISPIEL 11. Es sei S die Halbgruppe aus Beispiel 10 mit $x : y = x$.

BEISPIEL 12. Es sei S die Halbgruppe, die aus Beispiel 10 durch Spiegelung an der Diagonalen hervorgeht. Man setze $x \ast y = y : x$.

BEISPIEL 13. Es sei S ein Halbverband mit 1 und 0. Man setze $a \ast b = 1$, falls $a \geqslant b$ und $a \ast b = b$ sonst.

BEISPIEL 14. Es sei S eine unendliche Boolesche Algebra mit $\cup$ als $\cdot$.

BEISPIEL 15. Es sei S der Bereich der reellen Zahlen des abgeschlossenen Intervalls $[0, 1]$. Man setze $ab = a + b$, falls $a + b \leqslant 1$ und $ab = \infty$, falls $a + b > 1$ ist, sowie $a \ast b = 0$.

BEISPIEL 16. Es sei S der Bereich aus Beispiel 15, diesmal mit $a \ast b = 0$, falls $a = b$ gilt, und $a \ast b = b$, falls $a \neq b$ ist.

BEISPIEL 17. Es sei S der Bereich aus Beispiel 15 mit $a \ast b = 1$.

BEISPIEL 18. Es sei S die Halbgruppe der Paare $(a|b)$ nicht negativer ganzer Zahlen bezüglich $(a|b)(c|d) = (a + c | 2^c b + d)$. S ist rechtskomplementär. Man erkläre $a : b$ so, daß $ba : a = b$ ist.

BEISPIEL 19. Es sei S die Halbgruppe der Ordnungsisomorphismen der Menge R der reellen Zahlen auf Endstücke von R mit $r \leqslant \varphi(r)$. Erklärt man in dieser Halbgruppe $a \circ b$ als ba, so ist S bezüglich $\circ$ rechtskomplementär und es gilt $a|_l b \Leftrightarrow a|_r b$. Man setze $b : a$ so fest, daß $(b : a) \circ a = a \cup b$ wird.

BEISPIEL 20. Es sei S eine Menge von mindestens zwei Elementen. Man setze $ab = a$ und $a \ast b = b$.

BEISPIEL 21. Es sei S eine kommutative Halbgruppe mit 1. Man setze $a \ast b = 1$, falls $a = b$ ist, man setze $a \ast b = b$, falls $a \neq b$ gilt.

BEISPIEL 22. Man betrachte die Elemente $1, a, b, 0$ bezüglich der Verknüpfungen $x1 = x$ und $xy = 1$, falls $y \neq 1$, sowie $x \ast x = 1$ und $x \ast y = 0$, falls $y \neq x$.

BEISPIEL 23. Es sei S die Menge der reellen Zahlen aus $[0, 1]$, betrachtet bezüglich $ab = \min(a + b, 1)$.

Literaturverzeichnis

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, AMS Coll. Publ. 1967.

[2] B. Bosbach, *Komplementäre Halbgruppen. Ein Beitrag zur instruktiven Idealtheorie*, Math. Ann. 161 (1965), S. 279-295.

[3] — *Komplementäre Halbgruppen. Kongruenzen und Quotienten.*

[4] — *Komplementäre Halbgruppen. Eine Darstellungstheorie*, Math. Ann. 179 (1968) S. 1-14.

[5] A. H. Clifford, *Naturally totally ordered commutative semigroups*, Amer. J. Math. 76 (1954), S. 631-646.

[6] — and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, AMS Math. Surveys 1961.

[7] L. Fuchs, *Teilweise geordnete algebraische Strukturen*, Studia Mathematica, 1966.

[8] O. Hölder, *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß*, Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Cl. 53 (1901), S. 1-64.

[9] K. Iseki, *An algebra related with a propositional calculus*, Proc. Jap. Academy 42 (1966), S. 26-29.

[10] — and Y. Arai, S. Tanaka, *Characterizations of* BCI, BCK-*algebras*, Proc. Jap. Academy 42 (1966), S. 105-107.

[11] K. L. N. Swamy, *Dually residuated lattice ordered semigroups*, Math. Ann. 159 (1965), S. 105-114.

[12] — *Dually residuated lattice ordered semigroups II*, Math. Ann. 160 (1965), S. 64-71.

[13] M. Ward and R. P. Dilworth, *Residuated lattices*, Trans. AMS 45 (1939), S. 335-354.

Reçu par la Rédaction le 5. 1. 1967