[2] W. Holsztyński, *Une généralisation du théorème de Brouwer sur les points invariants*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. math., astr., et phys. 12 (1964), pp. 603-606.

[3] — *Universal mappings and fixed point theorems*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math., astr., et phys. 15 (1967), pp. 433-438.

[4] — *A remark on the universal mappings of 1-dimensional continua*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. math., astr., et phys. 15 (1967), pp. 525-527.

[5] — *Universality of mappings onto the products of snake-like spaces. Relation with dimension*, Bull. Polon. Acad. Sci. 16 (1968), pp. 161-167.

[6] — *Universality of the product mappings onto products of I^n and snake-like spaces*, Fund. Math. this volume, pp. 147-155.

[7] — *Fixed points of arcwise connected spaces*, ibid. LXIV. 3.

[8] W. Holsztyński and S. Iliadis, *Approximation of many-valued mappings. Some application* (in Russian), Bull. Polon. Acad. Sci. 16 (1968).

[9] R. J. Knill, *Cones, products and fixed points*, Fund. Math., 60 (1967), pp. 35-46.

Reçu par la Rédaction le 11. 9. 1967

Euklidische und Minkowskische Orthogonalitätsrelationen

von

Wolfgang Rautenberg (Berlin)

In affinen Ebenen lassen sich Orthogonalitätsrelationen danach unterscheiden, ob sie *selbstorthogonale* (*singulär, isotrop*) Richtungen enthalten oder nicht, anders ausgedrückt, ob die ihnen entsprechenden Involutionen auf der unendlich fernen Geraden von hyperbolischen oder elliptischen Typ sind. Die ersteren seien *Minkowskische* (pseudoeuklidische) die letzeren *Euklidische* Orthogonalitätsrelationen genannt.

Die allgemeinen Eigenschaften dieser Relationen werden gewöhnlich erst nach Einführung von Koordinaten durch die Untersuchung quadratischer Formen, oder mit Hilfsmitteln der Theorie der projektiven Abbildungen untersucht. Es ist vom Standpunkt der Grundlagen der Geometrie, wie auch für die Geometrie selbst von Interesse, diese Eigenschaften innerhalb der Theorie der affinen Ebenen selbst herzuleiten. Bemerkenswert ist, daß die hier genannten Theoreme und Corollare auf synthetischen, d. h. rein geometrischen Wege sehr viel schneller und eleganter als mit analytischen Hilfsmitteln herleitbar sind.

Es wird u.a. ein Kriterium für die Existenz singulärer Richtungen angegeben. Ferner werden Bedingungen für die Kommensurabilität von Orthogonalitätsrelationen genannt. Die Untersuchungen sind von einer Anordnung unabhängig.

Wir betrachten hier i. a. *Translationsebenen*, also affine Ebenen, mit dem sogenannten kleinen Satz von Desargues als zusätzlichem Axiom. [1] Um Sonderfälle auszuschliessen, wollen wir außerdem annehmen, daß die Diagonalen eines Parallelogramms einander schneiden (Fano-Axiom).

Punkte werden mit $A, B, \ldots$, Geraden mit $a, b, \ldots$ bezeichnet. AB bezeichnet die Verbindungsgerade der Punkte A, B; $a*b$ den Schnittpunkt zweier nicht paralleler Geraden a, b, $\|$ bezeichnet die Parallelitätsrelation und $\varrho, \sigma, \ldots$ die Aequivalenzklassen dieser Relation, *Richtungen* genannt. $\vdash$ bezeichnet Orthogonalitätsrelationen.

(1) Die folgenden Theoreme gelten meist auch ohne diese Voraussetzung; es ist m. W. unbekannt, ob die Existenz von O-Relationen in affinen Ebenen nicht schon den kleinen Desargues impliziert.

Eine zweistellige Relation $\vdash(a, b)$ zwischen den Geraden einer Translationsebene heiße *Orthogonalitätsrelation*, wenn folgende Forderungen erfüllt sind:

O₁: *Wenn* $\vdash(a, b)$ *und* $a\|a'$ *und* $b\|b'$, *so ist* $\vdash(a', b')$.

O₂: *Ist* $A_1A_2A_3$ *ein Dreieck und gibt es eine Gerade* a_1 *durch* A_1 *und eine Gerade* a_2 *durch* A_2 *mit* $\vdash(A_2A_3, a_1)$, $\vdash(A_1A_3, a_2)$ *und schneiden sich* a_1 *und* a_2 *in einem von* A_3 *verschiedenen Punkt* S, *sogilt* $\vdash(A_1A_2, A_3S)$.

O₃: *Wenn* $\vdash(a, b)$ *und* $\vdash(a, c)$, *so ist* $b\|c$.

O₄: *Es gibt Paare* (a_1, a_2) *und* (b_1, b_2) *mit* $a_i \nparallel b_j$ $(i, j = 1, 2)$, *so daß* $\vdash(a_1, a_2)$, $\vdash(b_1, b_2)$.

$\mathbf{O_1}$ besagt, daß $\vdash$ auch als Relation in der Menge der Richtungen angesehen werden kann. $\mathbf{O_2}$ enspricht dem wohlbekannten Höhensatz für Dreiecke: die Lote durch die Eckpunkte auf die gegenüberliegenden Seiten verlaufen durch einen Punkt. $\mathbf{O_3}$ besagt, dass es zu vorgegebener Richtung höchstens eine Lotrichtung gibt.

Jede diesen Forderungen genügende Relation ist symmetrisch. Ferner gibt es zu einer Geraden a und einem vorgegebenen Punkt auf oder außerhalb dieser Geraden genau ein Lot. Unter Vorausssetzung des sogenannten affinen Theorems von Pappus läßt sich zeigen, daß es zu vorgegebenen Paaren (a_1, a_2), (b_1, b_2) mit $a_i \nparallel b_j$ genau eine Orthogonalitätsrelation gibt, die diese Paare enthält; diese Relation werde mit $\vdash_{a_1,a_2;b_1,b_2}$ bezeichnet.

Bemerkung. Die Symmetrieeigenschaft $\vdash(a, b) \Rightarrow \vdash(b, a)$ ist auf Grund dieser Forderungen beweisbar. Das Pappussche Theorem ist hinreichende und auch notwendige Bedingung für die Existenz von Orthogonalitätsrelationen in Translationsebenen [2]. Der oben formulierte Orthogonalitätsbegriff ist so allgemein, dass er zugleich die euklidischen und die Orthogonalitätsrelationen im Sinne Minkowskis, aber auch nur diese, umfaßt. Diese Relationen entsprechen den elliptischen bzw. hyperbolischen Involutionen auf der unendlich fernen Gereden.

THEOREM 1. *Eine Minkowskische Orthogonalitätsrelation besitzt genau zwei singuläre Richtungen.*

Beweis. Seien $\varrho, \sigma(\neq \varrho)$ singuläre Richtungen, die durch die in O einander schneidenden Geraden a bzw. b repräsentiert seien (Fig. 1). Jede Richtung τ $(\neq \varrho, \sigma)$ läßt sich durch eine Gerade c repräsentieren, die a in A, b in B schneidet, so daß $A, B \neq O$. Wir ergänzen das Dreieck OAB zu einem Parallelogramm $OAPB$. Dann verläuft nach dem Höhensatz das Lot durch O auf c durch den Punkt P. Auf Grund der Voraussetzung über den Schnitt der Diagonalen eines Parallelogramms ist also τ regulär.

[2] Für Beweise siehe W. Rautenberg, E. Quaisser, *Orthogonalitätsrelationen und das Theorems des Pappus*, erscheint demnächst in Zeitschr. Math. Logik u. Grundl. Math.

Es sei nun ϱ eine singuläre, σ eine reguläre Richtung mit der Lotrichtung σ'. ϱ, σ, σ' seien durch die Geraden a, b, b' repräsentiert (Fig. 2), wobei $a*b = A$, $a*b' = A'$ und $b*b' = O$. Ferner sei B derjenige Punkt, so daß O Mittelpunkt von A und B ist, $\mathrm{Mp}(A, B) = O$. Dann ist nach dem Höhensatz, angewandt auf das Dreieck $AA'B$, offenbar auch $A'B$ selbstorthogonal. Damit ist das Theorem bewiesen.

Eine Orthogonalitätsrelation ist durch Vorgabe dreier voneinander verschiedener kollinearer Punkte O, A, B und eines Punktes $C \notin AB$ in folgenden Sinne eindeutig bestimmt: Wir betrachten die Orthogonalitätsrelation $\vdash_{AB,OC;CA,CB}$. Diese, kurz als $\vdash_{O;A,B;C}$ bezeichnete Relation ist symmetrisch bezüglich A und B.

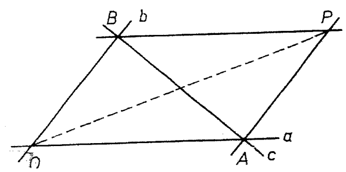

Fig. 1

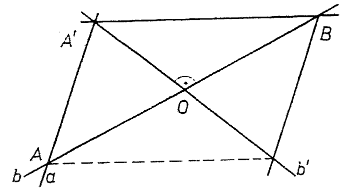

Fig. 2

Ist wieder (O, A, B) ein Tripel voneinander verschiedener kollinearer Punkte, so schreiben wir $\surd(O; A, B)$, wenn es einen Punkt $C \notin OA$ gibt, auf OC einen Punkt D und auf AB einen Punkt E derart, daß $AC\|ED$ und $BD\|EC$ (vgl. Fig. 3). Koordinatenmäßig ist E das geometrische Mittel der Punkte A und B bezüglich O. (In Desarguesschen Ebenen hängt die Existenz einer derartigen Konfiguration nicht von der Wahl des Punktes C ab.) $\surd(O; A, B)$ ist bezüglich A und B symmetrisch.

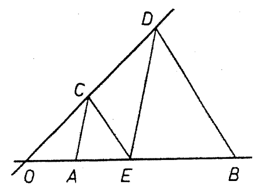

Fig. 3

Das folgende Theorem liefert eine Unterscheidung zwischen Euklidischen und Minkowskischen Orthogonalitätsrelationen mit Hilfe der Relation $\surd$.

Theorem 2. *Die Orthogonalitätsrelation $\vdash_{O;A,B;C}$ ist genau dann eine Minkowskische, wenn $\surd(O;A,B)$ gilt.*

Beweis. Es möge $\surd(O;A,B)$ und $\vdash_{O;A,B;C}$ zutreffen. Dann existieren Punkte D und E derart, daß $AC \| ED$ und $BD \| EC$ (Fig. 4). Der Höhensatz, angewandt auf das Dreieck BCD mit dem Höhenschnittpunkt E liefert dann die Singularität der durch CE bestimmten Richtung.

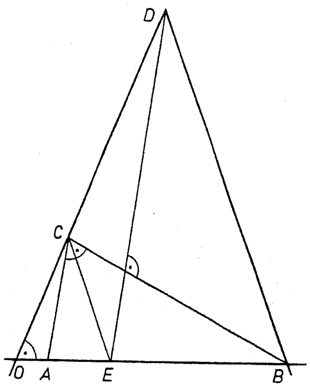

Fig. 4

Zum Beweis der Umkehrung legen wir eine singuläre Gerade durch C, die OA in E schneidet (vgl. wieder Fig. 4). Die Parallele zu AC durch E schneidet OC in D. Wir haben zu zeigen, daß $CE \| DB$. Man betrachte Dreieck BCD. Die Höhen durch B und D treffen sich in E, durch diesen Punkt verläuft daher auch das Lot durch C. Wegen der Singularität der Richtung von CE und $\vdash(CE, DB)$ ist $CE \| DB$, wie zu beweisen war.

Aus diesem Theorem ergeben sich einige Folgerungen

Corollar 1. *Ob die Orthogonalitätsrelation $\vdash_{O;A,B;C}$ singuläre Richtungen besitzt oder nicht, hängt nicht von der Wahl des Punktes C ab.*

Corollar 2. *In einer Translationsebene ist genau dann jede Orthogonalitätsrelation eine Minkowskische, wenn für jedes Tripel (O, A, B) kollinearer und verschiedener Punkte $\surd(O;A,B)$ gilt.*

Demnach ist die Existenz dreier kollinearer Punkte O, A, B, die $\surd(O;A,B)$ nicht erfüllen, notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz Euklidischer Orthogonalitätsrelationen. In der Ebene über dem Körper der komplexen Zahlen z.B. gibt es derartige Relationen nicht.

Auf diesem Wege lassen sich auch in der Ebene über dem Körper der rationalen Zahlen leicht Euklidische Orthogonalitätsrelationen konstruieren, die zwei einander nicht trennende Geradenpaare enthalten, z.B. alle Relationen $\vdash_{O;A,B,C}$ mit $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (2, 0)$ und $C (\notin AB)$ beliebig.

Ist eine Anordnung in einer Translationsebene gegeben, so wollen wir eine euklidische Orthogonalitätsrelation *mit der Anordnung verträglich* nennen, wenn je zwei Paare orthogonaler Geraden von paarweise verschiedenen konzentrischen Geraden einander trennen. Man kann zeigen, daß eine Euklidische Orthogonalitätsrelation schon dann mit der Anordnung verträglich ist, wenn sie wenigstens zwei sich trennende orthogonale Paare von Geraden enthält.

Corollar 3. *Enthält eine Orthogonalitätsrelation einer angeordneten Translationsebene zwei sich trennende Paare (a_1, a_2), (b_1, b_2) aus konzentrischen Geraden, so ist diese Orthogonalitätsrelation euklidisch und mit der Anordnung verträglich.*

Sind nämlich a_1, a_2, b_1, b_2 vier konzentrische Geraden mit dem gemeinsamen Schnittpunkt O, so trennt (a_1, a_2) das Paar (b_1, b_2) genau dann, wenn die Parallelen b_1', b_2' durch einen Punkt $C \in a_2$ $(C \neq 0)$ die Gerade a_1 in Punkten A bzw. B so schneiden, daß O zwischen A und B liegt (Fig. 5). Da in angeordneten Ebenen $\surd(O, A, B)$ nicht gilt, ist $\vdash_{O;A,B;C} = \vdash_{a_1,a_2;b_1,b_2}$ Euklidisch.

Wir wenden uns jetzt einem Begriff der Kommensurabilität und seiner Beziehung zur Eigenschaft $\surd$ zu.

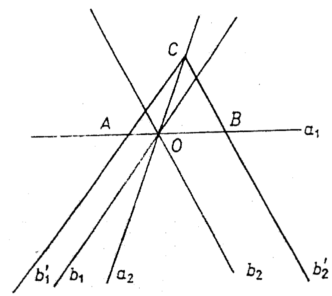

Fig. 5

In einer Translationebene heißt das Geradenpaar $\{a, b\}$ *kommensurabel* in Bezug auf eine Orthogonalitätsrelation, wenn $a \| b$ oder wenn andernfalls dieses Paar eine Mittelgerade besitzt; c heißt eine Mittelgerade für $\{a, b\}$, wenn c durch $a*b$ verläuft und wenn es Punkte $A \in a$, $B \in b$ $(A, B \neq a*b)$ gibt mit $\vdash(AB, c)$ und $\mathrm{Mp}(A, B) = AB*c$.

Wie aus der Definition und dem Satz vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck ([3]) sofort folgt, ist die Kommensurabilität eine Aequivalenzrelation im Bereich der Geraden. Eine Euklidische Orthogonalitätsrelation $\vdash$ heißt kommensurabel, wenn sämtliche Geradenpaare kommensurable in bezug auf $\vdash$ sind. Eine Minkowskische Orthogonalitätsrelation heißt kommensurabel, wenn alle Paare regulärer Richtungen kommensurabel sind.

Bemerkung. Die kommensurablen Euklidischen Orthogonalitätsrelationen sind genau die zu den Kongruenzrelationen im Sinne Hilberts gehörenden Relationen der Orthogonalität. Mit Hilfe des Satzes vom Schnittpunkt der Mittelsenkrechten läßt sich leicht zeigen, daß zwei reguläre Richtungen entweder keine oder genau zwei Mittelrichtungen besitzen. Zwei singuläre Richtungen sind kommensurabel, besitzen aber jede übrige Richtung als Mittelrichtung. Eine singuläre und eine reguläre Richtung sind inkommensurabel, wie ein Blick auf die Fig. 2 zeigt: Ist a selbstorthogonal und b Mittelgeraden für $\{a, c\}$, so gehört c notwendig zur zweiten singulären Richtung.

Mit diesem Erklärungen erhalten wir

Corollar 4. *In einer angeordneten Ebene ist jede Orthogonalitätsrelation, die ein Paar orthogonaler und zugleich kommensurabler (regulärer) Geraden enthält, euklidisch und mit der Anordnung verträglich; insbesondere ist also dort jede kommensurable Orthogonalitätsrelation eine mit der Anordnung verträgliche euklidische.*

Denn ist $\{a, b\}$ kommensurabel und orthogonal, so existiert das Paar $\{c, d\}$ der Mittelgeraden, das — wie man leicht zeigt — stets orthogonal ist und wegen der Anordnung der Ebene das Paar $\{a, b\}$ trennt. Nach Corollar 3 ergibt sich hieraus unmittelbar die Behauptung.

Wir beweisen jetzt den folgenden wichtigen Hilfssaatz

Lemma. *Sind O, A, B drei kollineare Punkte, so gilt $\surd(O; A, B)$ genau dann, wenn es einen Punkt $C \notin AB$ gibt, so daß für die Orthogonalitätsrelation $\vdash_{A;O,B;C}$ das Geradenpaar $\{OA,\ OC\}$ eine Mittelgerade besitzt.*

Beweis. Wenn $\surd(O; A, B)$ zutrifft, so gibt es Punkte C, D, E ($C \notin OA$, $D \in OC$, $E \in OA$), so daß $AC \parallel ED$ und $CE \parallel DB$ (Fig. 6). Es sei $a = OA$, $b = OC$, $C = OF$, $F = CB * DE$, $G = AC * c$. Wir zeigen, daß c Mittelgerade für $\{a, b\}$ in der Orthogonalitätsrelation $\vdash_{A;O,B;C}$ ist. F ist Schnittpunkt zweier Höhen des Dreiecks OBD, daher ist $\vdash(BD, c)$ und damit ist $\vdash(CE, c)$. Da nach dem Desarguesschen Theorem $EG \parallel BF$, ist $GEFC$ ein Parallelogramm, also ist $CE * c = \mathrm{Mp}(C, E)$.

([3]) Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ sind die Höhen des Dreiecks $A'_1A'_2A'_3$ mit $A = \mathrm{Mp}(A_k, A_j)$ $(i \neq k \neq j \neq i)$ und schneiden sich daher in einem Punkt.

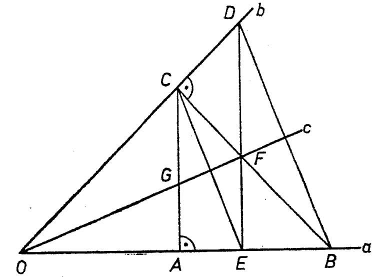

Fig. 6

Sei umgekehrt c Mittelgerade für $\{a, b\}$ in der Orthogonalitätsrelation $\vdash_{A;O,B;C}$. Wir setzen $a = OA$, $b = OC$. Dann existiert ein $E \in a$ mit $\vdash(CE, c)$ und $CE * c = \mathrm{Mp}(C, E)$ (vgl. wieder Fig. 6). Sei $D \in b$ so gewählt, daß $AC \| ED$ und sei $G = AC * c$. G ist Schnittpunkt zweier Höhen des Dreiecks OEC, also $\vdash(EG, b)$ und damit $EG \| CB$. Da nun $CGEF$ ein Parallelogram ist, wobei $F = ED * CB$ und c durch einen Eckpunkt und durch den Diagonalschnittpunkt dieses Parallelograms verläuft, geht c auch durch F. Die Anwendung des Desarguesschen Theorems liefert dann sofort $CE \| DB$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Die folgenden Theoreme ergeben sich als Folgerungen dieses Lemmas.

Theorem 3. *In einer Translationebene gilt $\surd(A; B, C)$ für alle Tripel verschiedener kollinearer Punkte genau dann, wenn alle Orthogonalitätsrelationen kommensurabel sind.*

Beweis. Ist jede Orthogonalitätsrelation kommensurabel und ist (A, B, C) ein Tripel kollinearer verschiedener Punkte, so folgt aus dem Hilfssatz sofort $\surd(A; B, C)$.

Zum Beweis der Umkehrung sei $\vdash$ eine gegebene Orthogonalitätsrelation, $a = OA$, $b = OC$ zwei einander schneidende Geraden regulärer Richtungen, so daß noch $\vdash(OA, AC)$, $B \in a$ sei so gewählt, dass $\vdash(CB, b)$ (vgl. wieder Fig. 6). Wegen $\surd(O; A, B)$ besitzt dann nach dem Lemma das vorgegebene Geradenpaar eine Mittelgerade.

Corollar. *Es gibt dann nur dann eine Euklidische Orthogonalitätsrelation, wenn es eine inkommensurable Orthogonalitätsrelation gibt.*

Theorem 4. *Wenn für je drei kollineare und verschiedene Punkte höchstens eines der Attribute $\surd(A; B, C)$, $\surd(B; A, C)$ und $\surd(C; A, B)$ nicht gilt, so ist jede Euklidische Orthogonalitätsrelation kommensurabel und umgekehrt.*

Beweis. Sei $\vdash$ eine Euklidische Orthogonalitätsrelation und a und b zwei in O einander schneidende Geraden. Wir zeigen, daß $\{a, b\}$ eine

Mittelgerade besitzt. Sei $A \in a$ $(A \neq O)$. Das Lot zu a durch A schneide b in C (Fig. 6), das Lot zu b durch schneide a in B. Dann ist $\vdash = \vdash_{A;O,B;C}$. Da $\vdash$ Euklidisch ist, gilt nach Theorem 2 nicht $\surd(A;\, O, B)$, also gilt gemäß Voraussetzung $\surd(O;\, A, B)$. Nach dem Lemma besitzt damit $\{a, b\}$ eine Mittelgerade.

Sind umgekehrt O, A, B kollineare Punkte und gilt $\surd(A;\, O, B)$ nicht, so ist für beliebiges C $\vdash_{A;O,B;C}$ Euklidisch. Da diese Relation nach Voraussetzung kommensurabel ist, gilt auf Grund des Lemmas offenbar $\surd(O;\, A, B)$. Aus Symmetriegründen gilt auch $\surd(B;\, O, A)$, womit Theorem 4 bewiesen ist.

Reçu par la Rédaction 3. 10. 1967

Periodic homeomorphisms on chainable continua

by

Beverly L. Brechner (New Orleans, La.)

1. Preliminaries.

Introduction. In this paper we begin a study of the periodic homeomorphisms on chainable continua. It is well known that an arc admits period two homeomorphisms, but does not admit homeomorphisms of finite order n, $n > 2$. We will show that this result does not generalize to chainable continua. We first define *regularly chainable continua* and show that every regularly chainable continuum admits a period two homeomorphism. The arc and pseudo-arc are examples of such continua. We then use these results to construct a chainable continuum which admits period four homeomorphisms.

We note that in [5] F. B. Jones shows, by a proof similar to the one in this paper, that the pseudo-arc admits period two homeomorphisms.

Convention. *All spaces are separable metric.*

Basic definitions. Most of the following definitions are well-known, but are included for completeness.

Definition 1.1. A homeomorphism $h \neq e$ of a continuum X onto itself is called *periodic* provided that there exists an integer $n > 1$ such that h^n is the identity. If $h^n = e$, but $h^k \neq e$ for $0 < k < n$, then h is said to be of *period* n or *order* n.

Definition 1.2. A *chain* is a finite collection of open sets $\mathfrak{U}$: $U_1, U_2, \ldots, U_n$ such that

(1) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ iff $|i-j| \leqslant 1$,

(2) $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j \neq \emptyset$ iff $|i-j| \leqslant 1$ and

(3) $U_i \not\subset U_j$ for any pair i, j.

$\mathfrak{U}^*$ denotes the union of the elements of $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{U}$ is a *chain from p to q* iff $\mathfrak{U}$ is a chain, $p \in U_1 - U_2$, and $q \in U_n - U_{n-1}$. If $\mathfrak{U}$: $U_1, U_2, \ldots, U_n$ is a chain, then $h(\mathfrak{U})$ denotes the chain whose elements are $h(U_1), h(U_2), \ldots, h(U_n)$.

Definition 1.3. A chain $\mathfrak{V}$ is a *refinement* of the chain $\mathfrak{U}$ provided that each element of $\mathfrak{V}$ is a subset of some element of $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{V}$ is called a *closed refinement* of $\mathfrak{U}$ iff the closure of each element of $\mathfrak{V}$ is a subset of some element of $\mathfrak{U}$.