i.e., when $\mathfrak{Y}$ is the convex hull (in a normed linear space) of its closed subset $\mathfrak{X}$. (Take for $\mathfrak{X}$ a "bent" line segment so that $\mathfrak{Y}$ is then a 2-simplex, and let two disjoint closed discs in $\mathfrak{Y}\setminus\mathfrak{X}$ play the role of the intervals $[1:2]$ and $[3:4]$ in the above example.)

The existence of the barycentric function can be established in the following way. We can assume that $\mathfrak{X}$ is a relatively closed subset of a convex set $\mathfrak{Y}$ in some normed linear space. Let $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a dense subset of $\mathfrak{X}$. Define $g(\Delta_m) = x_m$ for each integer m and extend linearly (as in Section 5) on each simplex Δ_n to get $g\colon \mathfrak{L}\to\mathfrak{Y}$. (Note that g is not necessarily a barycentric function for $\mathfrak{Y}$.) If $r\colon \mathfrak{Y}\to\mathfrak{X}$ is a retraction of $\mathfrak{Y}$ onto $\mathfrak{X}$, then rg is a barycentric function for $\mathfrak{X}$. Only condition 3.3 is in doubt, so assume that $\{S_{k_n}\}$ is a subsequence of $\{S_n\}$ such that $\lim\limits_{n\to\infty} rg(S_{k_n}) = x \in \mathfrak{X}$. Then, since $g(S_{k_n}) \subset \mathfrak{X}$, we have $rg(S_{k_n}) = g(S_{k_n})$ for each integer n. Then $\lim\limits_{n\to\infty} g(S_{k_n}) = x$ and g is linear on each Δ_{k_n}, so we have $\lim\limits_{n\to\infty} g(\Delta_{k_n}) = x$. Then it follows from the continuity of r that $\lim\limits_{n\to\infty} rg(\Delta_{k_n}) = x$.

Reference

[1] M. Wojdysławski, *Rétractes absolus et hyperspaces des continus*, Fund. Math. 32 (1939), pp. 184-192.

WESTERN WASHINGTON STATE COLLEGE
Bellingham

Reçu par la Rédaction le 25. 8. 1967

Zu einem Satz von E. S. Wolk über die Vergleichbarkeitsgraphen von ordnungstheoretischen Bäumen

by

H. A. Jung (Köln)

$G = (E, K)$ sei Graph mit der Eckenmenge E und der Kantenmenge K (die $k \in K$ sind zweielementige Teilmengen von E). Eine antisymmetrische Relation $R \subseteq E\times E$ heißt *Richtung* von G, wenn

$$(1)\qquad \{e, e'\} \in K \Longleftrightarrow eRe' \quad \text{oder} \quad e'Re \qquad (e, e' \in E).$$

Eine teilweise geordnete Menge $(E, <)$ heißt *ordnungstheoretischer Baum*, wenn

$$(2)\qquad e' < e,\ e'' < e \Rightarrow e' \leqslant e'' \quad \text{oder} \quad e'' \leqslant e' \qquad (e, e', e'' \in E).$$

Die Richtung $<$ von $G = (E, K)$ heißt *Baumrichtung*, wenn $<$ einen ordnungstheoretischen Baum auf E definiert.

E. S. Wolk charakterisierte in [5] die Graphen, dei eine Baumrichtung zulassen. Wir führen in dieser Note eine Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge eines (jeden) Graphen ein, die einen einfachen Beweis dieser Charakterisierung ermöglicht und zugleich eine völlige Übersicht über sämtliche Baumrichtung eines gegebenen Graphen liefert.

Def. 1. $G = (E, K)$ sei Graph und $k = \{e, e'\} \in K$.

a) e heißt *V-Scheitel von k*, wenn ein $e'' \in E$ existiert mit $e'' \neq e'$, $\{e, e''\} \in K$ und $\{e', e''\} \notin K$.

b) k heißt *ν-Kante*, wenn genau ν der Ecken e, e' V-Scheitel von k sind ($\nu = 0, 1, 2$).

Def. 2. $G = (E, K)$ sei Graph. Für $e, e' \in E$ setzen wir $e \sim e'$, wenn $e = e'$ oder wenn $\{e, e'\}$ eine 0-Kante von G ist.

Bemerkung 1. *$\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf E.*

Beweis. Es ist nur die Transitivität zu zeigen. Sei $e_1 \sim e_2$ und $e_2 \sim e_3$; o.B.d.A. seien e_1, e_2, e_3 verschieden. Somit gilt $\{e_1, e_2\} \in K$ und $\{e_2, e_3\} \in K$. Da e_2 nicht V-Scheitel von $\{e_1, e_2\}$ ist, ergibt sich $\{e_1, e_3\} \in K$. Ist etwa e_1 V-Scheitel von $\{e_1, e_3\}$, so gibt es ein $e_4 \neq e_3$ mit $\{e_1, e_4\} \in K$ und $\{e_3, e_4\} \notin K$. Im Fall $\{e_2, e_4\} \notin K$ wäre e_1 V-Scheitel von $\{e_1, e_2\}$, im Fall $\{e_2, e_4\} \in K$

wäre e_2 V-Scheitel von $\{e_2, e_3\}$. Folglich ist $\{e_1, e_3\}$ 0-Kante von G und damit $e_1 \sim e_3$.

BEMERKUNG 2. *$G = (E, K)$ sei Graph und $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ die Zerlegung von E in Äquivalenzklassen nach $\sim$. Weiter sei $<$ Baumrichtung von G. Dann gilt:*

(i) *$< | E_i$ definiert eine Totalordnung auf E_i $(i \in I)$,*

(ii) *ist e ein V-Scheitel von $\{e, e'\} \notin K$, so $e < e'$.*

Beweis. (i) ist nach (1) und Def. 2 klar.

ad (ii): Sei $e'' \neq e'$ mit $\{e, e''\} \notin K$ und $\{e', e''\} \notin K$. Sei weiter entgegen (ii) $e' < e$. Im Fall $e < e''$ würde $e' < e''$ folgen, da $<$ transitiv ist, und dann nach (1) $\{e', e''\} \in K$. Im Fall $e'' < e$ ergäbe sich aus (2) $e'' \leqslant e'$ oder $e' \leqslant e''$, also nach (1) wiederum $\{e', e''\} \in K$.

Aus (ii) ergibt sich insbesondere, daß ein Graph, der eine Baumrichtung zuläßt, keine 2-Kanten enthält. Unser Ergebnis besteht darin, daß sich Bemerkung 2 umkehren läßt.

SATZ. *$G = (E, K)$ sei Graph ohne 2-Kanten und $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ die Zerlegung von E in Äquivalenzklassen nach $\sim$. Weiter sei $<$ Richtung von G. Dann und nur dann ist $<$ Baumrichtung von G, wenn* (i) *und* (ii) *erfüllt sind.*

Beweis. Es bleibt zu zeigen, daß $<$ transitiv und (2) erfüllt ist, falls (i) und (ii) gelten. Sei $e_1 < e_2$ und $e_2 < e_3$ (also nach (1) auch $\{e_1, e_2\}$, $\{e_2, e_3\} \in K$). Nach (ii) ist e_2 nicht V-Scheitel von $\{e_1, e_2\}$, also $\{e_1, e_3\} \in K$. Wir führen $e_3 < e_1$ zum Widerspruch. Wegen (i) ist mindestens eine der Kanten $\{e_1, e_2\}$, $\{e_2, e_3\}$, $\{e_1, e_3\}$, o.B.d.A. etwa $\{e_1, e_3\}$, keine 0-Kante. Nach (ii) ist dann e_3 ein V-Scheitel von $\{e_1, e_3\}$. Für ein $e_4 \neq e_1$ gilt somit $\{e_1, e_4\} \notin K$ und $\{e_3, e_4\} \in K$. Im Fall $\{e_2, e_4\} \notin K$ wäre e_3 V-Scheitel von $\{e_2, e_3\}$, also nach (ii) $e_3 < e_2$. Im Fall $\{e_2, e_4\} \in K$ wäre e_2 V-Scheitel von $\{e_1, e_2\}$, also nach (ii) $e_2 < e_1$.

ad (2): Sei $e' < e$, $e'' < e$ und $e' \neq e''$. Wegen (1) gilt $\{e, e'\}$, $\{e, e''\} \in K$. Würde weder $e' \leqslant e''$ noch $e'' \leqslant e'$ gelten so wäre nach (1) $\{e', e''\} \notin K$, also e V-Scheitel von $\{e, e'\}$, und dann nach (ii) $e < e'$.

Durch obigen Satz sind alle Baumrichtungen eines Graphen ohne 2-Kanten bestimmt: Zuerst richte man alle 1-Kanten gemäß (ii); dann gebe man auf jeder Äquivalenzklasse eine Totalordnung vor; durch diese Totalordnung werden alle 0-Kanten gerichtet.

Speziell erhalten wir das Kriterium von E. S. Wolk: G läßt genau dann eine Baumrichtung zu, wenn G keine 2-Kanten enthält.

Weiter folgt: *Ein Graph $G = (E, K)$ ohne 2-Kanten läßt genau $\prod_{i \in I} |E_i|!$ verschiedene Baumrichtungen zu.*

Schließlich sei bemerkt, daß zwischen zwei verschiedenen Äquivalenzklassen entweder alle möglichen oder keine Kanten verlaufen.

Literaturverzeichnis

[1] L. R. Alvares, *Undirected graphs realizable as graphs of modular lattices*, Canad. Journ. Math. 17 (1965), S. 923-932.

[2] T. Gallai, *Transitiv orientierbare Graphen*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18 (1967), S. 25-66.

[3] A. Ghouila-Houri, *Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris 254 (1962), S. 1370-1371.

[4] P. C. Gilmore and A. J. Hoffmann, *A characterization of comparability graphs and of interval graphs*, Canad. Journ. Math. 16 (1964), S. 539-548.

[5] E. S. Wolk, *The comparability graph of a tree*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), S. 789-795.

[6] — *A note on "The comparability graph of a tree"*, ibid. 16 (1965), S. 17-20.

Reçu par la Rédaction le 21. 9. 1967