of M_1 which is not in $M_2 \cup M_3$. Then P is not in H so there is a region R containing P such that $\bar{R}$ does not intersect H. Let N be the component of $M_1 - R$ containing H. Then $N \cup M_2 \cup M_3$ is a triod which is a proper subcontinuum of M.

THEOREM 4. *If M is a compact continuum such that every proper subcontinuum of M is chainable and M is neither chainable nor circle-like, then M is indecomposable.*

In a recent conversation with the author Professor H. Cook raised the question: If M is a compact continuum such that every proper subcontinuum of M is chainable, is M chainable or circle-like? From Theorem 4 it follows that the answer is "yes" if M is decomposable. However, in [5] Cook presents an example showing that, in general, the answer is "no".

Using a theorem of Bing ([1], Theorem 11, p. 660) and the results of this paper we have the following theorem.

THEOREM 5. *Suppose that M is a compact, hereditarily decomposable, non-chainable continuum. Then M is circle-like if and only if M is atriodic and M is not unicoherent but every proper subcontinuum of M is unicoherent.*

References

[1] R. H. Bing, *Snake-like continua*, Duke Math. J. 18 (1951), pp. 653-663.

[2] — *Embedding circle-like continua in the plane*, Canad. J. Math. 14 (1962), pp. 113-128.

[3] C. E. Burgess, *Chainable continua and indecomposability*, Pacific J. Math. 9 (1959), pp. 653-659.

[4] H. Cook, *On the most general plane closed point set through which it is possible to pass a pseudo-arc*, Fund. Math. 55 (1964), pp. 11-22.

[5] — *Concerning three questions of Burgess about homogeneous continua*, submitted to Colloquium Mathematicum.

[6] J. B. Fugate, *Decomposable chainable continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966), pp. 460-468.

[7] R. H. Sorgenfrey, *Concerning triodic continua*, Amer. J. Math. 66 (1944), pp. 439-460.

UNIVERSITY OF HOUSTON
Houston, Texas

Reçu par la Rédaction le 17. 5. 1967

Уплотнения на бикомпакты и связь с бикомпактными расширениями и с ретракцией *

Ю. М. Смирнов (Москва)

Уплотнениями называют взаимно-однозначные непрерывные (schlichte) отображения „на". Эти отображения являют собой достаточно „хороший" класс отображений, удобный для многих целей, как в топологии так и в анализе.

Повидимому впервые П. С. Александровым был поставлен вопрос *о нахождении необходимых и достаточных условий для того, чтобы топологическое пространство* (1) (хотя бы со счётной базой) *могло быть уплотнено на компакт* (бикомпакт). Он же задал следующий более конкретный вопрос: *можно ли уплотнить на компакт связное, локально-связное, полное метрическое пространство со счётной базой, являющееся суммой счётного числа компактов*? В связи с этим А. С. Пархоменко спросил меня: *можно ли в условии этого вопроса дополнительно потребовать, чтобы пространство было одномерным*?

Здесь мы даем ответы на все эти вопросы при тех или иных, как нам кажется, достаточно широких предположениях.

Предварительно заметим, что до сих пор искались лишь *внутренние* необходимые и достаточные условия. Мне кажется, что ныне сильно развитая теория бикомпактных расширений должна здесь играть важную роль. Именно с помощью этой теории я даю здесь *внешние* необходимые и достаточные условия для любых вполне регулярных пространств (теорема 1). На следующий „конкретный" вопрос П. С. Александрова ответ отрицателен: *я строю пример множества A, лежащего в трёхмерном пространстве, которое обладает всеми требуемыми свойствами, но, тем не менее, A не уплотняется ни на один бикомпакт* (пример 1). Решение этой задачи тесно связано с вопросами ретракции: *я доказываю, что множество A нельзя ретрагировать на некоторое подмножество A_N* (2) (оно является окружностью), *но в то же*

* Доклад об этих результатах был прочитан 17 мая 1967 г. в Математическом Институте ПАН.

(1) Под пространством мы всюду понимаем здесь вполне регулярное T_1-пространство.

(2) Через X_N мы обозначаем множество всех тех точек пространства X, в которых X не локально бикомпактно, а через X_B — дополнительное множество $X \setminus X_N$ (где X локально-бикомпактно).

время всякое его бикомпактное уплотнение fA можно ретрагировать на fA_N (это также окружность). Связь с вопросами ретракции здесь довольно существенна, как показывает следующий „почти отрицательный“ ответ на вопрос А. С. Пархоменко: *если пространство X одномерно или нульмерно, а множество X_N является связным абсолютным окрестностным ретрактом (в частности, конечным полиэдром), то X уплотняется на некоторый бикомпакт* (теорема 2′).

Статья эта написана во время моего пребывания в Математическом Институте ПАН, которому я очень благодарен за предоставление мне самых благоприятных условий для работы. Сердечно благодарю профессора К. Борсука, замечания которого натолкнули меня к n-мерному обобщению теоремы 2′. Сердечно благодарю Б. Т. Левшенко, за интересные и очень полезные советы. Особенно мне хочется поблагодарить доц. А. С. Пархоменко, без которого эта статья не была бы написана: из увлекательных и интересных бесед с ним родились фактически почти все изложенные здесь результаты. Я хочу наконец поблагодарить В. Голштинского, взявшего на себя труд прочитать всю рукопись и указавшего на целый ряд досадных неточностей.

§ 1. Необходимые и достаточные условия.

Определение 1. Назовём отображение $f\colon X\to Y$ *сильно-замкнутым*, если для каждой точки $y\in fX$ и каждой окрестности (3) U её полного прообраза $f^{-1}y$ существует такая окрестность Oy точки y, что $f^{-1}Oy\subseteq U$, *где множество $f^{-1}Oy$ — открыто.*

Замечание 1. Всякое непрерывное замкнутое отображение сильно-замкнуто, всякое взаимно-однозначное замкнутое отображение также сильно-замкнуто (другими словами, обратное отображение к уплотнению сильно-замкнуто).

Теорема 1. *Для того, чтобы пространство X было уплотняемым на некоторый бикомпакт необходимо и достаточно каждое из следующих двух условий:*

(b) *существует сильно-замкнутое отображение $f_\beta\colon \beta X\to X$* (4) *тождественное на X,*

(c) *существует бикомпактное расширение cX и сильно-замкнутое отображение $f_c\colon cX\to X$ тождественное на X.*

Замечание 2. *Можно потребовать, чтобы вес расширения cX был равен весу пространства X, а размерность* (5) *расширения cX не превышала размерности пространства X.*

(3) Окрестности мы берем всегда открытыми.

(4) Через βX мы обозначаем максимальное (чеховское) бикомпактное расширение пространства X.

(5) Под размерностью мы понимаем здесь только размерность dim, определенную с помощью открытых конечных покрытий (нормальных в смысле Дж. Такки [5] для не нормальных пространств).

Сначала приведем две необходимые здесь несложные леммы:

Лемма 1. *При каждом сильно-замкнутом отображении $f\colon Y\to X$ для всякого замкнутого множества Φ множество $f^{-1}f\Phi$ также замкнуто* (6).

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы, пусть Φ замкнуто в Y, а $y\notin f^{-1}f\Phi$. Тогда $f^{-1}f\Phi\cap f^{-1}fy=\emptyset$ (7) и, значит, $\Phi\cap f^{-1}fy=\emptyset$. Для точки $x=fy$ существует окрестность Ox такая, что полный прообраз $f^{-1}Ox$ открыт и $f^{-1}Ox\cap\Phi=\emptyset$. Ясно, что $f^{-1}Ox\cap f^{-1}f\Phi=\emptyset$ и что $y\in f^{-1}Ox$. Итак, для каждой точки y, не принадлежащей $f^{-1}f\Phi$, существует окрестность $Oy=f^{-1}Ox$, не пересекающаяся с $f^{-1}f\Phi$. Следовательно, множество $f^{-1}f\Phi$ замкнуто. Лемма доказана.

Лемма 2. *Композиция $g\circ f$ сильно-замкнутого отображения g с непрерывным замкнутым отображением f сильно-замкнута.*

Доказательство. В самом деле, пусть $h^{-1}z\in U$, где $h=g\circ f$, а U — открыто. Пусть $y\in g^{-1}z$. Тогда $f^{-1}y\subseteq U$. В силу сильной замкнутости существует такая окрестность Oy, что $f^{-1}Oy\subseteq U$. Пусть $O_z=\bigcup\limits_{gy=z}Oy$. Множество O_z открыто и $f^{-1}O_z\subseteq U$. Снова в силу сильной замкнутости существует такая окрестность O_z, что $g^{-1}Oz\subseteq Oz$. Из непрерывности отображения f вытекает, что множество $f^{-1}g^{-1}Oz$ открыто. Ясно, что $h^{-1}Oz=f^{-1}g^{-1}Oz$ и что $h^{-1}Oz\subseteq f^{-1}O_z\subseteq U$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Обозначим через (a) свойство пространства X быть уплотняемым на некоторый бикомпакт. Докажем теорему по следующей схеме: (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (b) (8).

(b) $\Rightarrow$ (c). Очевидно.

(c) $\Rightarrow$ (a). Пусть для бикомпактного расширения cX отображение $f_c\colon cX\to X$ сильно-замкнуто и тождественно на X. Рассмотрим разбиени, $\Pi=\{f^{-1}x\}$ бикомпакта cX на полные прообразы всех точек x из X. Ясное что $f_c(cX)=X$ и поэтому элементы разбиения Π не пусты и покрывают весь бикомпакт cX. Все они замкнуты. В самом деле, так как каждая точка y из cX замкнута в cX (мы рассматриваем лишь T_1-пространства) и $f_c(cX)=X$, то $f^{-1}x=f^{-1}fy$ для некоторой точки y из $f^{-1}x$. Следовательно, по лемме 1, прообраз $f^{-1}x$ каждой точки x замкнут.

Докажем теперь, что разбиение Π бикомпакта cX удовлетворяет известному условию ПСА (9). Пусть U — открыто в cX и $f_c^{-1}x\subseteq U$. В силу

(6) Столь же просто доказать, что для замкнутого отображения условие леммы 1 достаточно для того, чтобы оно было сильно-замкнутым. Точнее говоря, *отображение $f\colon Y\to X$ сильно-замкнуто тогда и только тогда, когда оно замкнуто и кроме того удовлетворяет условию леммы* 1. Легко видеть, что *в случае непрерывности отображения f условия замкнутости и сильной замкнутости эквивалентны.*

(7) Через $\emptyset$ мы обозначаем пустое множество.

(8) „Стрелка“ $\Rightarrow$ — знак логического следования.

(9) См. [1], стр. 67, том 1. Для каждой окрестности U каждого элемента A разбиения Π должна существовать такая окрестность O элемента A, что из $A'\cap O\neq\emptyset$ всегда следует включение $A'\subseteq U$ (для любого A' из Π).

сильной замкнутости отображения f_c существует такая окрестность Ox точки x, что множество $H = f_c^{-1}Ox$ открыто и $f_c^{-1}Ox \subseteq U$. Ясно, что $f_c^{-1}x \subseteq H$. Нетрудно видеть, что если $f_c^{-1}x' \cap H \neq \emptyset$, то $f_c^{-1}x' \subseteq H \subseteq U$. Итак, условие ПСА выполнено и по известной теореме П. С. Александрова ([10]) оно определяет непрерывное отображение $g\colon cX \to Z$ бикомпакта cX на некоторый бикомпакт Z. Имеем: $X \xleftarrow{f_c} cX \xrightarrow{g} Z$. Композиция $g \circ f_c^{-1}$ является взаимно-однозначным отображением пространства X на бикомпакт Z. Оно непрерывно, так как для любого открытого множества U (в cX) выполняются равенства:

$$f_c\left(g^{-1}\left(O(U)\right)\right) = f_c\left(\bigcup f_c^{-1}x \mid f_c^{-1}x \subseteq U\right) = \{x \mid f_c^{-1}x \subseteq U\}\,.$$

Из сильной замкнутости отображения f_c сразу следует, что множество $\{x \mid f_c^{-1}x \subseteq U\}$ открыто в X для любого открытого в cX множества U. Значит, отображение $g \circ f_c^{-1}$ непрерывно, а пространство X с помощью этого отображения уплотняется на бикомпакт Z.

(a) $\Rightarrow$ (b). Пусть отображение $g\colon X \to Z$ является уплотнением а пространство Z — бикомпактом. По известной теореме Э. Чеха это отображение можно продолжить в непрерывное отображение $g_\beta\colon \beta X \to Z$. Имеем:

$$\begin{tikzcd} \beta X \arrow[r, "g_\beta"'] & Z & X \arrow[l, "g"'] \arrow[ll, bend right, "i"'] \end{tikzcd}$$

В силу леммы 2 отображение $g^{-1} \circ g_\beta$ сильно-замкнуто. Теорема доказана.

Доказательство замечания 2. По одной теореме А. В. Архангельского [2] вес бикомпакта Z при уплотнении $g\colon X \to Z$ не больше веса исходного пространства X. Известно (см. например [3], стр. 542), что в этом случае отображение g можно продолжить в непрерывное отображение $g_c\colon cX \to Z$ некоторого бикомпактного расширения cX пространства X, вес которого не больше веса бикомпакта Z, а размерность — не больше размерности пространства X. Отсюда сразу следует, что вес расширения cX равен весу пространства X ([11]). Дальше поступаем точно так, как в доказательстве теоремы: отображение $g^{-1} \circ g_c$ будет искомым.

Замечание 3. *Композиция сильно-замкнутых отображений не обязана быть сильно-замкнутым отображением, даже в том случае, когда второе из них непрерывно.* Чтобы это увидеть, за f примем произвольное уплотнение отрезка $[0;1]$ на дискретное пространство D, а за $g\colon D \to \{0, 1\}$ — отображение в границу отрезка $[0;1]$, причем такое, что $g\left(f[0;\frac{1}{2})\right] = 0$, а $g(f[\frac{1}{2};1]) = 1$. Легко видеть, что $g \circ f$ замкнуто, но не сильно-замкнуто.

([10]) См. [1], стр. 96, том 1. Элементами пространства Z (разбиения Π) являются элементы A разбиения Π, а базу открытых множеств составляют множества $O(U) = \{A \mid A \subseteq U, A \in \Pi\}$, где U — произвольно взятое открытое в cX множество.

([11]) Здесь можно воспользоваться и известной теоремой № 2 С. Мардежича [4], если предварительно продолжить отображение g в отображение $g_\beta\colon \beta X \to Z$.

Замечание 4. *Свойство сильной замкнутости отображений f_β и f_c в теореме 1 существенно: его нельзя заменить на свойство замкнутости.*

Действительно, пусть $aB = [0;1] \times \{1/n, 0\}$, где $[0;1]$ — отрезок, а множество $\{1/n, 0\}$ состоит из чисел $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ и нуля. Пусть

$$B = [0;1] \times \{1/n\} \cup (0, 0) \cup (1, 0)\,.$$

Известно, что множество B не уплотняется ни на один бикомпакт ([12]), несмотря на то, что оно полно в некоторой метрике (т. к. является абсолютной Γ-дельтой) и является суммой счётного числа континуумов. Отсюда видим, в силу теоремы 1, что тождественное отображение $i\colon B \to B$ нельзя продолжить в сильно-замкнутое отображение $f_c\colon cB \to \dot{B}$ ни на одно бикомпактное расширение cB пространства B, в частности, на aB. В то же время отображение i можно продолжить в замкнутое отображение $g_a\colon aB \to B$. Для этого: надо только положить, что

$$g_a(\alpha, 0) = \begin{cases} (0, 0)\,, & \text{если} \quad \alpha \leqslant \frac{1}{2}\,, \\ (1, 0)\,, & \text{если} \quad \alpha > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

§ 2. Ответ на второй вопрос П. С. Александрова. Здесь мы построим в трехмерном эвклидовом пространстве E^3 связное, локально-связное множество A типа Γ-дельта (следовательно, линейно-связное и локально-линейно-связное), которое является суммой счетного числа континуумов (даже абсолютных окрестностных ретрактов), но не уплотняющееся ни на один бикомпакт.

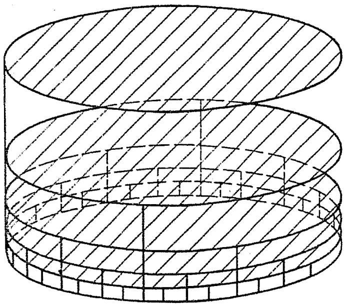
Пример 1. Пусть в трехмерном пространстве E^3 дана цилиндрическая система координат r, φ, z. Пусть

$$A = \{e \mid r = 1,\ z = 0\} \cup \bigcup_n \left\{e \mid r \leqslant 1,\ z = \frac{1}{2n-1}\right\} \cup$$
$$\cup \bigcup_n \bigcup_{k \leqslant 2^n} \left\{e \mid r = 1,\ \varphi = 2\pi\frac{k}{2^n},\ 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2n-1}\right\},$$

где n и k — натуральные числа, причем при каждом n число k пробегает лишь такие значения, что дробь $k/2^n$ несократима (см. чертеж).

Идея доказательства наличия желаемых свойств пространства A аналогична доказательству для пространства B, приведенного в последней сноске: *я доказываю, что пространство A нельзя ретрагировать на окруж-*

([12]) Например, это делается так. Легко доказать, что B нельзя ретрагировать на $S^0 = \{(0,0), (1,0)\}$. Если бы существовало уплотнение $g\colon B \to Z$ на бикомпакт Z, то этот бикомпакт Z являлся бы суммой счётного числа непустых попарно не пересекающихся континуумов, среди которых были бы две точки $g(0, 0)$ и $g(1, 0)$. Из известной теоремы В. Серпинского [6] легко вытекает, что компакт Z можно ретрагировать на нульмерную сферу $gS^0 = \{g(0, 0), g(1, 0)\}$. Но тогда и B можно ретрагировать на сферу S^0, вопреки ранее доказанному.



ность $S^1 = \{e|\ r=1, z=0\}$, *а любое его бикомпактное уплотнение* gA, *— если оно существует! — можно ретрагировать на окружность* gS^1, что легко привести к противоречию.

Лемма 3. *Пространство* A *нельзя ретрагировать на окружность* S^1.

Для этого нам потребуется эквивалентная

Лемма 3′. *Пространство* A *нельзя разбить перегородками* C_i, $i=1,2$, *между соответствующими дугами* A_i, B_i *окружности* S^1 *с пустым пересечением* $C_1 \cap C_2$, *где дуги* A_1, A_2, B_1, B_2 *описываются соответствующими неравенствами*

$$\frac{k\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{(k+1)\pi}{2}, \qquad k=0,1,2,3.$$

В самом деле, докажем следование

$3' \Rightarrow 3$. Пусть утверждение леммы 3 не выполнено, т. е. существует ретракция $r\colon A \to S^1$. Нетрудно видеть, что у дуг A_i и B_i, $i=1,2$, существуют такие их окрестности OA_i и OB_i, что $OA_i \cap OB_i = \emptyset$ для обоих i [13]. Тогда множества $r^{-1}(OA_i)$, $r^{-1}(OB_i)$, $i=1,2$, составляют открытое покрытие пространства A и $r^{-1}(OA_i) \cap r^{-1}(OB_i) = \emptyset$ для обоих i. Отсюда следует, что множества $C_i = A \setminus \big(r^{-1}(OA_i) \cup r^{-1}(OB_i)\big)$ разделяют пространство A между соответствующими дугами A_i и B_i (т. е. являются перегородками для соответствующих пар дуг) и $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Значит, утверждение леммы 3′ не выполнено [14].

Доказательство леммы 3′. Допустим, что лемма 3′ не верна. Это значит, что существуют такие открытые в A окрестности OA_i и OB_i, $i=1,2$, что $OA_i \cap OB_i = \emptyset$ для обоих i и перегородки $C_i = A \setminus (OA_i \cup OB_i)$ не пересекаются. Значит, множества OA_i, OB_i, $i=1,2$, составляют открытое покрытие множества A. Так как дуги A_i, B_i компактны, то для некоторого положительного числа ε, ε-окрестности $O_\varepsilon A_i$, $O_\varepsilon B_i$ этих дуг целиком лежат в соответствующих окрестностях OA_i, OB_i. Ясно, что найдется и такое число n, что дуги A_1', A_2', B_1' и B_2' граничной окружности круга $Q_n = \{e|\ r \leqslant 1, z = 1/(2n-1)\}$, описываемые соответствующими неравенствами $k\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant (k+1)\pi/2$, $k=0,1,2,3$, целиком лежат в соответствующих окрестностях $O_\varepsilon A_i$, $O_\varepsilon B_i$, а, значит, и в окрестностях OA_i, OB_i. Отсюда легко видеть, что перегородки $C_i' = Q_n \cap C_i$ разбивают круг Q_n между соответствующими дугами A_i', B_i' его граничной окружности и что пересечение $C_1' \cap C_2' = \emptyset$ пусто, а этого, как известно [15], не может быть. Лемма 3′, а с нею и лемма 3 доказаны.

Лемма 4. *Если пространство* A *уплотняется на бикомпакт* gA, *то бикомпакт* gA *можно ретрагировать на окружность* gS^1 [16].

Эта лемма эквивалентна следующей лемме:

Лемма 4′. *Если пространство* A *уплотняется на бикомпакт* gA *то бикомпакт* gA *можно разбить перегородками* C_i *между дугами* gA_i *и* gB_i, $i=1,2$, *окружности* gS^1 *так, что* $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Ради краткости следование $4' \Rightarrow 4$ мы предоставим читателю, так как искомое противоречие можно получить уже из лемм 3′ и 4′.

Доказательство леммы 4′. На каждом отрезке $I_{k,n} = \{e|\ r=1, \varphi = k\pi/2^n, 0 \leqslant z \leqslant 1/(2n-1)\}$ отображение g является гомеоморфизмом. Рассмотрим множество $\mathfrak{J}_{k,n}$ всех таких точек отрезка $I_{k,n}$, у которых координата z иррациональна. Так как каждое множество $gI_{k,n}$ замкнуто в объединении gI всех отрезков $gI_{k,n}$, то каждое множество $g\mathfrak{J}_{k,n}$ замкнуто в объединении $g\mathfrak{J}$ всех множеств $g\mathfrak{J}_{k,n}$. Так как $\dim(g\mathfrak{J}_{k,n}) = 0$, то по теореме суммы [17] и $\dim(g\mathfrak{J}) = 0$.

Множество gA нормально, поэтому существуют в нём окрестности $U(gA_1)$ и $U(gB_1)$ дуг gA_1 и gB_1 с непересекающимися замыканиями. Пусть

$$A_g = g\mathfrak{J} \cap \overline{U(gA_1)} \quad \text{и} \quad B_g = g\mathfrak{J} \cap \overline{U(gB_1)}.$$

Эти множества замкнуты в $g\mathfrak{J}$ и не пересекаются. Поэтому, а также в силу нульмерности множества $g\mathfrak{J}$, существуют такие открытые в $g\mathfrak{J}$ не пересекающиеся окрестности OA_g и OB_g множеств A_g и, соотв., B_g, что $g\mathfrak{J} = OA_g \cap OB_g$. Из наследственной нормальности множества gA следует, что существуют такие открытые в gA не пересекающиеся окрестности UA_g

[13] Так как дуги A_i, B_i — бикомпактны, а пространство A — вполне-регулярно!

[14] На самом деле утверждения лемм 3 и 3′ эквивалентны для любого пространства X, содержащего окружность S^1, подразделенную на дуги A_i, B_i, $i=1,2$. Следование $3' \Rightarrow 3$ фактически доказано. Обратное следование несколько труднее и мы его опустим.

[15] См. [7], стр. 52.

[16] gS^1 является окружностью, так как всякое уплотнение на всяком бикомпакте, в частности, на S^1, является гомеоморфизмом.

[17] Так как gA имеет тот же (а, следовательно, счетный) вес, что и A, то множество gI нормально. Поэтому применима теорема суммы.

и UB_g множеств A_g и, соотв., B_g, что $g\mathfrak{J} \cap UA_g = OA_g$ и $g\mathfrak{J} \cap UB_g = OB_g$. Поэтому $g\mathfrak{J} \subseteq UA_g \cup UB_g$. Так как $A_g \cap OB_g = \emptyset$, то и $\overline{U(gA_1)} \cap OB_g = \emptyset$. Аналогично имеем, что $\overline{U(gB_1)} \cap OA_g = \emptyset$. Поэтому вычитая из UA_g множество $\overline{U(gB_1)}$, а из UB_g множество $\overline{U(gA_1)}$ мы получим множества — обозначим для простоты их снова через UA_g и UB_g — обладающие следующими свойствами:

$$g\mathfrak{J} \subseteq UA_g \cup UB_g\,, \qquad UA_g \cap UB_g = \emptyset\,,$$

$$UA_g \cap U(gB_1) = \emptyset\,, \qquad UB_g \cap U(gA_1) = \emptyset\,, \qquad U(gA_1) \cap U(gB_1) = \emptyset\,.$$

Пусть

$$O(gA_1) = UA_g \cup U(gA_1) \quad \text{и} \quad O(gB_1) = UB_g \cup U(gB_1)\,.$$

Нетрудно видеть, что $O(gA_1) \cap O(gB_1) = \emptyset$. Поэтому замкнутое множество $C_1 = gA \setminus \big(O(gA_1) \cup O(gB_1)\big)$ является перегородкой между дугами gA и gB_1. Нетрудно видеть, что $C_1 \cap g\mathfrak{J} = \emptyset$ и, следовательно,

$$C_1 \subseteq gA \setminus g\mathfrak{J} \setminus gA_1 \setminus gB_1 = g(A \setminus \mathfrak{J} \setminus A_1 \setminus B_1)\,.$$

Докажем, что *множество C_1 не имеет компоненты связности, пересекающейся и с gA_2 и с gB_2*. Действительно, если бы такая компонента связности, пусть C', нашлась, то она была бы замкнутым подмножеством множества C_1, а следовательно, и компакта gA. Поэтому C' само было бы компактом и, следовательно, нетривиальным континуумом. Но $C_1 \subseteq g(A \setminus \mathfrak{J} \setminus A_1 \setminus B_1)$. А множество $g(A \setminus \mathfrak{J} \setminus A_1 \setminus B_1)$ лежит в объединении счётного числа попарно не пересекающихся непустых континуумов, а именно, счётного числа кругов gQ_n, где $Q_n = \{e|\ r \leqslant 1,\ z = 1/(2n-1)\}$, двух дуг gA_2 и gB_2, и счётного числа точек из множества $g(I \setminus \mathfrak{J})$ (оно счётно). Но тогда и континуум C' также является суммой счётного или конечного — но больше чем одного! — числа попарно не пересекающихся непустых компактов (он пересекается и с gA_2 и с gB_2). Так как континуум C' не тривиален, то число этих слагаемых не может быть конечным. Но по известной теореме С. Серпинского (18) число таких слагаемых не может быть и счётным. Итак, мы получили противоречие. Следовательно, на самом деле, *перегородка C_1 не содержит ни одной такой компоненты связности, которая пересекалась бы и с gA_2 и с gB_2*.

В этом случае нетрудно показать (19), что перегородка C_1 может быть разбита в сумму двух не пересекающихся открыто-замкнутых в C_1 множеств C_A и C_B таким образом, что

$$C_A \cap gB_2 = \emptyset\,, \quad C_B \cap gA_2 = \emptyset\,, \quad C_1 \cap gA_2 \subseteq C_A \quad \text{и} \quad C_1 \cap gB_2 \subseteq C_B\,.$$

(18) См. [6], стр. 300.

(19) Для этого возьмём для каждой компоненты связности компакта C_1, пересекающейся с gA_2, открыто-замкнутую в C_1 окрестность не пересекающуюся с gB_2, для каждой

Вспомним, что

$$gA \setminus C_1 = O(gA_1) \cup O(gB_1)\,, \qquad \text{где} \qquad O(gA_1) \cap O(gB_1) = \emptyset\,.$$

Так как

$$(C_A \cup gA_2) \cap (C_B \cup gB_2) = \emptyset\,,$$

то существуют открытые непересекающиеся множества $O(gA_2)$ и $O(gB_2)$ такие, что

$$C_A \cup gA_2 \subseteq O(gA_2) \quad \text{и} \quad C_B \cup gB_2 \subseteq O(gB_2)\,.$$

Легко видеть, что множества $O(gA_i)$, $O(gB_i)$, $i = 1, 2$, составляют открытое покрытие компакта gA. Поэтому множества $C_i = gA_i \setminus \big(O(gA_i) \cup O(gB_i)\big)$ не пересекаются. Из предыдущего видно, что множество C_2 является перегородкой между дугами gA_2 и gB_2. Этим мы доказали, что компакт gA разбивается перегородками C_i между соответствующими дугами gA_i и gB_i так, что $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пространство A нельзя уплотнить ни на один бикомпакт.*

Действительно, если бы такое уплотнение $g\colon A \to gA$ существовало бы, то компакт gA можно было бы разбить перегородками C_i между соответствующими дугами gA_i и gB_i так, что $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Но тогда и исходное пространство A было бы разбито перегородками $g^{-1}C_i$ между соответствующими дугами A_i и B_i так, что $g^{-1}C_1 \cap g^{-1}C_2 = \emptyset$, а это противоречит лемме 3′.

Таким образом мы получаем одно из основных утверждений этой работы:

Теорема A. *В трёхмерном пространстве E^3 существует двумерное связное, локально-связное подпространство, имеющее одновременно тип G_δ и тип F_σ, которое не уплотняется ни на один бикомпакт.*

Следствие 2. *Ни для одного бикомпактного расширения cA пространства A замыкание $\overline{N}_c$ нароста $N_c = cA \setminus A$ нельзя ретрагировать на окружность $S^1 = A_N$* (20).

Точно также как обстояло дело с леммой 3 и здесь достаточно доказать

Следствие 2′. *Ни для одного бикомпактного расширения cA пространства A замыкание $\overline{N}_c$ нароста N_c нельзя разбить перегородками с пустым пересечением между соответствующими дугами A_i, B_i, $i = 1, 2$.*

компоненты связности, пересекающейся с gB_2, открыто-замкнутую окрестность, не пересекающуюся с gA_2, и, наконец, для каждой остальной компоненты связности — открыто-замкнутую окрестность, не пересекающуюся и с gA_2 и с gB_2. Получим открытое покрытие бикомпакта C_1. Выберем из него конечное подпокрытие. Объединим вместе все те элементы, которые пересекаются с gA_2. Это будет C_A. Дополнение $C_1 \setminus C_A$ будет множеством C_B.

(20) Нетрудно видеть, что $X_N = \overline{N}_c \setminus N_c$ для любого X (X_N — множество всех тех точек, где X не локально бикомпактно). В случае $X = A$ ясно, что $A_N = S^1$.

Доказательство. Допустим, что существует бикомпактное расширение cA пространства A такое, что замыкание $\overline{N}_c$ нароста N_c можно разбить перегородками C_i между соответствующими дугами A_i, B_i, $i=1,2$, так, что при этом $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Это означает, что существуют такие открытые в $\overline{N}_c$ окрестности OA_i, OB_i соответствующих дуг A_i, B_i, что $OA_i \cap OB_i = \emptyset$ для обоих i и, что

$$(\overline{N}_c \backslash OA_1 \backslash OB_1) \cap (N_c \backslash OA_2 \backslash OB_2) = \emptyset\,.$$

Следовательно, окрестности OA_i, OB_i покрывают $\overline{N}_c$. Так как $\overline{N}_c$ нормально, то найдутся и такие открытые в N_c окрестности $O'A_i$, $O'B_i$ соответствующих дуг A_i, B_i что $\overline{O'A_i} \subseteq OA_i$, $\overline{O'B_i} \subseteq OB_i$, которые также покрывают $\overline{N}_c$. Множества $\overline{O'B_i}$, $\overline{O'A_i}$ замкнуты в cA. Поэтому, а также в силу нормальности расширения cA существуют такие открытые в cA окрестности UA_i, UB_i соответствующих дуг, что $\overline{O'A_i} \subseteq UA_i$, $\overline{O'B_i} \subseteq UB_i$ и что $UA_i \cap UB_i = \emptyset$ для обоих i (более того, что система $\{UA_i, UB_i\}$ подобна системе $\{OA_i, OB_i\}$). Легко видеть, что $\overline{N}_c \subseteq UA_1 \cup UA_2 \cup UB_1 \cup UB_2$. Докажем, что *существует такое положительное число ε, что все точки из A, у которых координата z меньше ε, принадлежат $U = UA_1 \cup UA_2 \cup$ $\cup\, UB_1 \cup UB_2$.*

В самом деле, так как S^1 компактно, и $S^1 = A_N \subseteq \overline{N}_c \subseteq U$, то существует такое положительное число δ, что $O_\delta S^1 \subseteq U$ (где $O_\delta S^1$ — δ-окрестность в метрическом пространстве A). Допустим, теперь, что существует такая последовательность точек e_j из $A \backslash U$, координаты z_j которых стремятся к нулю с возрастанием номера j. Из предыдущего ясно, что начиная с некоторого номера j_0 координаты z_j этих точек отличны от единицы. Значит, эти точки e_j, начиная с некоторого номера j_0, принадлежат кругам Q_n. Можно выбрать подпоследовательность $P = \{e_{j_i}\}$ из последовательности $\{e_j\}$ так чтобы номера e_{j_i} были попарно различны. В cX найдется хотя бы одна точка x разности $\overline{P} \backslash P$. Ясно, что $x \notin A$ и, значит, $x \in N_c$. Но тогда $x \in U$, а этого не может быть, так как U открыто в cX и $P \subseteq cA \backslash U$. Итак, требуемое утверждение доказано. Отсюда сразу следует, что существует такое число n_0 что $Q_n \subseteq U$ как только $n \geqslant n_0$. Далее поступаем также, как в доказательстве леммы 3'. А именно, найдем такое число n, $n \geqslant n_0$, что дуги A_1', A_2', B_1' и B_2' граничной окружности круга Q_n, описываемые неравенствами $k\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant (k+1)\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$, целиком лежат в соответствующих окрестностях UA_1, UA_2, UB_1 и UB_2. Так как

$$Q_n \subseteq U = UA_1 \cup UA_2 \cup UB_1 \cup UB_2\,,$$

то также как и ранее видим, что круг Q_n разбивается перегородками $C_i' = Q_n \backslash (UA_i \cup UB_i)$ между соответствующими дугами A_i', B_i' и что $C_1' \cap C_2' = \emptyset$, а это, как мы знаем, невозможно. Следовательно, первоначальное предположение о том, что утверждение следствия 2' неверно, было ложным. Итак, следствие 2', а вместе с ним и следствие 2 доказаны.

§ 3. Ответ на вопрос А. С. Пархоменко. В этом параграфе особенно ясно видна связь между вопросом об уплотнении на бикомпакты и теорией ретрагирования. Мы докажем ниже, в ответ на вопрос А. С. Пархоменко, что *двумерность пространства A*, построенного в § 2, *существенна*. Правда, *при дополнительном предположении, что множество A_N является абсолютным окрестностным ретрактом* ([21]). Таким образом пока полностью не исключается возможность существования связного, локально-связного, полного в некоторой метрике, являющегося суммой счётного числа компактов, и даже, может быть, плоского, одномерного множества A', которое не уплотняется ни на один бикомпакт.

Теорема 2. *Если для некоторого бикомпактного расширения cX пространства X существует сильно-замкнутое отображение $r\colon \overline{N}_c \to X_N$, тождественное на X_N* ([22]), *то X уплотняется на некоторый бикомпакт.*

Следствие 1. *Если для некоторого бикомпактного расширения cX пространства X множество N_c можно ретрагировать* ([23]) *на X_N, то X можно уплотнить на бикомпакт.*

Следствие 2. *Если множество X_N либо пусто, либо является абсолютным ретрактом, то X уплотняется на некоторый бикомпакт* ([24]).

Эти следствия вытекают из теоремы непосредственно.

Доказательство теоремы. Пусть отображение r удовлетворяет условиям теоремы. Рассмотрим следующую систему попарно не пересекающихся множеств:

$$\Pi = \{r^{-1}x |\ x \in X_N\} \cup \{x |\ x \in X_B\}\,.$$

Это — разбиение бикомпакта cX. Действительно, в силу леммы 1 из § 1 элементы системы Π — замкнуты. В сумме они составляют весь бикомпакт cX, так как $r^{-1}X_N = \overline{N}_c$ и $cX \backslash \overline{N}_c = X_B$. Докажем, что разбиение Π удовлетворяет условию ПСА. В самом деле, пусть $r^{-1}x \subseteq U$ и U — открыто в cX. Так как r — сильно-замкнуто, то существует такая открытая в X_N окрестность Ox точки x, что $r^{-1}Ox \subseteq U$ и что прообраз $r^{-1}Ox$ открыт в $\overline{N}_c$. Поэтому существует и такое открытое в cX множество O, что $O \cap \overline{N}_c = r^{-1}Ox$ и $O \subseteq U$. Нетрудно видеть, что если $r^{-1}x' \cap O \neq \emptyset$, то $r^{-1}x' \subseteq O \subseteq U$. Ясно, что если $x \in O$, то $x \in U$. Итак, условие ПСА для элементов разбиения Π вида $r^{-1}x$ выполнено. Пусть теперь $x \in X_B$ и $x \in U$. Тогда за искомую окрестность O можно принять множество $U \cap X_B$. Сле-

---

([21]) Следуя классическим образцам мы считаем, что абсолютные ретракты и абсолютные окрестностные ретракты всегда бикомпактны (хотя бы по определению).

([22]) Т. е. N_c можно „ретрагировать" на X_N, если только не требовать, как обычно, непрерывности от ретрагирующего отображения.

([23]) Термин „ретракция" мы всюду употребляем в обычном смысле.

([24]) Это является обобщением известного простого факта о том, что если X_N пусто (т. е. X локально-бикомпактно) или состоит из одной точки, то всё X уплотняется на бикомпакт.

довательно, условие ПСА выполнено и разбиение Π порождает непрерывное отображение $g\colon cX \to Z$ на некоторый бикомпакт Z (см. [1], стр. 67 и 96). Нетрудно видеть, что каждый элемент разбиения Π пересекается с X ровно по одной точке. Поэтому мы получим искомое уплотнение пространства X (на бикомпакт Z!), если будем рассматривать отображение g лишь на X. Итак, теорема 2, а вместе с ней и оба следствия, доказаны.

Теорема 2′. *Если* $\dim X \leqslant 1$ и X_N *является связным абсолютным окрестностным ретрактом* (25), *то* X *уплотняется на некоторый бикомпакт* (26).

Доказательство. Итак, пусть выполнены условия теоремы для пространства X со счётной базой. Тогда по теореме Гуревича-Скляренко [8] существует бикомпактное расширение cX счётного веса и той же размерности, что и X: $\dim cX = \dim X \leqslant 1$. Известно, что *всякий связный абсолютный окрестностный ретракт связен и локально-связен в размерности* 0. В силу монотонности размерности $\dim$ по любым множествам (для пространств со счётной базой) видим, что $\dim(\overline{N}_c \setminus X_N) \leqslant 1$. Поэтому по теореме К. Куратовского (см. [9], теорема 1′, стр. 266, том II) существует ретракция $r\colon \overline{N}_c \to X_N$. Значит, согласно теореме 2 пространство X уплотняется на некоторый бикомпакт, что и требовалось доказать.

Замечание 5. В рассматриваемом случае пространств со счётной базой условие $\dim X \leqslant 1$ теоремы 2′ можно ослабить, потребовав, чтобы лишь $\operatorname{def} X \leqslant 1$, т. е. *чтобы существовало расширение* cX *с наростом* N_c *размерности* $\dim N_c \leqslant 1$. Внутреннюю характеристику неравенства $\operatorname{def} X \leqslant 1$ можно найти в [10].

Из только что приведенного доказательства видно, что теорему 2′ можно следующим образом обобщить на случай любой размерности для пространств со счётной базой:

Теорема 2. *Если* $\dim X \leqslant n$ и X_N *является связным и локально-связным компактом в размерностях* $\leqslant n-1$ (28) *то* X *уплотняется на некоторый бикомпакт.*

Доказательство. Снова по теореме Гуревича-Скляренко существует бикомпактное расширение cX счётного веса и той же размерности, что и X: $\dim cX = \dim X \leqslant n$. В силу монотонности размерности $\dim$ имеем: $\dim(\overline{N}_c \setminus X_N) \leqslant n$. Поэтому в силу той же теоремы 1′ из [9] существует ретракция $r\colon \overline{N}_c \to X_N$, а, следовательно — по теореме 2 — и уплотнение пространства X на некоторый бикомпакт. Всё доказано.

(25) Отсюда следует, что множество X_N бикомпактно.

(26) Мы докажем эту теорему лишь для пространств со счётной базой. Для общего случая нужны всё же некоторые дополнительные ограничения и, главное, пришлось бы привести доказательства необходимых вспомогательных утверждений, которые заняли бы слишком много места.

(27) См. [9], том II, стр. 265.

Замечание 6. Внимательный читатель наверное уже заметил, что пример пространства A, данный в § 2, легко обобщить на случай любого n: построение надо вести в эвклидовом пространстве E^{n+1} (n — размерность пространства A^n), вместо окружности на месте множества A_N мы получим сферу S^{n-1} размерности $n-1$ и т. д. Доказательство свойств типа ретрагируемости (леммы 3, 3′, 4 и 4′) проходит точно также.

Цитированная литература

[1] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, Berlin 1935.

[2] А. В. Архангельский, *О внешних базах множеств, лежащих в бикомпактах*, Доклады АН СССР 132 (1960), стр. 496.

[3] А. Зарелуа, *О продолжении отображений на расширения*, Сиб. Матем. Журнал 5, № 3, стр. 542.

[4] S. Mardesić, *On covering dimension and inverse limits of compact spaces* Ill. J. Math. 4, N 2, стр. 278.

[5] J. Tuckey, *Convergence and uniformity in topology*, Princeton 1940.

[6] W. Sierpiński, *Sur les différences de deux ensembles fermés*, Tôhoku Math. J.13 (1918), стр. 300.

[7] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton 1941.

[8] Е. Г. Скляренко, *О вложении нормальных пространств в бикомпакты того же веса и той же размерности*, Доклады АН СССР 123, № 1 (1958), стр. 36.

[9] C. Kuratowski, *Topologie*, II, Warszawa 1961.

[10] Ю. М. Смирнов, *О размерности наростов бикомпактных расширений близостных и топологических пространств*, Матем. Сборник 71 (113), № 4 (1966), стр. 456.

Reçu par la Rédaction le 2. 6. 1967