Paracompacité et espaces uniformes

par

Jean Ferrier (Paris)

1. Il peut être intéressant dans l'étude des espaces vectoriels topologiques de connaître la paracompacité éventuelle des espaces rencontrés. On sait depuis longtemps que les espaces métrisables sont paracompacts, mais on voudrait étendre le résultat à d'autres comme par exemple les limites inductives strictes d'une suite d'espaces topologiques localement convexes métrisables. Or, il est en général faux qu'un espace topologique qui est réunion d'une suite de sous-espaces paracompacts soit paracompact, même si les espaces de la suite sont fermés, à moins de supposer en outre que le grand espace est collectivement normal, condition déjà proche de la paracompacité. On sent donc la nécessité de définir la paracompacité dans un cadre plus strict que celui des espaces topologiques; on choisira ici celui des espaces uniformes.

Par ailleurs on peut étudier la stabilité de la paracompacité par d'autres limites inductives, et en particulier par les quotients. Le cas des relations d'équivalence fermées a été entièrement résolu par E. Michael [6]. En revanche l'exemple des espaces vectoriels topologiques conduit à s'intéresser aux relations d'équivalence ouvertes; de telles relations interviennent encore en théorie des jeux où l'on sait le rôle joué par le paracompacité dans le problème des images continues ouvertes d'un espace métrique complet (voir [3]). Il sera fait largement appel à la théorie des jeux pour les définitions et résultats relatifs à cette seconde partie.

Première partie: Paracompacité des limites inductives

2. Notations et préliminaires. Dans tout ce qui va suivre, on désignera toujours par τ le *foncteur* (pour les notions sur les catégories, voir [8] et [9]) qui, à un espace uniforme X, associe l'espace topologique sous-jacent que l'on notera ${}^{\tau}X$; on désignera par φ le foncteur adjoint à gauche de τ, à savoir le foncteur qui, à un espace topologique X, fait correspondre l'espace uniforme ${}^{\varphi}X$ obtenu en munissant l'ensemble sous-jacent à X de la structure uniforme universelle de X (voir [2], chap. 9,

§ 1, exercice 5); les espaces uniformes X tels que $X = {}^{\varphi\tau}X$ sont dits fins ou universels. Par ailleurs, on dira qu'un monomorphisme $X \to Y$ d'espaces topologiques ou uniformes est strict s'il définit un isomorphisme de X sur un sous-espace de Y; on dira qu'un épimorphisme $X \to Y$ est strict s'il définit un isomorphisme d'un quotient de X sur Y.

Il faut établir maintenant quelques résultats préliminaires concernant la définition d'une structure uniforme par une famille d'écarts. Considérons la catégorie dont les objets sont les ensembles E munis d'un $\boldsymbol{R}_+$-cône H d'écarts bornés stable par enveloppes supérieures finies, et dans laquelle un morphisme de (E, H) dans (E', H') est une application f de E dans E' telle que, pour tout $d' \in H'$, il existe $d \in H$ tel que $d(x, y) \leqslant 1$ entraîne $d'(f(x), f(y)) \leqslant 1$. Cette catégorie est fibrée et cofibrée au dessus de la catégorie des ensembles; on peut la scinder en décidant que la structure initiale, pour des applications f_ι: $E \to E_\iota$, où E est muni de H_ι, est définie par l'ensemble des enveloppes supérieures finies d'écarts $d_\iota \circ (f_\iota \times f_\iota)$, où d_ι parcourt H_ι, et la coscinder en décidant que la structure finale, pour des applications f_ι: $E_\iota \to E$, est définie par l'ensemble des écarts bornés d sur E tels que, pour tout ι, f_ι soit un morphisme lorsqu'on munit E du $\boldsymbol{R}_+$-cône engendré par d.

On connait un foncteur pleinement fidèle et surjectif de cette catégorie à valeurs dans celle des espaces uniformes, à savoir celui qui à (E, H), associe l'ensemble E muni de la structure uniforme définie par l'ensemble d'écarts H. Si pour tout objet (E, H), on désigne par $(E, \bar{H})$ l'objet final pour l'application identique de E, la restriction du précédent foncteur à la sous-catégorie pleine engendrée par les (E, H) tels que $H = \bar{H}$ est un isomorphisme.

Proposition 1. *$\bar{H}$ est le plus petit ensemble d'écarts bornés K contenant H et tel que, si $(d_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille d'éléments de K telle que $\sum_{\iota \in I} \|d_\iota\| < +\infty$ et $d \leqslant \sum_{\iota \in I} d_\iota$, alors $d \in K$.*

En effet, il est clair que $\bar{H}$ est stable par l'opération indiquée et, d'autre part, si $d \in \bar{H}$ et si, pour simplifier, $d \leqslant 1$, il existe, pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, un écart $d_n \in H$ tel que $d_n(x, y) \leqslant 1$ entraîne $2^n d(x, y) \leqslant 1$. Il est alors clair que $d \leqslant \sum_{\iota \in \boldsymbol{N}} 2^{1-n} \inf(2, d_n)$, et par suite que $\bar{H}$ est contenu dans tout ensemble K.

Corollaire 1. *Le foncteur contravariant h, qui à un espace uniforme X associe l'ensemble $h(X)$ de tous les écarts bornés uniformément continus sur X, est post-exact, i.e. transforme les monomorphismes stricts en épimorphismes stricts.*

Il faut vérifier que, pour tout monomorphisme strict $X \to Y$, l'application $h(Y) \to h(X)$ est surjective, autrement dit que tout écart de $h(X)$

provient d'un écart de $h(Y)$. Supposons pour simplifier que X est contenu dans Y, et désignons par K l'image de $h(Y)$ dans $h(X)$. On sait que K définit la structure de X, de sorte que $\bar{K} = h(X)$. Il suffit donc de voir que K vérifie la propriété de stabilité de la proposition 10; or K est évidemment stable par sommes, et on est ramené au lemme suivant:

Lemme 1. *Soient X un sous-ensemble d'un ensemble Y, D un écart borné sur Y, d un écart sur X majoré par D; on peut prolonger d à Y en un écart petit que D.*

Supposons que l'on ait $D \leqslant 1$, et prolongeons d'abord d en lui donnant la valeur 1 en dehors de $X \times X$; considérons l'écart d' borne inférieure de d et de D. Rappelons, à ce propos, que l'écart borne inférieure d'une famille $(d_\iota)_{\iota \in I}$ d'écarts est l'écart qui, en (x, y), est égal à la borne inférieure des $\sum_{n=0}^{\infty} d_{\iota_n}(x_n, x_{n+1})$, où ι_n parcout I et x_n est une suite, telle que $x_0 = x$ et $x_n = y$ à partir d'un certain rang. Il faut voir que d' prolonge d; supposons par l'absurde que l'on ait $\sum_{n=0}^{\infty} d_{\iota_n}(x_n, x_{n+1}) < d(x, y)$, où d_{ι_n} est d ou D, et soit p le plus petit entier tel que x_{p+1} soit dans X et que l'on ait

$$\sum_{n=0}^{p} d_{\iota_n}(x_n, x_{n+1}) < d(x, x_{p+1});$$

si q est le plus grand entier $< p$ tel que x_{q+1} soit dans X, on a

$$\sum_{n=q+1}^{p} d_{\iota_n}(x_n, x_{n+1}) = \sum_{n=q+1}^{q} D(x_n, x_{n+1}) \geqslant D(x_{q+1}, x_{p+1}) \geqslant d(x_{q+1}, x_{p+1}),$$

et par suite

$$\sum_{n=0}^{q} d_{\iota_n}(x_n, x_{n+1}) < d(x, x_{q+1}),$$

et q vérifie la même inégalité que p, ce qui est absurde car p était le plus petit.

Corollaire 2. *Le foncteur* $\operatorname{Hom}(\,.\,, [0, 1])$ *de la catégorie des espaces uniformes dans celle des ensembles est post-exact.*

Ce corollaire 2 est lui-même une conséquence du corollaire 1 et du lemme suivant:

Lemme 2. *Soient Y un ensemble muni d'un écart d, et X un sous-ensemble de Y. Toute application f de X dans $[0, 1]$ vérifiant, pour tout couple (x, y) de $X \times X$,*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y),$$

se prolonge à Y de façon à satisfaire la même inégalité dans Y.

Il suffit d'appliquer le théorème de Zorn à l'ensemble ordonné des couples (Z, g), où Z est une partie de Y contenant X, et g une application de Z dans $[0, 1]$ prolongeant f et vérifiant l'inégalité de l'énoncé dans Z.

Il faut aussi signaler un résultat qui concerne l'algèbre bornologique $\mathrm{Bc}(X, \boldsymbol{R})$ des fonctions numériques bornées et uniformément continues sur l'espace uniforme X, dont les bornées sont les ensembles de fonctions également bornés et uniformément équicontinus:

PROPOSITION 2. *Pour qu'un ensemble H de fonctions numériques sur X soit borné dans* $\mathrm{Bc}(X, \boldsymbol{R})$, *il faut et il suffit que H soit borné en un point et que l'écart* $\sup\limits_{f\in H}|f(x)-f(y)|$ *appartienne à* $h(X)$.

COROLLAIRE 3. *Le foncteur* $\mathrm{Bc}(\,.\,, \boldsymbol{R})$ *de la catégorie des espaces uniformes dans celle des ensembles bornologiques (resp. des algèbres bornologiques de type convexe) est postexact.*

En particulier, toute fonction numérique uniformément continue et bornée sur un sous-espace peut se prolonger à l'espace entier.

COROLLAIRE 4. *Soient Y un espace uniforme, V un entourage de Y, X un sous-espace de Y et d un écart uniformément continu et borné sur X; dans ces conditions, il existe un prolongement de d à Y qui soit nul en dehors de $V(X)$.*

On peut d'abord, d'après le corollaire 1, prolonger d à Y. D'autre part, on peut trouver une fonction numérique uniformément continue f à valeurs dans $[0, 1]$ égale à 1 sur X et nulle en dehors de $V(X)$. D'après la proposition 2, l'ensemble H des fonctions numériques g sur Y, nulles en un point a donné et telles que $|g(x)-g(y)|\leqslant d(x, y)$ pour tout couple (x, y) de $Y\times Y$, est borné dans $\mathrm{Bc}(Y, \boldsymbol{R})$. Il en est de même de fH, et l'écart $\sup\limits_{g\in fH}|g(x)-g(y)|$ appartient à $h(Y)$. Or il est nul en dehors de $V(X)$, et prolonge d sur X car la fonction

$$x\to f\big(d(x, y)-d(a, y)\big)$$

appartient à fH pour tout y de Y.

PROPOSITION 3. *Pour qu'un morphisme $(X_n)\to(Y_n)$ de suites inductives d'espaces uniformes soit tel que $X = \varinjlim X_n$ soit isomorphe à l'image réciproque de $Y = \varinjlim Y_n$ par l'application $X\to Y$, il suffit que les morphismes d'ensembles bornologiques*

$$\mathrm{Bc}(Y_0, \boldsymbol{R})\to\mathrm{Bc}(X_0, \boldsymbol{R})$$

et

$$\mathrm{Bc}(Y_{n+1}, \boldsymbol{R})\to\mathrm{Bc}(Y_n, \boldsymbol{R})\underset{\mathrm{Bc}(X_n,\boldsymbol{R})}{\pi}\mathrm{Bc}(X_{n+1}, \boldsymbol{R})$$

soient des épimorphismes stricts (le dernier terme écrit représente le produit fibré de $\mathrm{Bc}(Y_n, \boldsymbol{R})$ et de $\mathrm{Bc}(X_{n+1}, \boldsymbol{R})$ au-dessus de $\mathrm{Bc}(X_n, \boldsymbol{R})$).

Pour prouver le résultat, il suffit de voir que le morphisme $\mathrm{Bc}(Y, \boldsymbol{R})\to$ $\to\mathrm{Bc}(X, \boldsymbol{R})$ est un épimorphisme strict, ce qui résulte du

LEMME 3. *Pour qu'un morphisme $(X_n)\to(Y_n)$ de suites projectives d'ensembles bornologiques soit tel que le morphisme de $X = \varprojlim X_n$ dans $Y = \varprojlim Y_n$ soit un épimorphisme strict, il suffit que les morphismes $X_0\to Y_0$ et $X_{n+1}\to X_n \underset{Y_n}{\pi} Y_{n+1}$ soient des épimorphismes stricts.*

La vérification est immédiate.

COROLLAIRE 5. *Pour toute suite inductive stricte (X_n) d'espaces uniformes, les morphismes $X_p\to\varinjlim X_n$ sont des monomorphismes stricts.*

Rappelons qu'une suite inductive (X_n) est dite stricte lorsque les morphismes $X_p\to X_{n+1}$ sont des monomorphismes stricts. On voit facilement que les morphismes $X_p\to\varinjlim X_n$ sont injectifs; il suffit donc de voir qu'ils sont stricts, et pour cela appliquer la proposition 3 au système inductif constant X_p et au système (X_n) limité aux entiers $n\geqslant p$. $X_n\to X_{n+1}$ étant par hypothèse un monomorphisme strict il en résulte, d'après corollaire 3, que le morphisme $\mathrm{Bc}(X_{n+1}, \boldsymbol{R})\to\mathrm{Bc}(X_n, \boldsymbol{R})$ est un épimorphisme strict. Comme le produit fibré de $\mathrm{Bc}(X_n, \boldsymbol{R})$ et de $\mathrm{Bc}(X_p, \boldsymbol{R})$ au dessus de $\mathrm{Bc}(X_p, \boldsymbol{R})$ se réduit à $\mathrm{Bc}(X_n, \boldsymbol{R})$, les conditions d'applications de la proposition 3 sont vérifiées.

3. Espaces uniformes de caractère paracompact.

DÉFINITION 1. X étant un espace uniforme (resp. un espace topologique), on dira qu'une famille $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de parties de X est *uniformément discrète* (resp. *discrète*) si le morphisme canonique de la somme $\coprod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ dans X est un monomorphisme strict.

Dans le cas d'un espace uniforme, il revient au même de dire qu'il existe un entourage V telque $V(X_\alpha)\cap V(X_\beta) = \emptyset$ entraîne $\alpha=\beta$.

DÉFINITION 2. On dit qu'un espace uniforme X est de *caractère paracompact* si, pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{R}$ de X, il existe une suite $(\mathfrak{S}_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ de familles uniformément discrète plus fines que $\mathfrak{R}$ telle que la réunion des ensembles des $\mathfrak{S}_n$ recouvre X.

PROPOSITION 4. *Tout espace uniforme de caractère paracompact a une topologie paracompacte.*

On peut invoquer [2] chap. 9, § 4, nº 5, lemmes 5, 6 et 7, ou faire une démonstration directe à partir des résultats de [7]. Soit donc $\mathfrak{R}$ un recouvrement ouvert d'un espace uniforme de caractère paracompact X. On peut, par définition, trouver un recouvrement $(X_{n,\alpha})_{n\in\boldsymbol{N},\alpha\in A_n}$ plus fin que $\mathfrak{R}$, et une suite $(V_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ d'entourages de X telle que $V_n(X_{n,\alpha})\cap$ $\cap V_n(X_{n,\beta}) = \emptyset$ entraîne $\alpha=\beta$. D'autre part, on peut toujours supposer que les ouverts de $\mathfrak{R}$ sont de la forme $\{x|\ \varphi(x)>0\}$, où φ est une fonction uniformément continue, puisque ces derniers forment une base de la topologie. Choisissons alors pour tout couple n, a, une fonction uniformément continue $\varphi_{n,a}$ à valeurs dans l'intervalle $[0, 2^{-n}]$, égale à 2^{-n} sur $X_{n,a}$, et à 0 en dehors de $V_n(X_{n,a})$, un ouvert $U_{n,a}$ de $\mathfrak{R}$ contenant $X_{n,a}$, et une fonction uniformément continue $\psi_{n,a}$ à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, strictement positive dans $U_{n,a}$, et nulle en dehors. Comme il est immédiat que la famille $(\varphi_{n,a}\psi_{n,a})_{n\in N, a\in A_n}$ est équicontinue, subordonnée à $\mathfrak{R}$, et de somme partout strictement positive, il n'y a plus qu' à appliquer [5].

Proposition 5. *Tout espace uniforme métrisable est de caractère paracompact.*

Il suffit de se reporter à la démonstration du lemme 4 de [2], chap. 9, § 4, n° 5. Soit X un espace métrique; pour toute boule ouverte B de X, désignons par B^n la boule ouverte de même centre (éventuellement vide) dont le rayon est celui de B moins 2^{-n}. Soient alors A un ensemble bien ordonné, et $(B_a)_{a\in A}$ un recouvrement de X par des boules ouvertes. Posons

$$C_{n,a} = B_a^n - \bigcup_{\beta<a} B_\beta^{n+1}.$$

La famille $(C_{n,a})_{n\in N, a\in A}$ répond à la question; en effet, elle est plus fine que le recouvrement donné; elle recouvre X, puisque si $x \in X$, il existe un plus petit a tel que $x \in B_a$, puis un entier n tel que $x \in B_a^n$, donc $x \in C_{n,a}$; enfin, n étant fixé, la famille $(C_{n,a})_{a\in A}$ est uniformément discrète.

Il faut remarquer que, pour qu'un espace uniforme soit de caractère paracompact, il faut et il suffit que l'espace séparé associé le soit; par suite, si une structure uniforme peut être définie par un seul écart, elle est de caractère paracompact.

Proposition 6. *Soit X un espace topologique uniformisable; pour que X soit paracompact, il faut et il suffit que ${}^{\varphi}X$ soit de caractère paracompact.*

La condition est évidemment suffisante, d'après la proposition 1. Elle est d'autre part nécessaire, car si X est paracompact, tout recouvrement ouvert de X est uni (cf. [2], chap. 9, § 4, exercice 19(a)), donc divisible ([2], chap. 9, § 4, exercice 16), la structure universelle est définie par l'ensemble des voisinages de la diagonale ([2], chap. 9, § 4, exercice 18(a)) et alors tout recouvrement ouvert est uniforme pour cette structure, donc moins fin qu'un recouvrement par des boules ouvertes pour un certain écart; il suffit alors d'appliquer la proposition 2.

L'intérêt de la notion introduite réside dans le fait qu'elle est stable par sous-espaces fermés et aussi par réunions dénombrables:

Proposition 7. *Tout espace uniforme X, qui est réunion d'une suite X_n de sous-espaces uniformes de caractère paracompact, est de caractère paracompact.*

La démonstration découle immédiatement des définitions.

Toutefois, on n'a aucun renseignement sur la stabilité par limites projectives, même filtrantes et dénombrables. On est donc amené à améliorer la situation et à poser la définition suivante:

Définition 3. On dit qu'un espace uniforme X est *complètement paracompact* si tout sous-espace de X est de caractère paracompact.

Il revient au même de dire que, pour toute famille ouverte $\mathfrak{R}$ de parties de X, il existe une suite $(\mathfrak{S}_n)_{n\in N}$ de familles uniformément discrètes plus fines que $\mathfrak{R}$, telle que la réunion des $\mathfrak{S}_n$ recouvre le même ensemble que $\mathfrak{R}$.

De façon évidente, tout espace uniforme métrisable est complètement paracompact, et la notion de complète paracompacité est stable par sous-espaces et réunions dénombrables de suites. De plus:

Proposition 8. *Soit X un espace uniforme qui est limite projective d'une suite X_n d'espaces uniformes complètement paracompacts; dans ces conditions, X est complètement paracompact.*

Soit en effet $\mathfrak{R}$ un recouvrement ouvert d'un ouvert Y de X. Pour tout entier n, désignons par Y_n l'ensemble des points y de Y qui possèdent un voisinage contenu dans un ensemble de $\mathfrak{R}$, et qui soit image réciproque par l'application canonique $X \to X_n$ d'un ouvert de X_n. Par définition de la limite projective, Y est réunion des Y_n, et par construction, $\mathfrak{R}$ induit sur chaque Y_n un recouvrement moins fin qu'un recouvrement image réciproque par l'application $X \to X_n$ d'une famille ouverte de X_n, laquelle est moins fine que la réunion d'une suite $(\mathfrak{S}_{n,p})_{p\in N}$ de familles uniformément discrètes. En prenant les images réciproques et en faisant varier à la fois p et n, on obtient une suite de familles uniformément discrètes plus fines que $\mathfrak{R}$ et recouvrant Y.

Il faut remarquer que l'on a utilisé explicitement le fait que le système projectif était indexé par N, donc dénombrable et filtrant; on ne connaît rien sur les limites projectives finies, ni même sur le produit $X \times X$. Toutefois, on va pouvoir se passer de ces dernières:

Théorème 1. *Soit $(\mathfrak{M})$ une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces uniformes, stable par produits finis, et dont les objets soient complètement paracompacts; soit alors $(\mathfrak{P})$ la plus petite sous-catégorie pleine contenant $(\mathfrak{M})$ qui soit stable par structures initiales pour un ensemble dénombrable d'applications et par réunions dénombrables. Dans ces conditions, tous les objets de $(\mathfrak{P})$ sont complètement paracompacts; ils ont en particulier une topologie paracompacte.*

L'opération de structure initiale pour un ensemble dénombrable d'applications se décompose en trois autres: image réciproque pour une application, limite projective de suite, et produit fini; les deux premières ainsi que les réunions dénombrables conservent, comme on l'a vu, la complète paracompacité. Tout résulte alors de ce que, dans toute séquence (transfinie) d'opérations parmi celles citées, on peut faire sauter en arrière les produits finis pour les grouper à la première place.

Le cas le plus intéressant est celui où ($\mathfrak{M}$) est la catégorie des espaces uniformes métrisables; on obtient de cette façon la paracompacité des espaces vectoriels topologiques localement convexes qui sont construits à partir des espaces vectoriels métrisables par des limites projectives dénombrables ou des limites inductives strictes de suites.

4. Limites inductives d'espaces topologiques. Nous allons maintenant voir comment les résultats obtenus s'appliquent à l'étude des limites inductives d'espaces topologiques. Dans toute cette partie, on s'attachera davantage aux catégories d'ouverts qu'aux points: on considérera donc comme séparé (resp. de Fréchet, normal, paracompact), un espace topologique X tel que l'espace de Kolmogorov associé à X soit séparé (resp. de Fréchet, normal, paracompact). Par ailleurs, on utilisera le terme de monomorphisme strict au lieu de celui d'homéomorphisme sur un sous-espace, celui d'épimorphisme strict au lieu de celui de quotient; un système inductif (resp. projectif) sera dit strict si les morphismes qui le composent sont des monomorphismes (resp. épimorphismes) stricts; un système inductif ou projectif sera dit fermé si les morphismes qui le composent le sont. On désignera enfin par π le foncteur adjoint du foncteur d'inclusion de la catégorie des espaces uniformes précompacts dans celle des espaces uniformes.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que, pour qu'un espace topologique de Fréchet X soit normal, il faut et il suffit que la condition d'anté-exactitude suivante ait lieu pour le foncteur $\pi\circ\varphi$:

Pour tout monomorphisme strict fermé $Y\to X$, le morphisme ${}^{\pi\varphi}Y\to{}^{\pi\varphi}X$ est un monomorphisme strict.

(On remarquera que le foncteur $\mathrm{Hom}(\,.\,,[0,1])$, qui est post-exact dans la catégorie des espaces uniformes, est fidèle lorsqu'on le restreint à la sous-catégorie des espaces uniformes précompacts, laquelle est isomorphe à celle des espaces de proximité; ces deux propriétés entraînent que la condition indiquée est équivalente à la suivante, en laquelle on reconnaît l'axiome ($0_V'''$) de [2], § 4, n° 2:

Pour tout monomorphisme strict fermé $Y\to X$, l'application

$$\mathrm{Hom}(X,[0,1])\to\mathrm{Hom}(Y,[0,1])$$

est surjective.)

Proposition 9. *Pour qu'un espace topologique de Fréchet X soit collectivement normal, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions équivalentes qui suivent:*

(i) *Tout recouvrement uniformément discret d'une partie fermée Y de X est la trace sur Y d'une famille d'ouverts disjoints de X.*

(ii) *Tout recouvrement uniformément discret d'une partie fermée Y de X est une famille uniformément discrète de ${}^{\varphi}X$.*

(iii) *Pour tout sous-espace fermé Y de X, toute famille uniformément discrète dans ${}^{\varphi}Y$ est uniformément discrète dans ${}^{\varphi}X$.*

(iv) *Pour tout sous-espace fermé Y de X, le morphisme ${}^{\varphi}Y\to{}^{\varphi}X$ est un monomorphisme strict.*

Cette dernière assertion peut elle-même prendre les formes équivalentes qui suivent:

($\mathrm{iv_a}$) *Tout écart continu et borné sur un sous-espace fermé Y de X est la restriction à Y d'un écart continu et borné sur X.*

($\mathrm{iv_b}$) *Toute famille équicontinue et également bornée de fonctions numériques sur un sous-espace fermé Y de X est la trace d'une famille équicontinue et également bornée de fonctions numériques sur X.*

($\mathrm{iv_c}$) *X est normal et, pour tout recouvrement ouvert localement fini d'un sous-espace fermé Y de X, il existe un recouvrement ouvert localement fini de X qui induit sur Y un recouvrement plus fin.*

Les propriétés ($\mathrm{iv_a}$) et ($\mathrm{iv_b}$) sont trivialement équivalentes à la propriété (iv); l'équivalence avec ($\mathrm{iv_c}$) résulte de ce que la structure uniforme universelle d'un espace normal peut être définie par les recouvrements ouverts localement finis. D'autre part, il est facile de voir que l'on a (iv) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (iii), (ii) $\Rightarrow$ (i) et que la condition (i) entraîne la normalité simple, d'où facilement (iii).

Enfin, (iii) entraîne (iv) d'après le fait que, dans un espace normal, tout recouvrement ouvert dénombrable est uniforme pour la structure uniforme universelle, et les deux lemmes faciles qui suivent:

Lemme 4. *Si X est un espace uniforme local, il existe dans X un système fondamental de recouvrements uniformes qui soient composés d'un recouvrement uniforme dénombrable par des recouvrements uniformément discrets.*

Lemme 5. *Si $f\colon X\to Y$ est un bimorphisme d'espaces uniformes locaux qui conserve les familles uniformément discrètes et les recouvrements uniformes dénombrables, alors f est un isomorphisme.*

Rappelons qu'un espace uniforme X est dit local („locally fine", selon la terminologie de H. H. Corson et J. R. Isbell [4]) s'il vérifie la condition suivante: Tout recouvrement ouvert de X qui induit, sur les ensembles d'un recouvrement uniforme donné, des recouvrements uniformes, est lui-même un recouvrement uniforme. Cela signifie que l'ensemble des recouvrements uniformes de X est stable par produit fibré, ou encore que les recouvrements ouverts uniformes des ouverts de X forment un système de familles couvrantes au sens de Grothendieck [1] ou une topologie au sens de Giraud [5]. Tout espace uniforme fin est local.

Le lemme 4 se prouve d'abord lorsque $X = {}^{\varphi}M$, où M est un espace métrique complet: si, dans la démonstration de la proposition 5, V_n désigne l'entourage $\{(x, y) \mid d(x, y) < 2^{-n}\}$, il suffit de considérer le recouvrement $V_{n+2}(C_{n,\alpha})$. En effet, si on pose $U_n = \bigcup_{\alpha} V_{n+2}(C_{n,\alpha})$, le recouvrement précédent induit sur chaque U_n un recouvrement uniformément discret et d'autre part la suite U_n est un recouvrement ouvert de M, donc uniforme dans ${}^{\varphi}M$, puisque M est paracompact. Enfin, le lemme 4 s'étend au cas où X est local, parce qu'un espace uniforme local se plonge dans une limite projective filtrante d'espaces du type ${}^{\varphi}M$. En fait, nous introduirons plus loin une notion d'espace quasi-fin, généralisant la notion d'espace local et pour laquelle les lemmes 4 et 5 sont encore vrais.

On est maintenant en mesure de prouver la proposition suivante:

PROPOSITION 10. *Soit (X_n) une suite inductive stricte fermée d'espaces topologiques* (i.e. telle que les morphismes $X_n \to X_{n+1}$ soient des monomorphismes stricts fermés). *Si les X_n sont de Fréchet (resp. normaux, collectivement normaux, paracompacts), alors $X = \varinjlim X_n$ est de Fréchet (resp. normal, collectivement normal, paracompact).*

Le cas des espaces de Fréchet est trivial, supposons maintenant les X_n normaux (resp. collectivement normaux) et considérons un monomorphisme strict fermé $Y \to X$. Le morphisme de suites inductives

$$({}^{\pi\varphi}\widehat{Y \underset{X}{\pi} X_n}) \to ({}^{\pi\varphi}X_n) \qquad (\text{resp. } ({}^{\varphi}\widehat{Y \underset{X}{\pi} X_n}) \to ({}^{\varphi}X_n))$$

vérifie les conditions de la proposition 3, de sorte que le morphisme

$$\varinjlim {}^{\pi\varphi}\widehat{Y \underset{X}{\pi} X_n} \to \varinjlim {}^{\pi\varphi}X_n \qquad (\text{resp. } \varinjlim {}^{\varphi}\widehat{Y \underset{X}{\pi} X_n} \to \varinjlim {}^{\varphi}X_n)$$

est un monomorphisme strict. Comme π et φ commutent aux limites inductives, on a

$$\varinjlim {}^{\pi\varphi}X_n = {}^{\pi\varphi}X \qquad (\text{resp. } \varinjlim {}^{\varphi}X_n = {}^{\varphi}X)$$

et comme ce morphisme se factorise alors à travers ${}^{\pi\varphi}Y$ (resp. ${}^{\varphi}Y$), il en résulte que le morphisme

$${}^{\pi\varphi}Y \to {}^{\pi\varphi}X \qquad (\text{resp. } {}^{\varphi}Y \to {}^{\varphi}X)$$

est un monomorphisme strict.

Enfin, si les X_n sont paracompacts, les ${}^{\varphi}X_n$ constituent un système inductif strict d'espaces uniformes de caractère paracompact et ${}^{\varphi}X = \varinjlim {}^{\varphi}X_n$ est de caractère paracompact, donc $X = {}^{\tau\varphi}X$ paracompact. En réalité, on vient de prouver le résultat suivant:

PROPOSITION 11 (E. Michael). *Soit X un espace topologique collectivement normal. Si X est réunion d'une suite X_n de sous-espaces fermés paracompacts, il est lui-même paracompact.*

En effet, ${}^{\varphi}X$ est alors réunion de la suite ${}^{\varphi}X_n$ de sous-espaces uniformes de caractère paracompact.

Deuxième partie. Paracompacité des espaces quotients

5. Préliminaires. On va maintenant introduire une catégorie relativement stable d'espaces uniformes qui jouera un rôle important dans la suite.

DÉFINITION 4. On dit qu'un espace uniforme X est *quasi-fin*, si pour tout espace métrique complet M, l'application $\mathrm{Hom}(X, {}^{\varphi\tau}M) \to$ $\to \mathrm{Hom}(X, M)$ est surjective.

Il est immédiat que tout espace uniforme fin est quasi-fin. De plus:

PROPOSITION 12. *La catégorie des espaces uniformes quasi-fins est stable par limites inductives, par limites projectives dénombrablement filtrantes et par images inverses au-dessus de la catégorie des ensembles.*

Pour les limites inductives, la vérification est immédiate, d'après les bijections successives:

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim X_\iota, {}^{\varphi\tau}M) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Hom}(X_\iota, {}^{\varphi\tau}M) = \varprojlim \mathrm{Hom}(X_\iota, M) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\varinjlim X_\iota, M)\,.$$

Soit maintenant $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espace uniformes tel que X soit identique à l'image réciproque $f^*(Y)$ de Y pour l'application f. Pour tout morphisme g de X dans un espace métrique complet M, $g^*(M)$ est écartisable et on peut trouver au-dessus de Y une structure uniforme écartisable Y_1 telle que $f^*(Y_1) = g^*(M)$ (voir par exemple la première partie, corollaire 1 de la proposition 1). En passant aux séparés complétés, on obtient un monomorphisme strict: $\widehat{g^*(M)} \to \hat{Y}_1$, puis, en appliquant le foncteur φ, un monomorphisme ${}^{\varphi\tau}\widehat{g^*(M)} \to {}^{\varphi\tau}\hat{Y}_1$ qui reste strict puisque $\widehat{g^*(M)}$ est isomorphe à un sous-espace fermé de $\hat{Y}_1$. Or, si Y est quasi-fin, par définition il s'envoie dans ${}^{\varphi\tau}\hat{Y}_1$, d'où un morphisme de X dans ${}^{\varphi\tau}\hat{Y}_1$, qui se factorise à travers ${}^{\varphi\tau}\widehat{g^*(M)}$, lequel s'envoie dans ${}^{\varphi\tau}M$. Finalement $g \in \mathrm{Hom}(X, {}^{\varphi\tau}M)$.

Voyons enfin la stabilité par limites projectives dénombrablement filtrantes. Si (X_ι) est un système projectif dénombrablement filtrant d'espaces uniformes quasi-fins et si f_ι est la projection de $X = \varprojlim X_\iota$ dans X_ι, pour tout morphisme g de X dans un espace métrique complet M, il existe un indice ι tel que $f_\iota^*(X_\iota)$ s'envoie dans $g^*(M)$; comme $f_\iota^*(X_\iota)$ est quasi-fin, $f_\iota^*(X_\iota)$ s'envoie dans ${}^{\varphi\tau}M$, d'où aussi X.

Il est facile de voir que si X est quasi-fin le séparé (resp. séparé complété) de X l'est aussi; cela résulte du fait que si M est un espace métrique, il est paracompact et par suite ${}^{\varphi\tau}M$ est séparé et complet (voir [2], chap. 9, § 4, exerc. 19 c). Par suite, pour qu'un espace uniforme soit quasi-fin, il faut et il suffit que son séparé (resp. séparé complété) le soit.

Proposition 13. *Pour qu'un espace uniforme (resp. séparé, séparé complet) X soit quasi-fin, il faut et il suffit qu'il vérifie l'une des deux conditions qui suivent:*

(i) *X est image inverse d'(resp. se plonge dans, est) une limite projective dénombrablement filtrante d'espaces du type ${}^{\varphi\tau}M$, où M est un espace métrique complet.*

(ii) *Si H désigne l'ensemble de tous les écarts uniformément continus sur X et X_d l'ensemble X muni de l'écart d, X est image inverse de (resp. se plonge dans, est isomorphe à) l'espace $\varprojlim_{d\in H} {}^{\varphi\tau}\hat{X}_d$.*

En effet (ii) entraîne (i) puisque le système projectif $(X_d)_{d\in H}$ est dénombrablement filtrant et (i) entraîne que X est quasi-fin d'après la proposition 1. Enfin, si X est quasi-fin, il s'envoie dans les ${}^{\varphi\tau}\hat{X}_d$, donc dans leur limite projective; si X est séparé l'application est injective et si X est séparé complet elle est bijective d'après le

Lemme 6. *Le morphisme $X \to \varprojlim_{d\in H} \hat{X}_d$ est dense.*

La démonstration est facile et laissée au lecteur.

Si on désigne alors par ${}^{l}X$ l'image inverse de $\varprojlim_{d\in H} {}^{\varphi\tau}\hat{X}_d$ par l'application $X \to \varprojlim_{d\in H} {}^{\varphi\tau}\hat{X}_d$, on définit un foncteur l adjoint à droite du foncteur d'inclusion de la catégorie des espaces uniformes quasi-fins dans celle des espaces uniformes et ce foncteur commute avec les foncteurs «séparé» et «séparé complété»: en particulier, pour que X soit complet, il faut et suffit que ${}^{l}X$ le soit.

Une autre propriété importante du foncteur l est de conserver certaines notions de paracompacité; de façon précise:

Proposition 14. *Pour qu'un espace uniforme X soit de caractère paracompact, il faut et il suffit que ${}^{l}X$ le soit.*

Il est clair que si X est de caractère paracompact, ${}^{l}X$ l'est aussi. Pour voir la réciproque, il suffit de voir que pour toute famille uniformément discrète $\mathfrak{S}$ de ${}^{l}X$, il existe une suite $\mathfrak{S}_n$ de familles uniformément discrètes de X plus fines que $\mathfrak{S}$ telle que la somme des $\mathfrak{S}_n$ recouvre le même ensemble que $\mathfrak{S}$. On sait qu'il existe un écart uniformément continu d

sur X tel que $\mathfrak{S}$ soit uniformément discrète dans ${}^{l}X_d$; il existe donc un entourage ouvert V de ${}^{l}X_d$, tel que si $\mathfrak{S}$ est la famille $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$, la famille $(V(X_\alpha))_{\alpha\in A}$ soit encore uniformément discrète dans ${}^{l}X_d$. Or cette dernière famille est ouverte dans X_d, qui, étant écartisable, est de caractère paracompact d'après la proposition 5 de la première partie. Il existe donc une suite $\mathfrak{S}_n'$ de familles uniformément discrètes de X_d, donc de X, plus fines que la famille $(V(X_\alpha))_{\alpha\in A}$, telle que la somme des $\mathfrak{S}_n'$ recouvre l'ensemble $\bigcup_{\alpha\in A} V(X_\alpha)$. Si $\mathfrak{S}_n$ désigne alors la trace de $\mathfrak{S}_n'$ sur $\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$, la suite $\mathfrak{S}_n$ répond bien à la question; le seul point à vérifier est qu'elle est plus fine que $\mathfrak{S}$, ce qui résulte du fait que les ensembles $V(X_\alpha)$ sont disjoints.

Enfin, l'intérêt essentiel des espaces quasi-fins réside dans la proposition suivante:

Proposition 15. *Toute espace uniforme quasi-fin possède un système fondamental de recouvrements uniformes qui soient uniformément localement finis.*

Rappelons qu'une famille $\mathfrak{S}$ est dite uniformément localement finie s'il existe un recouvrement uniforme $\mathfrak{R}$ tel que $\mathfrak{S}$ soit finie au dessus de tout ensemble de $\mathfrak{R}$. Par limites projectives on se ramène à vérifier la propriété pour les espaces du type ${}^{\varphi\tau}M$, où M est un espace métrique complet; or on sait que si X est un espace topologique paracompact, l'espace uniforme ${}^{\varphi}X$ la vérifie.

6. Le jeu de l'espace métrique complet. Voici un jeu qui se joue à deux dans les espaces uniformes. X étant un espace uniforme, les deux joueurs α et β choisissent, chacun à leur tour, un entourage de X façon que le carré de l'entourage choisi soit contenu dans l'entourage précédemment choisi par l'autre joueur. Le jeu met donc en évidence deux suites (U_n) et (V_n) d'entourages telles que l'on ait $\overset{2}{V}_n \subset U_n$ et $\overset{2}{U}_{n+1} \subset V_n$. On considère que le joueur α gagne si l'espace uniforme écartisable défini par les U_n (ou les V_n) est complet.

Définition 5. On dit que l'espace uniforme X est *procomplet* s'il existe une stratégie gagnante pour le joueur α (supposé complètement informé).

Proposition 16. *Pour qu'un espace uniforme X soit procomplet, il faut que l'espace séparé associé $X^{\bullet}$ soit limite d'un système projectif (X_ι) dénombrablement filtrant d'espaces métriques complets, avec des morphismes $X^{\bullet} \to X_\iota$ surjectifs.*

Il est en effet clair que si X est procomplet et si on dit qu'un écart uniformément continu d est complétant lorsque l'espace uniforme écartisable X_d est complet, que pour tout écart uniformément continu d, il en existe un complétant plus fin, et que, si d_n est une suite d'écarts uniformément continus complétants, il en existe un autre qui les domine tous. Par suite, on a $X^{\bullet} = \varprojlim_{d \in K} X_d^{\bullet}$, où K est l'ensemble dénombrablement filtrant des écarts uniformément continus complétants sur X; les $X_d^{\bullet}$ sont métriques complets et les morphismes $X^{\bullet} \to X_d^{\bullet}$ surjectifs.

Proposition 17. *Pour qu'un espace uniforme X soit procomplet, il suffit que l'espace $X^{\bullet}$ soit limite d'un système projectif filtrant (X_ι) d'espaces métriques complets tel que pour toute suite croissante ι_n d'indices, le morphisme de $X^{\bullet}$ dans l'espace $\varprojlim X_{\iota_n}$ soit surjectif.*

Nous allons décrire une stratégie gagnante pour le joueur α. Ce dernier, au lieu de choisir seulement un entourage U_n, choisira un couple (ι_n, U_n), où U_n est un entourage de X_{ι_n}, de façon que $\iota_n \geqslant \iota_{n-1}$ et que si (x, y) appartient à U_n, son image dans $X_{\iota_{n-p}} \times X_{\iota_{n-p}}$ soit telle que la distance de X_{ι_n} y prenne une valeur inférieure à 2^{-p}, et cela pour tout $p < n$. Si alors X_1 désigne l'espace uniforme écartisable défini par les U_n (ou les V_n), il est immédiat que le morphisme $X_1 \to \varprojlim X_{\iota_n}$ identifie X_1 à l'image réciproque de $\varprojlim X_{\iota_n}$. Il est surjectif et l'on obtient en séparant un isomorphisme $X_p^{\bullet} \xrightarrow{\sim} \varprojlim X_{\iota_n}$. Comme toute limite projective d'espaces uniformes séparés complets est complète, $X_1^{\bullet}$ l'est, donc aussi X_1.

On peut remarquer que les hypothèses reviennent à supposer que X possède un système fondamental d'écarts uniformément continus complétants et que si d_n est une suite d'écarts uniformément continus complétants tels que $d_n \leqslant 1$, l'écart uniformément continu $\sum 2^{-n} d_n$ (ou $\sup(2^{-n} d_n)$) est complétant.

La proposition 17 montre, en particulier, que tout produit d'espaces métriques complets est procomplet; de même tout espace compact: en effet, si X est compact, pour tout écart uniformément continu d, $X_d^{\bullet}$ est compact, donc complet, et tout morphisme $X \to \varprojlim X_{d_n}^{\bullet}$ étant dense et d'image compacte est surjectif. On prouve de même que tout espace uniformément localement compact est procomplet. D'autre part, notons le résultat suivant qui englobe certains résultats bien connus:

Proposition 18. *Tout espace uniforme procomplet est de Baire.*

Cela résulte simplement du fait que si X est un espace uniforme procomplet, l'espace topologique ${}^{\tau}X$ est α-fortement favorable au sens de G. Choquet [3].

On en déduit immédiatement le

Corollaire 6. *Soit $f: E \to F$ un épimorphisme d'espaces vectoriels topologiques localement convexes. Si E est recouvert par les images continues d'une suite d'espaces de Fréchet et si F est procomplet, alors f est strict.*

Nous allons maintenant étudier comment le caractère procomplet se comporte vis à vis du foncteur l.

Proposition 19. *Soient X un espace uniforme et Y un espace uniforme ayant même ensemble sous-jacent, compris entre X et ${}^{l}X$. Pour que Y soit procomplet, il faut et il suffit que X le soit.*

Montrons d'abord la condition suffisante. En plus des joueurs α et β qui choisissent respectivement des entourages U_n et V_n de Y, nous allons placer, pour compléter la table, deux joueurs α_1 et β_1 qui choisiront respectivement des entourages Z_n et W_n de X. Les quatre joueurs jouent dans l'ordre $\alpha, \beta, \beta_1, \alpha_1, \alpha$, et de la façon suivante:

β choisit un entourage V_n de Y tel que $\overset{2}{V}_n \subset U_n$;

β_1 choisit un couple (d_n, W_n) où d_n est un écart uniformément continu sur X tel que V_n soit un entourage de ${}^{l}X_{d_n}$, que $d_n(x, y) < 1$ entraîne $d_{n-p}(x, y) < 2^{-p}$ pour tout $p < n$, et, si W_n est l'ensemble des couples (x, y) tels que $d_n(x, y) < 1$, que l'on ait: $W_n^2 \subset Z_n$;

α_1 choisit un entourage Z_{n+1} de X tel que $Z_{n+1}^2 \subset W_n$;

α choisit un entourage U_{n+1} de Y tel que $U_{n+1}^2 \subset Z_{n+1} \cap V_n$.

Le joueur α_1 joue donc contre le joueur β_1 et comme X est procomplet, il fait en sorte que l'espace uniforme écartisable X_1 défini par les W_n (ou les Z_n) soit complet. Or X_1 est isomorphe à l'espace $\varprojlim X_{d_n}$; par suite, les U_n et les V_n sont des entourages de ${}^{l}X_1$. L'espace uniforme écartisable défini par les U_n (ou les V_n), étant compris entre X_1 et ${}^{l}X_1$, est donc complet.

Voyons maintenant la condition nécessaire. Cette fois-ci, α et β choisissent respectivement des entourages U_n et V_n de X et on introduit deux autres joueurs α_1 et β_1 qui choisissent respectivement des entourages Z_n et W_n de Y. Ils jouent dans le même ordre que précédemment.

β choisit un entourage V_n de X tel que $\overset{2}{V}_n \subset U_n$;

β_1 choisit un entourage W_n de Y tel que $W_n^2 \subset U_n \cap Z_n$;

α_1 choisit un entourage Z_{n+1} de Y tel que $Z_{n+1}^2 \subset W_n$;

α choisit un couple (d_n, U_n), où d_n est un écart uniformément continu sur X tel que Z_n soit un entourage de ${}^{l}X_{d_n}$, que $d_n(x, y) < 1$ entraîne $d_{n-p}(x, y) < 2^{-p}$ pour tout $p < n$, et, si U_n est l'ensemble de couples (x, y) tels que $d_n(x, y) < 1$, que l'on ait: $U_n^2 \subset V_n$.

α_1 joue contre β_1 dans Y; il fait en sorte que l'espace uniforme écartisable X_1 défini par les W_n (ou les Z_n) soit complet. Or, si X_2 désigne l'espace uniforme écartisable défini par les U_n (ou les V_n), il est clair que X_2 est isomorphe à l'espace $\varprojlim X_{d_n}$. Par suite, X_1 est compris entre X_2 et ${}^{l}X_2$; comme X_1 est complet, ${}^{l}X_1$ l'est aussi, donc ${}^{l}X_2$ qui lui est égal, et finalement X_2.

En particulier, si K est un espace métrique complet, tout espace uniforme compris entre X et ${}^{\varphi\tau}X$ $(= {}^{l}X)$ est procomplet.

En fait, nous nous placerons par la suite dans une situation légèrement plus compliquée. Nous aurons à considérer des épimorphismes d'espaces uniformes, autrement dit, des espaces fibrés. Nous dirons qu'un épimorphisme $f\colon X \to Y$ d'espaces uniformes est relativement procomplet s'il existe une stratégie gagnante pour α dans le jeu suivant: α et β choisissent toujours à tour de rôle des entourages U_n et V_n de X tels que $V_n^2 \subset U_n$ et $U_{n+1}^2 \subset V_n$, mais on considère que α est gagnant, si dans l'espace X_1 défini par les U_n, V_n, les fibres c'est-à-dire les ensembles $f^{-1}(y)$, où y parcourt Y, sont complètes. La proposition 8 s'étend aussitôt à ce nouveau cadre. De plus:

PROPOSITION 20. *Soit $f\colon X \to Y$ un épimorphisme relativement procomplet d'espaces uniformes. Pour tout monomorphisme $g\colon Z \to Y$, l'épimorphisme du produit fibré $X \underset{Y}{\pi} Z$ sur Y est relativement procomplet (stabilité par changements de base injectifs).*

La vérification est immédiate du fait qu'une base d'entourages de $X \underset{Y}{\pi} Z$ est constituée par les ensembles $W = \overset{-1}{f}(U) \underset{Y\times Y}{\pi} \overset{-1}{g}(V)$, où U est un entourage de X et V un entourage de Z, et que $\big((x, y), (x', y')\big) \in W$ équivaut à $(x, x') \in U$ et $y = y'$. La structure uniforme de Z ne joue aucun rôle dans cette affaire; on aurait pu prendre pour Y et Z des ensembles.

Il faut remarquer que la nouvelle situation généralise la précédente; en effet pour que X soit procomplet il faut et il suffit que pour tout espace Y réduit à un point, l'unique morphisme de X dans Y soit relativement procomplet. On a le résultat inverse suivant:

PROPOSITION 21. *Soient G un groupe topologique muni de sa structure uniforme droite (resp. gauche), H un sous-groupe de G et G/H l'espace homogène des classes à droite (resp. gauche) suivant H. Si H est procomplet, l'épimorphisme $G \to G/H$ est relativement procomplet.*

Il est immédiat de constater qu'au lieu de jouer sur l'ensemble de tous les entourages, on peut se contenter de jouer sur une base d'entourages; on pourra donc faire choisir aux joueurs des voisinages de l'unité. Tout résulte alors de ce que si V est un voisinage de l'unité dans H et U un voisinage de l'unité dans G prolongeant V, pour tout élément g de G et tout couple (h, k) de $H \times H$, $(kg)^{-1}hg \in U$ équivaut à $k^{-1}h \in V$.

7. Epimorphismes adaptés. Il est facile de voir que la catégorie des espaces uniformes possède des limites inductives quelconques et par conséquent des quotients; toutefois, le foncteur topologie sous-jacente n'y commutant en général pas, on est conduit, dans le cas particulier des quotients, à faire des hypothèses restrictives sur la relation d'équivalence.

DÉFINITION 6. Soient X, Y des espaces uniformes et f une application de X dans Y, on dit que f est *uniformément ouverte* si pour tout entourage V de X, il existe un entourage W de Y, tel que l'on ait pour tout $x \in X$:

$$f\big(V(x)\big) \supset W\big(f(x)\big).$$

On dit qu'une relation d'équivalence R dans un espace uniforme X est uniformément ouverte si l'épimorphisme canonique $X \to X/R$ est uniformément ouvert.

Remarquons que tout épimorphisme $X \to Y$ uniformément ouvert est strict, l'image par $f \times f$ d'un entourage de X étant un entourage de Y, l'étude des épimorphismes uniformément ouverts se ramène donc à celle des relations d'équivalence uniformément ouvertes.

PROPOSITION 22. *Soient X un espace uniforme, R une relation d'équivalence dans X, C le graphe de R dans $X \times X$, f l'épimorphisme canonique de X sur X/R; les conditions qui suivent sont équivalentes:*

(i) *R est uniformément ouverte.*

(ii) *Pour tout entourage V de X, il en existe un autre W tel que $CW \subset VC$.*

(iii) *Pour tout entourage V de X, il existe un écart uniformément continu d sur X tel que V soit un entourage de X_d et que pour tout couple (x, y) de $X \times X$, on ait:*

$$d(x, C_y) = d(C_x, y),$$

où C_x (resp. C_y) désigne la classe de x (resp. y).

Nous allons montrer l'équivalence des trois conditions en prouvant les implications successives: (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). On peut toujours se ramener au cas où V est l'ensemble des couples (x, y) de $X \times X$ tels que $d(x, y) < 1$. Il est alors immédiat que $CV = VC$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). D'après (ii), on peut construire une suite V_n d'entourages symétriques de X, contenus dans V, tels que: $C\overset{2}{V}_{n+1} \subset V_n C$. CV_nC est un ensemble saturé de $X \times X$; il définit donc un ensemble W_n de $X/R \times X/R$. Voyons que les W_n définissent sur X/R une structure uniforme rendant uniformément continue l'application $X \to X/R$; les W_n contiennent la diagonale, sont symétriques, puisque $\overset{-1}{\widehat{CV_nC}} = \overset{-1}{C}\,\overset{-1}{V_n}\,\overset{-1}{C} = CV_nC$, décroissent puisque $C\overset{2}{V}_{n+1}C \subset CV_nC$, et pour tout n, $\overset{-1}{f} \times \overset{-1}{f}(W_n) = CV_nC$ est un entourage de X. Le seul point délicat est la vérification de l'axiome (U'_{III}) de Bourbaki (voir [2]): or, comme $CV_{n+1}C$ est symétrique et contenu dans V_nC, il est aussi contenu dans $\overset{-1}{\widehat{V_nC}} = CV_n$; par suite:

$$\overset{2}{\widehat{CV_{n+2}C}} \subset (CV_{n+1})(V_{n+1}C) \subset CV_nC.$$

Enfin, il est immédiat que $f\big(V(x)\big) \supset W_1\big(f(x)\big)$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). On peut d'abord construire une suite V_n d'entourages de X telle que $V_n \subset V$ et $\overset{3}{V}_{n+1} \subset V_n$, et une suite W_n d'entourages de X/R

telle que $\overset{3}{W}_{n+1} \subset W_n$ et que pour tout $x \in X$, $f(V_n(x)) \supset W_n(f(x))$. On peut alors trouver, d'après [2], chap. 9, § 1, n° 4, un écart d_1 sur X tel que $(x, y) \in V_n$ entraîne $d_1(x, y) \leqslant 2^{-n}$ et un écart d_2 sur X/R tel que $(x, y) \in W_n$ entraîne $d_2(x, y) \leqslant 2^{-n}$ et $(x, y) \notin W_n$ entraîne $d_2(x, y) \geqslant 2^{-n}$. d_1 et d_2 sont alors uniformément continus et on voit facilement que $d_2(f(x), f(y)) \geqslant \frac{1}{4} d_1(x, C_y)$; en effet, par l'absurde, il existerait un entier n tel que $d_2(f(x), f(y)) < 2^{-n} < d_1(x, C_y)$; or la première inégalité entraîne $(f(x), f(y)) \in W_n$, d'où un y_1 équivalent à y tel que $y_1 \in V_n(x)$ et $d_1(x, C_y) \leqslant 2^{-n}$. L'écart $d = \sup(d_1, 4d_2 \circ (f \times f))$ convient.

Il est immédiat, par exemple d'après (i), qu'un épimorphisme uniformément ouvert est ouvert; par suite, si R est une relation d'équivalence uniformément ouverte dans un espace uniforme X, les espaces topologiques ${}^{\tau}(X/R)$ et $({}^{\tau}X)/R$ sont isomorphes.

L'exemple le plus simple de relation d'équivalence uniformément ouverte est la relation d'équivalence gauche (resp. droite) définie par un sous-groupe H d'un groupe topologique G muni de sa structure uniforme gauche (resp. droite). Ces relations permettent de généraliser certains résultats connus dans le cas des groupes; par exemple, comme on le verra plus tard dans un cadre plus général, tout quotient d'un espace uniforme métrisable et complet par une relation d'équivalence uniformément ouverte est métrisable et complet. Toutefois ces relations ne sont pas suffisamment stables; en particulier si R est uniformément ouverte dans X, elle ne l'est général pas dans ${}^{l}X$. Nous sommes conduits à étudier des relations plus générales.

Définition 7. Soit $f\colon X \to Y$ un épimorphisme d'espaces uniformes; on dit qu'une partie T de X est un *tube*, s'il existe une partie A de X telle que $f(A) = Y$, et un entourage V de X tel que T contienne $V(A)$.

Définition 8. Soit $f\colon X \to Y$ un épimorphisme d'espaces uniformes, on dit que f est *adapté* si l'image de tout recouvrement uniforme d'un tube de X est un recouvrement uniforme de Y.

En particulier, l'image de tout recouvrement uniforme de X est un recouvrement uniforme de Y, de sorte tout épimorphisme adapté est strict. On dira qu'une relation d'équivalence R dans un espace uniforme X, est adaptée si l'épimorphisme canonique $X \to X/R$ l'est.

Remarquons que dire que l'épimorphisme $f\colon X \to Y$ est adapté équivaut à dire que pour tout entourage V de X et toute partie A de X telle que $f(A) = Y$, la famille $(f(V(x)))_{x \in A}$ est un recouvrement uniforme. Sous cette forme, il est immédiat de voir que tout épimorphisme uniformément ouvert est adapté. Nous aurons besoin enfin de la caractérisation suivante, dans laquelle $A \Subset B$ signifie qu'il existe un entourage V tel que $A \subset V(B)$.

Proposition 23. *Soit $f\colon X \to Y$ un épimorphisme d'espaces uniformes; pour que f soit adapté, il faut et il suffit que si A, B sont deux parties de X telles que $B \Subset A$ et C une partie de Y telle que $C \Subset f(B)$, alors l'image de tout recouvrement uniforme de A est un recouvrement uniforme de C.*

La définition correspondant au cas particulier où $C = Y$; il suffit de voir que si f est adapté, la propriété citée est vérifiée. Posons $D = B \cup \overset{-1}{f}(\complement f(B))$ et choisissons E dans Y de façon que $C \Subset E \Subset f(B)$. Il est clair que $f(D) = Y$ et que $D \Subset F = A \cup \overset{-1}{f}(\complement E)$, de sorte que F est un tube. Soit alors $\mathfrak{R}$ un recouvrement uniforme de A, prolongeons $\mathfrak{R}$ à F en $\mathfrak{R}'$ par adjonction de $\overset{-1}{f}(\complement C) \cap F$. $\mathfrak{R}'$ est un recouvrement uniforme de F; son image est un recouvrement uniforme de Y, donc la restriction à C coincide avec l'image de R, laquelle est un recouvrement uniforme de C.

Proposition 24. *Soit $f\colon X \to Y$ est épimorphisme adapté. Pour tout morphisme $g\colon Z \to Y$, le morphisme $f \underset{Y}{\pi} g$ du produit fibré $X \underset{Y}{\pi} Z$ dans Y est un épimorphisme adapté (stabilité par changement de base).*

Tout résulte de ce que si V (resp. W) est un entourage de X (resp. Z), on a:

$$\mathrm{pr}_2((V \times W)(x, y)) = W(y) \cap \overset{-1}{g}(f(V(x))).$$

Signalons enfin un exemple important pour la suite d'épimorphisme adapté. Soit $f\colon X \to Y$ un épimorphisme ouvert d'espaces topologiques; si Y est paracompact, l'épimorphisme ${}^{\varphi}f\colon {}^{\varphi}X \to {}^{\varphi}Y$ est adapté. En effet tout recouvrement ouvert de Y est uniforme dans ${}^{\varphi}Y$. On voit donc que dans le cas des relations d'équivalence ouvertes, l'hypothèse «adapté» est nécessaire pour obtenir la paracompacité de l'espace quotient, on verra qu'elle est, dans certains cas, suffisante.

8. Résultats fondamentaux. Pour énoncer le théorème qui nous préoccupe sous sa forme la plus générale, nous allons encore être obligés de faire appel à la théorie des jeux. Soit $f\colon X \to Y$ un épimorphisme d'espaces uniformes. Le joueur α (resp. β) choisit un couple (U_n, V_n) (resp. (U'_n, V'_n)), où U_n (resp. U'_n) est un entourage de X et V_n (resp. V'_n) de Y, avec $U_n \subset \overset{-1}{\widehat{f \times f}}(V_n)$ (resp. $U'_n \subset \overset{-1}{\widehat{f \times f}}(V'_n)$), de façon que l'on ait:

$$U'^2_n \subset U_n, \quad V'^2_n \subset V_n, \quad U^2_{n+1} \subset U'_n \quad \text{et} \quad V^2_{n+1} \subset V'_n.$$

Les U_n et les U'_n définissent sur X une structure uniforme écartisable X_1 et de même les V_n et les V'_n une structure Y_1 sur Y. Les conditions imposées font que f est encore un épimorphisme de X sur Y_1.

Proposition 25. *Avec les notations qui précèdent, si f est adapté et Y quasi-fin, il existe pour le joueur α une stratégie assurant que l'épimorphisme $X_1 \to Y_1$ ait les propriétés suivantes:*

1° *$X_1 \to Y_1$ est strict et $\hat{X}_1 \to \hat{Y}_1$, surjectif.*

2° *Si f est relativement procomplet, il existe une partie A de X telle que $f(A) = Y$ et que pour tout entourage U de X_1, il existe un entourage V de Y_1 assurant que:*

a) *pour tout $x \in A$, $f\big(U(x)\big) \supset V\big(f(x)\big)$,*
b) *au-dessus de tout ensemble petit d'ordre V, A est réunion finie d'ensembles petits d'ordre U.*

En outre l'épimorphisme ${}^{\tau}X_1 \to {}^{\tau}Y_1$ est strict.

Pour démonter cette proposition, on préfèrera utiliser des recouvrements uniformes plutôt que des entourages; rappelons que, si $\mathfrak{R} = (U_i)_{i \in I}$ et $\mathfrak{S} = (V_j)_{j \in J}$ sont deux familles de parties d'un ensemble X, on désigne par $\mathfrak{S} \ast \mathfrak{R}$ la famille $(W_i)_{i \in I}$, où W_i est la réunion des V_j qui rencontrent U_i. La famille $\mathfrak{R} \ast \mathfrak{R}$ sera notée simplement $\mathfrak{R}^2$; de même $\mathfrak{R} \ast x$ désignera l'unique ensemble de $\mathfrak{R} \ast \mathfrak{S}$, où $\mathfrak{S}$ est réduite au seul ensemble $\{x\}$. D'autre part, si f est une application d'un ensemble X dans un ensemble Y, $\mathfrak{R}$ une famille de parties de X, $\mathfrak{S}$ une famille de parties de Y, on désignera par $E_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$ l'ensemble des points x de X tels que $f(\mathfrak{R} \ast x)$ contienne $\mathfrak{S} \ast f(x)$. Cela étant dit, énonçons deux lemmes préliminaires:

Lemme 7. *Si F: $X \to Y$ est un èpimorphisme adapté d'espaces uniformes, pour tout tube A et tout recouvrement uniforme $\mathfrak{R}$ de X, il existe un recouvrement uniforme $\mathfrak{S}$ de Y tel que $B = A \cap E_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$ soit un tube.*

Voyons d'abord que $A \cap E_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$ rencontre toutes les classes dès que $\mathfrak{S}^2$ est plus fin que $f(\mathfrak{R} \upharpoonright A)$, où $\mathfrak{R} \upharpoonright A$ désigne la trace de $\mathfrak{R}$ sur A: pour tout point y de Y, il existe un ensemble C de $\mathfrak{S}$ contenant y et un ensemble D de $\mathfrak{R} \upharpoonright A$ tel que $\mathfrak{S} \ast y$ soit contenu dans $f(D)$; en particulier, y est l'image d'au moins un élément x de D, donc de A, pour lequel $f(\mathfrak{R} \ast x)$ contient $f(D)$ donc $\mathfrak{S} \ast y$, ce qui montre que $\overset{-1}{f}(y) \cap B$ est non vide. Par suite $A \cap E_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$ est un tube dès que $\mathfrak{S}^4$ est plus fin que $f(\mathfrak{R}' \upharpoonright A')$, où $\mathfrak{R}'$ est tel que $\mathfrak{R}'^2 \Subset \mathfrak{R}$ et A' un tube tel que $A' \Subset A$; on a en effet l'inclusion: $E_{\mathfrak{R}^2,\mathfrak{S}} \supset \big(\mathfrak{R} \cap \overset{-1}{f}(\mathfrak{S})\big) \ast E_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}^2}$. Si l'on y remplace R par R', on en déduit l'inclusion uniforme: $A' \cap E_{\mathfrak{R}',\mathfrak{S}^2} \Subset A \cap E_{\mathfrak{R},\mathfrak{S}}$, qui, compte tenu de ce que le premier terme rencontre toutes les classes, montre que le second est un tube. Le lemme résulte alors de ce que f est adapté.

Lemme 8. *Si f: $X \to Y$ est un épimorphisme adapté d'espaces uniformes et si Y est quasi-fin, pour tube A et tout recouvrement uniforme $\mathfrak{R}$ de X, il existe un tube B contenu dans A et un recouvrement uniforme $\mathfrak{S}$ de Y tel qu'au-dessus de tout ensemble de $\mathfrak{S}$, B soit contenu dans une réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{R}$.*

Choisissons d'abord un recouvrement uniforme $\mathfrak{R}'$ de X et un tube $A' \Subset A$ tels que $\mathfrak{R}' \ast (\mathfrak{R}' \upharpoonright A')$ soit plus fin que $\mathfrak{R} \upharpoonright A$, puis un recouvrement uniforme $(V_\iota)_{\iota \in I}$ de Y qui soit uniformément localement fini et plus fin que $f(\mathfrak{R}' \upharpoonright A')$; il existe un recouvrement uniforme $\mathfrak{S}$ de Y tel que tout ensemble de $\mathfrak{S}^2$ ne rencontre qu'un nombre fini de V_ι. Choisissons maintenant pour tout $\iota \in I$, un ensemble U_ι de $\mathfrak{R}' \upharpoonright A'$ tel que $f(U_\iota)$ contienne V_ι. Il est clair que la réunion B des $(\mathfrak{R}' \ast U_\iota) \cap \overset{-1}{f}(\mathfrak{S} \ast V_\iota)$, sous réserve qu'elle soit un tube, vérifie les conditions du lemme. Or, la réunion B' des $U_\iota \cap \overset{-1}{f}(V_\iota)$ rencontre toutes les classes et B contient $\big(\mathfrak{R}' \cap \overset{-1}{f}(\mathfrak{S})\big) \ast B'$.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition. En termes de recouvrements, le joueur α (resp. β) choisira un couple $(\mathfrak{R}_n, \mathfrak{S}_n)$ (resp. $\mathfrak{R}'_n$, $\mathfrak{S}'_n$), où $\mathfrak{R}'_n$, (resp. $\mathfrak{R}'_n$) est un recouvrement uniforme de X et $\mathfrak{S}_n$ (resp. $\mathfrak{S}'_n$) un recouvrement uniforme de Y avec les conditions:

$$\mathfrak{R}_n \subset \overset{-1}{f}(\mathfrak{S}_n)\,, \quad \mathfrak{R}'_n \subset \overset{-1}{f}(\mathfrak{S}'_n)\,, \quad \mathfrak{R}'^2_n \subset \mathfrak{R}_n\,, \quad \mathfrak{S}'^2_n \subset \mathfrak{S}^2_n\,, \quad \mathfrak{R}^2_{n+1} \subset \mathfrak{R}'^2_n \quad \text{et } \mathfrak{S}^2_{n+1} \subset \mathfrak{S}'^2_n\,.$$

La stratégie pour le joueur α consistera seulement à choisir en même temps que $\mathfrak{R}_n$ et $\mathfrak{S}_n$ un tube A_n de façon que $A_0 = X$ et que pour $n \geqslant 1$, on ait: $A_n \Subset A_{n-1} \cap E_{\mathfrak{R}_n,\mathfrak{S}_n}$ et qu'au-dessus de tout ensemble de $\mathfrak{S}_n$, A_n soit contenu dans une réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{R}_n$, ce qui est possible, d'après les lemmes qui précèdent. Du fait que l'on a $f(\mathfrak{R}_n \ast x) \supset \mathfrak{S}_n \ast f(x)$ pour tout x de A_n, l'image d'un recouvrement uniforme de X_1 est un recouvrement uniforme de Y_1 de sorte que le morphisme $X_1 \to Y_1$ est un épimorphisme strict. D'autre part, si (y_n) est une suite de Cauchy de Y_1 et si on relève y_n en x_n dans A_n, on voit immédiatement que la suite (x_n) est précompacte dans X_1, donc contient une sous-suite de Cauchy, ce qui montre que le morphisme $\hat{X}_1 \to \hat{Y}_1$ est surjectif. Si maintenant on suppose en outre que f est relativement procomplet, on peut toujours supposer, en intercalant au besoin un troisième joueur, que les fibres suivant f sont complètes dans X_1. Dans ces conditions, l'intersection A des A_n rencontre toutes les fibres puisque, pour toute fibre $\overset{-1}{f}(y)$, $A \cap \overset{-1}{f}(y)$ est l'adhérence du filtre précompact défini par la suite $A_n \cap \overset{-1}{f}(y)$. Les propriétés a) et b) sont alors trivialement vérifiées; montrons alors que l'épimorphisme ${}^{\tau}X_1 \to {}^{\tau}Y_1$ est strict: soit O un ouvert saturé dans X; voyons que $f(O)$ est voisinage de tout $y \in f(O)$; prenons un point quelconque x de $A \cap f^{-1}(y)$ et un entourage U de X_1 tel que O contienne $U(x)$; il résulte alors de a) que $f(O)$ contient $V(y)$ pour un certain entourage V de Y_1.

Corollaire 7. *Soit $f\colon X \to Y$ un épimorphisme adapté relativement procomplet d'espaces uniformes. Si X est procomplet, Y l'est aussi.*

D'abord, grâce aux propositions 19, 20 et 24, on peut se ramener au cas où Y est quasi-fin, par le changement de base ${}^{l}Y \to Y$. Dans ces conditions le corollaire 7 est une conséquence immédiate de la proposition 25, 1°, car si X_1 est complet, Y_1 l'est alors aussi.

Corollaire 8. *Soient G un groupe topologique procomplet et H un sous-groupe procomplet de G; dans ces conditions, l'espace homogène G/H est procomplet.*

Cet énoncé est une conséquence immédiate du précédent et de la proposition 21. Ce dernier résultat permet de voir que, partant d'une catégorie d'espaces vectoriels topologiques procomplets, par exemple celle des espaces de Fréchet, la plus petite catégorie pleine contenant cette dernière qui soit stable par produits quelconques (ou même les limites projectives de la proposition 17) et par quotients, est composée d'espaces procomplets, donc d'espaces de Baire.

Corollaire 9. (G. Choquet). *Soient X un espace métrique complet, et R une relation d'équivalence ouverte dans X telle que $({}^{\tau}X)/R$ soit paracompact; dans ces conditions $({}^{\tau}X)/R$ est homéomorphe à un espace métrique complet.*

On a vu que l'épimorphisme ${}^{\varphi}X \to {}^{\varphi}\big(({}^{\tau}X)/R\big)$ était adapté, et il est immédiat qu'il est relativement procomplet. On peut alors appliquer les résultats de la proposition 25 où l'on aura fait jouer β de façon que X_1 ait une structure plus fine que X. Or ${}^{\tau}X_1 \to {}^{\tau}Y_1$ est strict et par suite ${}^{\tau}Y_1$ est isomorphe à $({}^{\tau}X)/R$. Enfin, X_1 étant complet, Y_1 l'est, ce qui montre l'assertion.

Nous allons donner maintenant une conséquence moins directe de la proposition 25.

Proposition 26. *Soit $f\colon X \to Y$ un épimorphisme adapté relativement procomplet d'espaces uniformes. Si X est de caractère paracompact, Y l'est aussi.*

On peut toujours se ramener, d'après les propositions 14, 20 et 24, au cas où l'espace Y est quasi-fin. Cela étant, considérons un recouvrement ouvert $\mathfrak{R}$ de Y. $\overset{-1}{f}(\mathfrak{R})$ est un recouvrement ouvert de X, et, puisque ce dernier est de caractère paracompact, il existe dans X, une suite $\mathfrak{S}_n$ de familles uniformément discrètes plus fines que $\overset{-1}{f}(\mathfrak{R})$ dont la réunion recouvre X. On peut toujours demander au joueur β de choisir l'entourage U'_n de façon que $U'_n(X_{n,\alpha}) \cap U'_n(X_{n,\beta}) \neq \emptyset$ entraîne $\alpha = \beta$, si $\mathfrak{S}_n$ est la famille $(X_{n,\alpha})_{\alpha \in A_n}$. Si l'on considère alors la partie A de la proposition 25, il résulte de la condition b) que la famille $f(\mathfrak{S}_n \upharpoonright A)$ est uniformément localement finie. Comme chacune est plus fine que $\mathfrak{R}$ et que leur réunion lorsque n varie recouvre $f(A) = Y$, tout résulte du

Lemme 9. *Pour qu'un espace uniforme X soit de caractère paracompact, il faut et il suffit que pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{R}$, il existe une suite $\mathfrak{S}_n$ dont la réunion recouvre X de familles uniformément localement finies plus fines que $\mathfrak{R}$.*

En effet, il est d'abord clair que la condition est réalisée lorsque X est de caractère paracompact. Supposons donc la condition et montrons que X est de caractère paracompact. Soit $\mathfrak{R}_n$ un recouvrement uniforme de X tel que $\mathfrak{S}_n$ soit finie sur chaque ensemble de $\mathfrak{R}_n$. On peut trouver une suite $(\mathfrak{S}_{n,p})_{p \in N}$ dont la réunion recouvre X de familles uniformément discrètes plus fines que $\mathfrak{R}_n$; il suffit de considérer pour cela un écart uniformément continu pour lequel $\mathfrak{R}_n$ est un recouvrement uniforme, et d'appliquer la proposition 5. $\mathfrak{S}_n$ est alors finie sur chaque ensemble A de $\mathfrak{S}_{n,p}$; soit $c_{n,p}(A)$ le cardinal fini ainsi défini. Pour tout entier r, si $\mathfrak{S}_{n,p,r}$ est la famille des A de $\mathfrak{S}_{n,p}$ tels que $c_{n,p}(A) = r$, il est clair que la famille des intersections d'ensembles de $\mathfrak{S}_n$ et de $\mathfrak{S}_{n,p,r}$ est réunion de r familles uniformément discrètes, la démonstration s'achève aussitôt.

Corollaire 10. *Soient G un groupe topologique de caractère paracompact et H un sous-groupe procomplet de G; dans ces conditions, l'espace homogène G/H est de caractère paracompact.*

Ce résultat découle directement des propositions 21 et 26.

Théorème 2. *Soit $(\mathfrak{M})$ une sous-catégorie pleine de la catégorie des groupes abéliens topologiques, stable par produits finis, et dont les objets soient complètement paracompacts; soit $(\mathfrak{P})$ la plus petite sous-catégorie pleine contenant $(\mathfrak{M})$ qui soit stable par images réciproques, limites projectives dénombrables, réunions dénombrables (donc en particulier limites inductives strictes de suites) et quotients par des sous-groupes procomplets. Alors tous les objets de $(\mathfrak{P})$ sont complètement paracompacts et ont en particulier une topologie paracompacte.*

La seule opération nouvelle par rapport au théorème 1 est le quotient par un sous-groupe procomplet; il faut voir qu'un produit fini de tels quotients est le quotient d'un produit fini par un sous-groupe procomplet du produit, ce qui est immédiat parce $\prod_{i \in I}(G_i/H_i)$ est isomorphe à $(\prod_{i \in I} G_i)/(\prod_{i \in I} H_i)$ (voir [2], chap. 3, § 2, n° 9, corollaire de la proposition 26). Enfin, la stabilité par ces quotients de la complète paracompacité se ramène aussitôt à celle du caractère paracompact, laquelle est assurée par le corollaire 10.

Il faut remarquer que le théorème 1 assurait la paracompacité des espaces LF stricts, mais que le théorème ne permet pas d'améliorer ce résultat, le quotient d'un LF strict par un sous-espace de type F, ou se qui revient au même par un sous-espace fermé procomplet, étant lui-même un LF strict. Le problème de la paracompacité des espaces LF non stricts reste ouvert.

Signalons d'autre part qu'on aurait pu introduire une notion de paracompacité plus forte que le caractère paracompact et qui aurait été, de façon évidente, stable par quotients pour des relations d'équivalence uniformément ouvertes, à savoir la suivante: pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{R}$, il existe un écart uniformément continu et un recouvrement ouvert pour cet écart qui soit plus fin que $\mathfrak{R}$. Malheureusement, cette notion n'est pas stable par limites inductives strictes de suites; en effet, si M est un espace métrique non séparable (par exemple un ensemble discret non dénombrable), la limite inductive de la suite $(M\times \mathbf{R}^n)$ ne vérifie pas la condition indiquée.

Travaux cités

[1] Michael Artin, *Grothendieck topologies*, Notes on a seminar, Spring 1962. — Cambridge, Harvard University, Department of Mathematics, 1962 (multigr.).

[2] Nicolas Bourbaki, *Topologie générale*. Paris, Hermann 1949-1962.

[3] Gustave Choquet, *G_δ absolus; applications ouvertes ou fermées et jeux topologiques* 2.

[4] S. Guisburg and S. R. Isbell, *Some operators on uniform spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), p. 145-148.

[5] Jean Giraud, *Analysis situs*, Séminaire Bourbaki, t. 15, 1962/63, n° 256, 11 p.

[6] Ernest Michael, *Another note on paracompact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), p. 822-828.

[7] Gabriel Mokobodzki, *Nouvelle méthode pour démontrer la paracompacité des espaces métrisables*, Ann. Inst. Fourier 14 (1964), p. 539-542.

[8] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bulletin de la S.M.F. 90 (1962), p. 323-448.

[9] Barry Mitchell, *Theory of categories*, Academic Press, New York and London, 1965.

Reçu par la Rédaction le 12. 11. 1966

Light fiber maps *

by

Gerald S. Ungar** (Baton Rouge, La.)

1. Introduction. Most of the literature which deals with fiber maps assumes that the fibers have some nice connectivity properties. These assumptions force the most interesting light fiber maps to be overlooked. In this paper, light fiber maps are studied with two purposes in mind. The first purpose is to obtain methods for handling more general mappings. The second purpose is that the study of light fiber maps might yield a method of attacking the following unsolved problems involving light open mappings:

I. *Does there exist a light open mapping of a manifold onto a metric space such that the inverse of some point is uncountable?*

II. *Is there a light open mapping f which is not a homeomorphism of the n cube I^n onto itself such that f is the identity on the boundary of $I^n(\mathrm{brdy}\, I^n)$ and $f^{-1}f(\mathrm{brdy}\, I^n) = \mathrm{brdy}\, I^n$?*

If the answer to I is no, then a p-adic group cannot act freely on an n-manifold.

It is shown in Section 3 that there are no Serre fibrations with the properties of I or II. Hence, a method of attacking these problems might be the following: Assume that such a mapping exists and prove that it must be a fibration.

The main theorem of this paper is: *If f is a light compact mapping from a space X onto a space Y such that paths could be lifted uniquely, given the initial endpoint of the lifting then f has the absolute covering homotopy property.* This gives a partial answer to the following conjecture raised by the author: *If f is a light mappings from a space X onto a space Y such that paths could be lifted given the initial endpoint of the lifting and such that arcs could be lifted uniquely given the initial endpoint of the lifting then f is a Serre fibration.*

---

* The author wishes to express his gratitude to Professor Louis McAuley for his unlimited help and patience.

** Research supported by the academic year Extension of the Research Participation Program for College Teachers.