[15] H. H. Schneider, *A syntactical characterization of the predicate calculus with identity and the validity in all individual domains*, Portugaliae Math. 20 (1961), pp. 105-117.

[16] B. van Fraassen, *The completeness of free logic*, Z. Math. Logik Grundlagen Math. 12 (1966), pp. 219-234.

[17] — *Singular terms, truth-value gaps, and free logic*, J. of Philosophy 67 (1966), pp. 481-495.

TEMPLE UNIVERSITY
YALE UNIVERSITY

Reçu par la Rédaction le 2. 10. 1966

Über die Mächtigkeiten und Unabhängigkeitsgrade der Basen freier Algebren, I *

von

Peter Burmeister (Bonn)

C. J. Everett hat 1942 in [4] ein Kriterium angegeben, wann ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Ring Basen verschiedener Mächtigkeiten besitzt, und auch gleich ein Beispiel eines solchen Vektorraumes. B. Jónsson and A. Tarski haben 1956 in [6] ein solches Beispiel für eine andere Klasse von Algebren angegeben und eine Bedingung dafür aufgestellt, wann es in einer Klasse $\mathfrak{K}$ von Algebren keine $\mathfrak{K}$-frei erzeugten Algebren mit $\mathfrak{K}$-Basen verschiedener Mächtigkeiten geben kann. E. Marczewski hat dann gezeigt (vgl. [8]), daß für Algebren mit endlichstelligen Operationen, die Basen verschiedener Mächtigkeiten besitzen, diese Basismächtigkeiten eine arithmetische Folge bilden. Gleichzeitig warf er die Frage auf, welche arithmetischen Folgen dabei auftreten können. Diese wurde von A. Goetz und C. Ryll-Nardzewski in [5] teilweise und von S. Świerczkowski in [21] vollständig beantwortet für den Fall, daß man es mit Algebren mit endlichstelligen Operationen zu tun hat; dann ist nämlich jede arithmetische Folge „realisierbar", die nicht die Null enthält.

Zu einer primitiven Klasse $\mathfrak{A}$ von (partiellen) Algebren, die eine mindestens zweielementige Algebra enthält (d.h. die „nichttrivial" ist), bezeichne $\boldsymbol{F}(M,\mathfrak{A})$ die—durch die Mächtigkeit $|M|$ der Menge M bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte—von einer Menge M $\mathfrak{A}$-frei erzeugte $\mathfrak{A}$-Algebra. In der Klasse $\boldsymbol{K}$ aller Kardinalzahlen definieren wir dann zu $\mathfrak{A}$ eine Äquivalenzrelation $R_{\mathfrak{A}}$ vermöge

$$(1)\qquad (\mathfrak{m},\mathfrak{n})\in R_{\mathfrak{A}} \text{ genau dann, wenn } \boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})\cong\boldsymbol{F}(\mathfrak{n},\mathfrak{A}) \qquad (\text{für alle } \mathfrak{m},\mathfrak{n}\in\boldsymbol{K}).$$

* Die Resultate dieses ersten Teiles sind im wesentlichen schon in der Diplomarbeit des Verfassers enthalten, die im April 1965 an der Freien Universität Berlin eingereicht wurde. Unabhängig hiervon hat inzwischen G. Grätzer fast die gleichen Ergebnisse (d.h. eine etwas schwächere Form von Korollar 1 zum Hauptsatz der vorliegenden Arbeit bzw. zum Satz 4.14 der Diplomarbeit) ohne Beweis im Juni 1966 bei den Notices of the American Mathematical Society zur Ankündigung eingereicht (vgl. Notices Amer. Math. Soc. 13 (1966), Seite 632f). Vgl. Dissertation Bonn (D5) 1966, Teil I.

Dabei ist klar, daß ein Isomorphismus zwischen $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})$ und $\boldsymbol{F}(\mathfrak{n},\mathfrak{A})$ genau dann besteht, wenn z.B. $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A})$ $\mathfrak{A}$-Basen der Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ besitzt. Für diese Äquivalenzrelation $R_{\mathfrak{A}}$ hat J. Schmidt in [13] bewiesen, daß die totaladditiv ist. Ferner hat er gezeigt, daß die Klasse der Mächtigkeiten der Basen einer Algebra immer eine Restklasse einer geeigneten totaladditiven Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$ ist. Dabei warf er für beliebige Typen die beiden folgenden Probleme auf:

Problem 1. *Zu welchen totaladditiven Äquivalenzrelationen R in $\boldsymbol{K}$ gibt es eine nichttriviale primitive Klasse $\mathfrak{A}$, so daß $R = R_{\mathfrak{A}}$?*

Problem 2. *Welche Restklassen totaladditiver Äquivalenzrelationen in $\boldsymbol{K}$ treten als Klassen von Basismächtigkeiten geeigneter Algebren auf?*

Satz 1.2 zeigt nun, daß nur solche Äquivalenzrelationen R "algebraisch realisiert" werden können, deren Restklassen oberhalb einer Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ stets einelementig sind (wir wollen sagen, R sei durch $\mathfrak{m}$ "beschränkt"); insbesondere folgt daraus, daß die Restklasse der Null immer einelementig ist (vgl. auch J. Schmidt [13], Theorem 4).

Um zu zeigen, daß auch jede solche totaladditive Äquivalenzrelation auftritt, gehen wir aus, ähnlich wie Świerczkowski in [21], von der dort gegebenen Charakterisierung von Algebren mit verschieden mächtigen Basen durch die Existenz von Gleichungen zwischen gewissen algebraischen Operationen (Satz 1.3), indem wir nämlich auch die erforderlichen algebraischen Operationen als fundamentale vorgeben und primitive Klassen $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_\Gamma$ betrachten (§ 2), in denen solche Gleichungen gelten, daß bei gegebener Äquivalenzrelation R und bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{A}$ $R \subset R_{\mathfrak{A}}$ erreicht wird.

Anschließend wird durch genauere Untersuchung der Struktur der $\mathfrak{K}_\Gamma$-frei erzeugten $\mathfrak{K}_\Gamma$-Algebren gezeigt, daß sich untere Schranken für die Mächtigkeiten von Erzeugendensystemen angeben lassen (Satz 4.1), so daß sich auch $R_{\mathfrak{A}} \subset R$ beweisen läßt (§ 5).

Um dies zu erreichen, wird in § 2 eine axiomatische Kennzeichnung der $\mathfrak{K}_\Gamma$-frei erzeugten $\mathfrak{K}_\Gamma$-Algebren gegeben (Satz 2.2), die in § 3 dazu benutzt wird, zwei verschiedene "Abstandsdefinitionen" für die bei der Axiomatisierung auftretenden regulären und singulären Folgen vom Erzeugendensystem zu geben. Dabei ist wesentlich, daß der eine "Abstand" immer endlich bleibt (während der andere auch transfinite Ordinalzahlen annehmen kann). Durch geeignete Kombination der beiden "Abstände" kommt man schließlich zur Abschätzung der Mächtigkeit einer geeigneten Obermenge derjenigen Teilmenge der Basis M von $\boldsymbol{F}(M,\mathfrak{K}_\Gamma)$, die in der von einer Menge $N \subset \boldsymbol{F}(M,\mathfrak{K}_\Gamma)$ erzeugten Unteralgebra $\boldsymbol{C}N$ enthalten ist (vgl. Satz 3.2 und Satz 4.1). Ist diese Mächtigkeit kleiner als $|M|$, so kann N $\boldsymbol{F}(M,\mathfrak{K}_\Gamma)$ nicht erzeugen. Auf Satz 4.1 beruhen dann alle Schlüsse für unendliche Kardinalzahlen beim Beweis von $R_{\mathfrak{A}} \subset R$

(§ 5, Hauptsatz); für die Kardinalzahlen, die kleiner sind als $\aleph_0$, sind noch zusätzliche Überlegungen notwendig (Satz 4.2 und Satz 4.3). Aus der vollständigen Lösung von Problem 1 ergibt sich mit Hilfe von Satz 3.3 und seinen Korollaren unmittelbar die Lösung von Problem 2 (§ 5).

Herrn Professor Dr. Jürgen Schmidt möchte ich für die Anregung und Förderung dieser Arbeit ganz besonders danken.

§ 1. Vorbereitende Sätze. Unter einer *Algebra* $(A,(f_i)_{i\in I})$ *vom Typus* $(K_i)_{i\in I}$ verstehen wir eine Menge A mit nicht notwendig überall ausführbaren (d.h. partiellen) Operationen f_i vom Typus K_i $(i \in I)$ (d.h. Abbildungen von einer Teilmenge von A^{K_i} in A) (1). Algebren vom gleichen Typus heißen *ähnlich*; mehrere gleichzeitig betrachtete Algebren seien stets ähnlich. Eine primitive Klasse $\mathfrak{A}$ ist eine Klasse von Algebren, die gegenüber der Bildung homomorpher Bilder ($\boldsymbol{H}\mathfrak{A}$), Unteralgebren ($\boldsymbol{U}\mathfrak{A}$) und Produktalgebren ($\boldsymbol{P}\mathfrak{A}$) von Algebren aus $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist: $\boldsymbol{HUP}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Besteht $\mathfrak{A}$ nur aus höchstens einelementigen Algebren, so heißt die Klasse *trivial*.

Seien A und B zwei Algebren; die Teilmenge $M \subset A$ heißt *B-unabhängig* (*B-frei*), wenn sich jede B-Belegung von M homomorph auf die von M in A erzeugte Unteralgebra $\boldsymbol{C}M$ fortsetzen läßt. Die Klasse $\mathrm{ind}_A\, M := \{B \mid M \subset A \text{ ist } B\text{-frei}\}$ heißt *Unabhängigkeitsklasse* (auch: *Unabhängigkeitsgrad*) von M bezüglich A. Sei $\mathfrak{A}$ Klasse von Algebren: $M \subset A$ heißt *$\mathfrak{A}$-Basis der Algebra A*, wenn $\boldsymbol{C}M = A$ und $\mathfrak{A} \subset \mathrm{ind}_A\, M$, und *Basis*, wenn $\mathfrak{A} = \{A\}$. Ist $A \in \mathfrak{A}$ und $M \subset A$ $\mathfrak{A}$-Basis von A, so schreiben wir: $A =: \boldsymbol{F}(M,\mathfrak{A})$. Definiert man nun zu einer nichttrivialen primitiven Klasse $\mathfrak{A}$ eine Äquivalenzrelation $R_{\mathfrak{A}}$ auf der Klasse $\boldsymbol{K}$ aller Kardinalzahlen durch:

$$(1) \qquad (\mathfrak{m},\mathfrak{n}) \in R_{\mathfrak{A}} :\Longleftrightarrow \boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A}) \cong \boldsymbol{F}(\mathfrak{n},\mathfrak{A}) \qquad (\text{für alle } \mathfrak{m},\mathfrak{n} \in \boldsymbol{K}),$$

so gilt (vgl. J. Schmidt [12], Theorem 3 mit den Korollaren 1 bis 3):

Satz 1.1. *Für jede nichttriviale primitive Klasse $\mathfrak{A}$ ist $R_{\mathfrak{A}}$ eine totaladditive Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$ (d.h. für jede Menge T folgt aus $(\mathfrak{m}_t,\mathfrak{n}_t) \in R_{\mathfrak{A}}$ für alle $t \in T$ auch $\big(\sum_{t\in T}\mathfrak{m}_t, \sum_{t\in T}\mathfrak{n}_t\big) \in R_{\mathfrak{A}}$).*

Korollar 1. *Die natürlichen Zahlen n mit $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m},\mathfrak{A}) \cong \boldsymbol{F}(n,\mathfrak{A})$ bilden eine arithmetische Folge ($\mathfrak{m} \in \boldsymbol{K}$).*

Korollar 2. *Ist A eine beliebige Algebra einer Mächtigkeit $|A| \geqslant 2$, so bilden die Mächtigkeiten $|M|$ von Basen M von A eine volle Restklasse einer totaladditiven Äquivalenzrelation auf $\boldsymbol{K}$.*

Hierin sind die entsprechenden Ergebnisse von Marczewski, Goetz und Ryll-Nardzewski sowie von Świerczkowski als Spezialfälle enthalten.

(1) Vgl. J. Schmidt [16] und [18] und J. Słomiński [20]. In [18] findet man alle hier vorausgesetzten Tatsachen aus der Allgemeinen Algebra.

Die nicht so "realisierbaren" totaladditiven Äquivalenzrelationen von $\boldsymbol{K}$ lassen sich, wie sich später zeigen wird, schon sämtlich auf Grund der folgenden Verallgemeinerung eines Satzes von Marczewski (vgl. [8], Satz 1.3. (iv)) ausschließen:

SATZ 1.2. *Hat eine Algebra A vom Typus $(K_i)_{i\in I}$ mit der kardinalen Dimension $\mathfrak{d}$ (= kleinste additiv unerreichbare Kardinalzahl* (²)*, die echt größer ist, als alle $|K_i|$ $(i \in I)$) ein minimales Erzeugendensystem M einer Mächtigkeit $|M| \geqslant \mathfrak{d}$, so gilt für jedes Erzeugendensystem N von A: $|N| \geqslant |M|$.*

Zum Beweis benutzen wir die Tatsache (vgl. J. Schmidt [14], Satz 4), daß für jede Teilmenge Q einer Algebra B der kardinalen Dimension $\mathfrak{d}$ gilt:

$$CQ = \bigcup_{\substack{F\subset Q\\ |F|\leqslant \max(2,\mathfrak{d})}} CF\,. \tag{2}$$

Ist $\mathfrak{d} = 0$, so ist $I = \emptyset$ und $M = N = A$; ist $\mathfrak{d} = 1$, so ist $A = \boldsymbol{C}\emptyset \cup M$ als disjunkte Vereinigung, andererseits ist $A = \boldsymbol{C}\emptyset \cup N$, also $M \subset N$. Sei also $\mathfrak{d} \geqslant 2$, dann existiert zu jedem $y \in N$ ein $M_y \subset M$ mit $|M_y| < \mathfrak{d}$ und $y \in \boldsymbol{C}M_y$. Aus der Minimalität von M und aus $\boldsymbol{C}N = \boldsymbol{C}M$ folgt $\bigcup_{y\in N} M_y = M$, also

$$|M| \leqslant \sum_{y\in N} |M_y| \leqslant |N|(\mathfrak{d}-1);$$

im Falle $\mathfrak{d} = 2$ daher $|M| \leqslant |N|$. Ist dagegen $\mathfrak{d} > 2$, also $\mathfrak{d} \geqslant \aleph_0$, so folgt aus $|M_y| < \mathfrak{d}$ $(y \in N)$ und $\sum_{y\in N} |M_y| \geqslant \mathfrak{d}$ auch $|N| \geqslant \mathfrak{d}$ (weil $\mathfrak{d}$ additiv unerreichbar ist), also $|N|(\mathfrak{d}-1) = |N|$, somit wiederum $|M| \leqslant |N|$.

Da für eine nichttriviale primitive Klasse $\mathfrak{A}$ ein $\mathfrak{A}$-freies Erzeugendensystem immer minimal ist, folgt daraus das

KOROLLAR 1. *Für eine nichttriviale primitive Klasse $\mathfrak{A}$ folgt aus $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A}) \cong \boldsymbol{F}(\mathfrak{n}, \mathfrak{A})$ und $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{d}$ ($\mathfrak{d}$ = kardinale Dimension) stets $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \boldsymbol{K})$.*

Dies liefert eine notwendige Bedingung für die Äquivalenzrelationen in $\boldsymbol{K}$, die gemäß Problem 1 und 2 "algebraisch realisierbar" sind:

KOROLLAR 2. *Für jede totaladditive Äquivalenzrelation R in $\boldsymbol{K}$ gilt:*

1. *Gibt es eine nichttriviale primitive Klasse $\mathfrak{A}$ mit $R = R_{\mathfrak{A}}$, so existiert eine Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ (z.B. $\mathfrak{n} = \mathfrak{d}$ = kardinale Dimension des Typus von $\mathfrak{A}$) mit der Eigenschaft, daß $R(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}$ für $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$ (R heiße dann durch $\mathfrak{n}$ "beschränkt").*

2. *Existiert eine Algebra A, deren Basismächtigkeiten eine Restklasse $R(\mathfrak{s})$ von R bilden, so gibt es eine Kardinalzahl, die obere Schranke dieser Restklasse ist. Ist $\mathfrak{d}$ die kardinale Dimension des Typus von A, so ist $\max\{\mathfrak{d}, \mathfrak{s}\}$ eine solche obere Schranke.*

(²) Im Sinne von Bachmann [1], S. 181. Bed. 5 Eine Kardinalzahl $\mathfrak{n}$ ist aber „im weiteren Sinne unerreichbar" oder ist, was Bachmann ([1], S. 182) auch eine „Kuratowskische unerreichbare Kardinalzahl" nennt, dann und nur dann, wenn überdies aus $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ die Existenz eines $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{m} < \mathfrak{p} < \mathfrak{n}$ folgt. d.h. wenn $\mathfrak{n}$ zusätzlich noch „Limeszahl" ist.

In § 5 wird sich zeigen, daß diese Bedingungen auch schon hinreichend sind.

Sei A eine Algebra, L eine beliebige Menge, $\boldsymbol{O}^L(A) := A^{(A^L)}$ die Produktalgebra der vollständigen Operationen vom Typus L in A, $\boldsymbol{E}^L(A) \subset \boldsymbol{O}^L(A)$ die Menge aller Einheitsoperationen vom Typus L in A: $\boldsymbol{E}^L(A) := \{e^L_\lambda \mid \lambda \in L$ und $e^L_\lambda(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}(\lambda)$ für alle $\mathfrak{a} \in A^L\}$; und $\boldsymbol{F}^L(A)$ sei die von $\boldsymbol{E}^L(A)$ in $\boldsymbol{O}^L(A)$ erzeugte Algebra aller vollständigen algebraischen Operationen vom Typus L in A. $\boldsymbol{F}^L(A) := \boldsymbol{C}\boldsymbol{E}^L(A) \subset \boldsymbol{O}^L(A)$ wird dann von $\boldsymbol{E}^L(A)$ A-frei erzeugt. Ist $\mathfrak{A}$ eine nichttriviale primitive Klasse, so gilt $\boldsymbol{F}^L(\boldsymbol{F}(L, \mathfrak{A})) \cong \boldsymbol{F}(L, \mathfrak{A})$ über einer Bijektion $e^L_\lambda \to \lambda$ $(\lambda \in L)$, $\boldsymbol{E}^L(\boldsymbol{F}(L, \mathfrak{A}))$ ist also $\mathfrak{A}$-Basis von $\boldsymbol{F}^L(\boldsymbol{F}(L, \mathfrak{A}))$. Ist $A \in \mathfrak{A}$ beliebig, so kann die kanonisch gegebene Abbildung ι': $\boldsymbol{E}^L(\boldsymbol{F}(L, \mathfrak{A})) \to \boldsymbol{E}^L(A)$ zu einem Homomorphismus ι: $\boldsymbol{F}^L(\boldsymbol{F}(L, \mathfrak{A})) \to \boldsymbol{F}^L(A)$ fortgesetzt werden. Ist $h \in \boldsymbol{F}^L(\boldsymbol{F}(L, \mathfrak{A}))$, so heißt $\iota(h)$ die h entsprechende algebraische Operation in A. Man sieht leicht, daß bei jedem Homomorphismus von $\boldsymbol{F}(L, \mathfrak{A})$ in A h in $\iota(h)$ überführt wird. Ohne Schwierigkeiten läßt sich damit der von Świerczkowski für vollständige Algebren mit endlichstelligen Operationen geführte Beweis von Lemma 1 in [21] auf (partielle) Algebren von beliebigem Typus übertragen, d.h. es gilt:

SATZ 1.3. *$\mathfrak{A}$ sei eine nichttriviale primitive Klasse, M und N seien zwei Mengen. Dann sind $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A})$ und $\boldsymbol{F}(N, \mathfrak{A})$ genau dann isomorph, wenn es algebraische Operationen*

$$g_m \in \boldsymbol{F}^N(\boldsymbol{F}(N, \mathfrak{A})) \qquad (m \in M)$$

und

$$h_n \in \boldsymbol{F}^M(\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A})) \qquad (n \in N)$$

gibt, so daß in allen Algebren $B \in \mathfrak{A}$ für die entsprechenden algebraischen Operationen $g^B_m \in \boldsymbol{F}^N(B)$ $(m \in M)$ und $h^B_n \in \boldsymbol{F}^N(B)$ $(n \in N)$ die folgenden Gleichungen identisch erfüllt sind:

$$h^B_n\big(g^B_m(b_q \mid q \in N) \mid m \in M\big) = b_n \qquad \big((b_q \mid q \in N) \in B^N,\ n \in N\big)\,, \tag{3}$$

$$g^B_m\big(h^B_n(b_p \mid p \in M) \mid n \in N\big) = b_m \qquad \big((b_p \mid p \in M) \in B^M,\ m \in M\big)\,. \tag{4}$$

Von diesem Satz ausgehend werden wir in § 2 spezielle primitive Klassen definieren, die zur Lösung von Problem 1 besonders geeignet sind. Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir aber erst noch einige Tatsachen über totaladditive Äquivalenzrelationen in $\boldsymbol{K}$ zusammenstellen (vgl. Burmeister [2]), die zum Verständnis des Folgenden nützlich sind.

Es bezeichne $R_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ für $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \in \boldsymbol{K})$ diejenige Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$, für die $R_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}(\mathfrak{w}) = [\![\mathfrak{m}, \mathfrak{n}[\![$, falls $\mathfrak{w} \in [\![\mathfrak{m}, \mathfrak{n}[\![$, und $R_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}(\mathfrak{w}) = \{\mathfrak{w}\}$ sonst. Dann überlegt man sich leicht:

(R1) $R_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} \neq \mathrm{id}_{\boldsymbol{K}}$ ist genau dann totaladditiv, wenn $0 < \mathfrak{m}$ und wenn $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$ additiv unerreichbar ist.

(R2) Jede beschränkte Restklasse einer totaladditiven Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$, die eine transfinite Kardinalzahl enthält, ist ein halboffenes Intervall von $\boldsymbol{K}$ mit additiv unerreichbarem oberen Endpunkt.

(R3) Ist $0 < m < n < \aleph_0$, so ist $S_{m,n}$, definiert durch

$$(5)\qquad S_{m,n}(\mathfrak{w}) := \begin{cases} \{\mathfrak{w}\}, & \text{falls } 0 \leqslant \mathfrak{w} < m \text{ oder } \aleph_0 \leqslant \mathfrak{w}, \\ \{q + s(n-m) \mid 0 \leqslant s < \aleph_0\}, & \text{falls } m \leqslant \mathfrak{w} < \aleph_0\,,\ m \leqslant q < n \\ & \text{und } \mathfrak{w} \equiv q \bmod (n-m), \end{cases}$$

eine totaladditive Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$.

(R4) $R = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{K}$ ist die einzige totaladditive Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$ mit $R(0) \neq \{0\}$.

(R5) Jede beschränkte totaladditive Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$ läßt sich darstellen als

$$(6)\qquad R = \bigcup_{t \in T} R_{\mathfrak{m}_t,\mathfrak{n}_t} \qquad (\mathfrak{n}_t \geqslant \aleph_0 \text{ für alle } t \in T)$$

bzw.

$$(7)\qquad R = S_{m,n} \cup \bigcup_{t \in T} R_{\mathfrak{m}_t,\mathfrak{n}_t} \qquad (\mathfrak{m}_t \geqslant \aleph_0 \text{ für alle } t \in T)\,,$$

wobei $S_{m,n}$ und $R_{\mathfrak{m}_t,\mathfrak{n}_t}$ $(t \in T)$ totaladditiv sind und für $t \neq t'$ gilt $[\![\mathfrak{m}_t, \mathfrak{n}_t[\![\cap [\![\mathfrak{m}_{t'}, \mathfrak{n}_{t'}[\![= \emptyset$. Ist dabei $\mathfrak{m} \in [\![\mathfrak{m}_t, \mathfrak{n}_t[\![$ für ein $t \in T$, so gilt $R(\mathfrak{m}) = [\![\mathfrak{m}_t, \mathfrak{n}_t[\![$; anderenfalls ist $R(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{m}\}$ bzw. gilt für die Darstellung (7) und $\mathfrak{m} < \aleph_0$: $R(\mathfrak{m}) = S_{m,n}(\mathfrak{m})$.

Für beliebige Kardinalzahlen $\mathfrak{m} \in \boldsymbol{K}$ wird definiert:

$$(8)\qquad \mathfrak{m}^+ := \inf_{\mathfrak{m}<\mathfrak{n}} \mathfrak{n} \qquad (\text{“Nachfolger” von } \mathfrak{m})\,,$$

$$(9)\qquad \mathfrak{m}^- := \begin{cases} 0, & \text{falls } \mathfrak{m} = 0\,, \\ \sup\limits_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} \mathfrak{n} & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dabei ist zu beachten, daß $\mathfrak{m}^- = \mathfrak{m}$ außer für $\mathfrak{m} = 0$ genau für Limeszahlen $\mathfrak{m}$ eintritt.

Ferner sei für ein nichtleeres Intervall $x \subset \boldsymbol{K}$:

$$(10)\qquad \mathfrak{k}_x := \inf_{\mathfrak{w} \in x} \mathfrak{w}\,,$$

$$(11)\qquad \mathfrak{l}_x := \sup_{\mathfrak{w} \in x} \mathfrak{w}\,.$$

Unter Verwendung dieser Bezeichnungen erhalten wir schließlich

(R6) Zu jeder beschränkten totaladditiven Äquivalenzrelation R existiert eine Menge Y von abgeschlossenen Intervallen von $\boldsymbol{K}$, so daß gilt:

a. Hat R eine Darstellung (6) und gilt $\mathfrak{n}_t > \aleph_0$ für alle $t \in T$, so ist R die kleinste totaladditive Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$, die sämtliche $R_{\mathfrak{k}_y,\mathfrak{l}_y^+}$ $(y \in Y)$ umfaßt.

b. Hat R eine Darstellung (7)—wobei zu beachten ist, daß eine Darstellung (6) mit $\mathfrak{n}_{t_0} = \aleph_0$ für ein $t_0 \in T$ durch die folgende Darstellung

$$(7')\qquad R = S_{\mathfrak{m}_{t_0},\mathfrak{m}_{t_0}+1} \cup \bigcup_{t \in T - \{t_0\}} R_{\mathfrak{m}_t,\mathfrak{n}_t}$$

zu ersetzen ist—so existiert genau ein $y_0 \in Y$ mit $\mathfrak{k}_{y_0} < \aleph_0$, und für dieses gilt $\mathfrak{k}_{y_0} = m$ (bzw. $\mathfrak{m}_{t_0}$) und $\mathfrak{l}_{y_0} = n$ (bzw. $\mathfrak{m}_{t_0}+1$); und R ist die kleinste totaladditive Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$, die $S_{\mathfrak{k}_{y_0},\mathfrak{l}_{y_0}}$ und alle $R_{\mathfrak{k}_y,\mathfrak{l}_y^+}$ $(y \in Y - \{y_0\})$ umfaßt.

Dabei kann Y noch so gewählt werden, daß für alle $t \in T$ mit $\mathfrak{n}_t^- < \mathfrak{n}_t$ und gegebenenfalls $t \neq t_0$ gilt:

$$(12)\qquad [\![\mathfrak{m}_t, \mathfrak{n}_t^-]\!] \in Y \quad \text{und} \quad [\![\mathfrak{m}_t, \mathfrak{n}_t^-]\!] \cap \bigcup_{y \in Y'} y = \emptyset\,, \quad \text{wobei } Y' := Y - \{[\![\mathfrak{m}_t, \mathfrak{n}_t^-]\!]\}\,.$$

Man braucht sich dazu nur zu überlegen, daß im Falle $\mathfrak{n}^- = \mathfrak{n} > \mathfrak{m}$ $[\![\mathfrak{m}, \mathfrak{n}[\![$ z.B. als Vereinigung einer Menge Z abgeschlossener mindestens zweielementiger Intervalle dargestellt werden kann, so daß es zu jedem $z \in Z$ ein $z' \in Z$ gibt mit $\mathfrak{l}_z = \mathfrak{k}_{z'}$.

§ 2. Axiomatische Kennzeichnung der Struktur gewisser freier Algebren.

Im folgenden bezeichne Y stets eine Menge von Intervallen von $\boldsymbol{K}$ mit folgenden Eigenschaften:

(Y1) $Y \neq \emptyset$;

(Y2) $0 < \mathfrak{k}_y < \mathfrak{l}_y$ *und* $\mathfrak{l}_y \in y$ *für alle* $y \in Y$;

(Y3) *jedem* $y \in Y$ *sind zwei Mengen* K_y *und* L_y *zugeordnet mit* $|K_y| = \mathfrak{k}_y$ *und* $|L_y| = \mathfrak{l}_y$;

(Y4) *für alle* $y, z \in Y$ *mit* $y \neq z$ *gilt:*

$$K_y \cap K_z = K_y \cap L_y = K_y \cap L_z = L_y \cap L_z = \emptyset\ ^{(3)}\,.$$

Wir betrachten dann die Spezies $\mathfrak{S}_Y$ aller Algebren

$$(13)\qquad \big(A, (f_\lambda^y)_{\substack{y \in Y \\ \lambda \in L_y}}, (g_\varkappa^y)_{\substack{y \in Y \\ \varkappa \in K_y}}\big)\,,$$

wobei f_λ^y vom Typus K_y und $g_\varkappa^y$ vom Typus L_y sein soll $(\lambda \in L_y, \varkappa \in K_y, y \in Y)$. Setzen wir also

$$(14)\qquad I := \bigcup_{y \in Y} (K_y \cup L_y)\,, \qquad \Delta := (S_i)_{i \in I}\,,$$

---

(3) Durch $K_y := \{(0, y)\} \times \mathfrak{k}_y$, $L_y := \{(1, y)\} \times \mathfrak{l}_y$ läßt sich dies immer erreichen.

so besteht $\mathfrak{S}_Y$ aus allen Algebren $\big(A, (h_i)_{i\in I}\big)$ vom Typus $\varDelta$ mit

$$(15)\qquad \begin{array}{llll} S_i = K_y & \text{und} \quad h_i = f_i^y\,, & \text{falls} & i\in L_y\,,\\ S_i = L_y & \text{und} \quad h_i = g_i^y\,, & \text{falls} & i\in K_y\,. \end{array}$$

Je nach Zweckmäßigkeit werden wir die eine oder andere Bezeichnungsweise verwenden.

Zu jedem $y\in Y$ definieren wir nun Abbildungen f^y aus A^{K_y} in A^{L_y} und g^y aus A^{L_y} in A^{K_y} mit den Definitionsbereichen

$$(16)\qquad \operatorname{Def.} f^y := \bigcap_{\lambda\in L_y} \operatorname{Def.} f_\lambda^y \subset A^{K_y}\,, \qquad \operatorname{Def.} g^y := \bigcap_{\varkappa\in K_y} \operatorname{Def.} g_\varkappa^y \subset A^{L_y}\,,$$

so daß die folgenden Diagramme kommutativ sind:

$$(17)\qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Def.} f^y \arrow[rr, "f^y"] \arrow[dr, "f_\lambda^y|\operatorname{Def.} f^y"'] & & A^{L_y} \arrow[dl, "pr_\lambda"] \\ & A & \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} \operatorname{Def.} g^y \arrow[rr, "g^y"] \arrow[dr, "g_\varkappa^y|\operatorname{Def.} g^y"'] & & A^{K_y} \arrow[dl, "pr_\varkappa"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$$(\lambda\in L_y\,,\ \varkappa\in K_y)\,.$$

Schließlich bezeichne $\mathfrak{R}_Y$ die Klasse aller Algebren, für die gilt:

$$(18)\qquad f^y\circ g^y = \mathrm{id}_{A^{L_y}} \quad \text{und} \quad g^y\circ f^y = \mathrm{id}_{A^{L_y}} \quad \big(\text{d.h. } f^y = (g^y)^{-1}\big)\ (y\in Y)\,.$$

Jede Algebra $\big(A, (h_i)_{i\in I}\big)\in\mathfrak{R}_Y$ ist also vollständig, und für jedes $y\in Y$ erfüllen die Operationen f_λ^y und $g_\varkappa^y$ die Gleichungen (3) und (4) von Satz 1.3 (anstelle von h_n^B und g_m^B). Daher sieht man auch leicht, daß $\mathfrak{R}_Y$ eine primitive Klasse ist. Auch daß jede solche Klasse $\mathfrak{R}_Y$ eine mindestens zweielementige Algebra enthält, ist klar; ist nämlich $\mathfrak{d}$ die kardinale Dimension von $\varDelta$, so gilt wegen (Y1) und (Y2) $\mathfrak{d}\geqslant\aleph_0$. Wählt man also eine Menge A mit $|A| = 2^{\mathfrak{d}}$, so gilt für alle $y\in Y$

$$\big|A^{K_y}\big| = 2^{\mathfrak{d}\cdot|K_y|} = 2^{\mathfrak{d}} = 2^{\mathfrak{d}\cdot|L_y|} = \big|A^{L_y}\big|\,,$$

also existieren Abbildungen $f^y\colon A^{K_y}\to A^{L_y}$ und $g^y\colon A^{L_y}\to A^{K_y}$, die (18) erfüllen und zu denen man mit Hilfe von (17) eine vollständige Algebra $\big(A, (h_i)_{i\in I}\big)\in\mathfrak{R}_Y$ definieren kann. Es gilt also:

Satz 2.1. *Zu jeder Menge Y von Intervallen von $\boldsymbol{K}$, die (Y1) bis (Y4) erfüllt, ist $\mathfrak{R}_Y$ eine nichttriviale primitive Klasse vollständiger Algebren. Für die zugehörige kardinale Dimension $\mathfrak{d}$ gilt $\mathfrak{d}\geqslant\aleph_0$, und für die ordinale Dimension δ gilt $\delta\geqslant\omega_0$.*

Im folgenden sei Y eine beliebige, aber feste Menge von abgeschlossenen Intervallen in $\boldsymbol{K}$, und (Y1) bis (Y4) seien erfüllt. In der Klasse $\mathfrak{R}_Y$ haben wir dann eine durch gewisse Axiome (insbesondere (18)) charakterisierte algebraische Struktur eines speziellen Typus vor uns, vergleichbar

etwa der Gruppen- oder Modulstruktur. Um Aussagen über die von einer solchen Klasse auf $\boldsymbol{K}$ induzierte Äquivalenzrelation $R_{\mathfrak{R}_Y}$ machen zu können, was ja unser Ziel ist, müssen wir die freien $\mathfrak{R}_Y$-Algebren $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{R}_Y)$ genauer untersuchen, deren Existenz für jedes $\mathfrak{m}\in\boldsymbol{K}$ durch Satz 2.1 schon gesichert ist. Ähnlich wie man die absolut frei erzeugten Algebren in der Klasse aller vollständigen Algebren eines Typus durch die verallgemeinerten Peano-Axiome beschreibt, wollen wir eine axiomatische Kennzeichnung der $\mathfrak{R}_Y$-frei erzeugten $\mathfrak{R}_Y$-Algebren angeben, aus der sich dann alle weiteren Strukturaussagen herleiten lassen:

Satz 2.2. *A sei eine $\mathfrak{R}_Y$-Algebra* (vgl. (13)), *$M\subset A$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *$A\cong\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{R}_Y)$;*

2) *zu jedem $y\in Y$ existieren Mengen $R(K_y, M)\subset A^{K_y}$ und $R(L_y, M)\subset A^{L_y}$, so daß für die durch die Einschränkungen*

$$(19)\qquad \begin{array}{ll} \bar f_\lambda^y := f_\lambda^y|_{R(K_y,M)}\colon\ R(K_y, M)\to A & (\lambda\in L_y,\ y\in Y)\,,\\ \bar g_\varkappa^y := g_\varkappa^y|_{R(L_y,M)}\colon\ R(L_y, M)\to A & (\varkappa\in K_y,\ y\in Y) \end{array}$$

definierte (partielle) Algebra $\big(A, (\bar f_\lambda^y)_{\substack{\lambda\in L_y\\ y\in Y}}, (\bar g_\varkappa^y)_{\substack{y\in Y\\ \varkappa\in K_y}}\big)$ die folgenden vier Axiome erfüllt sind:

(Q1) $\bar f^y = f^y|_{R(K_y,M)}\colon\ R(K_y, M)\to A^{L_y} - R(L_y, M)$ *und*

$\bar g^y = g^y|_{R(L_y,M)}\colon\ R(L_y, M)\to A^{K_y} - R(K_y, M)$ *sind für jedes $y\in Y$ bijektive Abbildungen.*

(Q2) $\boldsymbol{C}^*M = A$ (4).

(Q3) $\bar h_i(\mathfrak{a})\notin M$ *für alle $i\in I$ und alle $\mathfrak{a}\in R(S_i, M)$.* (5)

(Q4) *Aus $\bar h_i(\mathfrak{a}) = a$ und $\bar h_j(\mathfrak{b}) = a$ folgt $i = j$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.*

Bemerkung. Die Folgen $\mathfrak{b}\in R(S_i, M)$ (für ein $i\in I$) wollen wir *M-regulär* nennen, die Folgen $\mathfrak{a}\in A^{S_i} - R(S_i, M)$ $(i\in I)$ *M-singulär*. (Q1) besagt dann, daß zwischen den M-regulären Folgen vom Typus K_y bzw. L_y und den M-singulären Folgen vom Typus L_y bzw. K_y $(y\in Y)$ eine *bijektive Zuordnung* besteht. In diesem Sinne werden wir im folgenden von einander zugeordneten Folgen sprechen. (Q2), (Q3) und (Q4) besagen, daß $\big(A, (\bar h_i)_{i\in I}\big)$ eine partielle Peano-Algebra über M ist.

Beweis. 2)$\Rightarrow$1): A erfüllt 2), dann läßt sich also, da $\big(A, (\bar h_i)\big) =: \bar A$ eine partielle Peano-Algebra ist, jede Abbildung $\beta\colon M\to B$ in eine beliebige Algebra $\big(B, (h_i')_{i\in I}\big)\in\mathfrak{R}_Y$ zu einem Homomorphismus $\varphi\colon \bar A\to B$ fortsetzen.

(4) $\boldsymbol{C}^*$ bezeichne den Hüllenoperator bezüglich der partiellen Struktur.

(5) Um (Q3) und (Q4) klarer formulieren zu können, sind wir zu der zweiten auf Seite 172 eingeführten Bezeichnungsweise übergegangen. Die Bedeutung von $\bar h_i$ und $R(S_i, M)$ ist dabei offensichtlich.

Es muß also nur noch gezeigt werden, daß φ auch ein Homomorphismus bezüglich der vollen Struktur von A ist. Sei also

$$\mathfrak{q} = (q_\sigma|\sigma \in S_i) \in A^{S_i} - R(S_i, M),$$

wobei wegen der Symmetrie der Definitionen bezüglich K_y und L_y ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann, daß $i \in L_y$ für ein $y \in Y$, d.h. $S_i = K_y$ und $h_i = f_i^y$. Dann ist aber wegen (Q1) und (18) $f^y(\mathfrak{q}) = (\bar{g}^y)^{-1}(\mathfrak{q}) \in R(L_y, M)$, also

$$f_i'^y(\varphi(q_\varkappa)|\varkappa \in K_y) = f_i'^y\big(\varphi(g_\sigma^y(f^y(\mathfrak{q}))\big|\sigma \in K_y\big)$$
$$= f_i'^y\Big(\varphi\big(\bar{g}_\sigma^y(f^y(\mathfrak{q}))\big|\ \sigma \in \overline{K_y}\big)\Big) = \bar{f}_i'^y\Big(g'^y\big(\varphi(f_\lambda^y(\mathfrak{q}))\big|\lambda \in L_y\big)\Big) = \varphi\big(f_i^y(\mathfrak{q})\big).$$

Damit ist nachgewiesen, daß A von M $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugt wird. Wegen $A \in \mathfrak{K}_Y$ gilt also $A \cong \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$.

1) ⇒ 2). Angenommen, es gibt eine Algebra $A \in \mathfrak{K}_Y$ mit einer Teilmenge $M \in A$, die die Bedingung 2) erfüllt. Dann gilt, da nach dem eben Bewiesenen A von M $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugt wird, $A \cong \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$. Bei diesem Isomorphismus überträgt sich aber die Struktur von A auf $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$, so daß auch $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ die Eigenschaft 2) besitzt. Der Beweis von Satz 2.2 ist also erbracht, wenn folgender Hilfssatz bewiesen ist:

Hilfssatz. *Zu jeder Menge M gibt es eine Algebra $A \in \mathfrak{K}_Y$, die die Bedingung* 2) *von Satz* 2.2 *erfüllt.*

Zum Beweis gehen wir analog vor wie R. Kerkhoff in [7] bei der Konstruktion von Peano-Algebren:

Sei M eine beliebige Menge, I definiert wie in (14), $C := M \cup I$, $G := \{f|f\colon [\![1, m]\!] \to C$ Abbildung, $m \geqslant 1$ natürliche Zahl$\}$; $f \in G$ schreiben wir auch als Folge $f =: (c_1, \dots, c_m)$, wenn $f(\mu) = c_\mu$ $(\mu = 1, \dots, m)$. Das 1-Tupel (c) ist dabei vom Element $c \in C$ zu unterscheiden. H sei schließlich die Menge aller nichtleeren Teilmengen von G. In H definieren wir partielle Operationen $\bar{h}_i'$ vom Typus S_i $(i \in I)$ wie folgt:

(20) $\bar{h}_i'(M_\sigma|\sigma \in S_i) := \{(i, \sigma, c_1, \dots, c_m)|\ \sigma \in S_i,\ (c_1, \dots, c_m) \in M_\sigma\}$, *falls $(M_\sigma|\sigma \in S_i)$ keine singuläre Folge ist (man beachte, daß $\bar{h}_i'(M_\sigma|\sigma \in S_i) \neq \emptyset$, falls es existiert).*

Dabei nennen wir eine Folge $(M_\tau|\tau \in T) \in H^T$ *singulär* genau dann, wenn $T = S_i$ für ein $i \in I$ und wenn es eine Folge $(N_\sigma|\ \sigma \in S_j) \in H^{S_j}$ gibt, so daß gilt:

Im Falle $i \in K_y$, d.h. $T = S_i = L_y$, ist $S_j = K_y$,

im Falle $i \in L_y$, d.h. $T = S_i = K_y$, ist $S_j = L_y$,

und für jedes $\tau \in S_i$ ist

(21) $$M_\tau = \{(\tau, \sigma, d_1, \dots, d_n)|\ \sigma \in S_j,\ (d_1, \dots, d_n) \in N_\sigma\}.$$

Nennen wir die nicht-singulären Folgen in H von einem Typus S_i $(i \in I)$ *regulär*, so ist, falls $(N_\sigma|\ \sigma \in S_j)$ regulär ist, (21) gleichbedeutend mit

(22) $$M_\tau = \bar{h}_\tau'(N_\sigma|\ \sigma \in S_j) \quad \text{für jedes } \tau \in S_i.$$

Die Menge aller regulären Folgen vom Typus S_i in H wollen wir mit R_i bezeichnen $(i \in I)$, wobei R_i offenbar nur von der Menge S_i abhängt. R_i ist jeweils der genaue Definitionsbereich von $\bar{h}_i'$ $(i \in I)$.

Es existiert nun eine Bijektion von M auf $M' := \{\{(m)\}|\ m \in M\}$ vermöge $m \to \{(m)\}$, und wir betrachten in H die Unteralgebra $A := \boldsymbol{C}^*M'$ mit der Struktur $(\bar{h}_i)_{i \in I}$, wobei für $i \in I$ $\bar{h}_i := \bar{h}_i'|_A$. Ferner sei $R(S_i, M') := R_i \cap A^{S_i}$ die Menge der M'-regulären Folgen vom Typus S_i in A (s.u.). $\bar{f}^y$ und $\bar{g}^y$ werden gemäß (16) und (17) definiert. Behauptung: $(A, (\bar{h}_i)_{i \in I})$ erfüllt (Q1) bis (Q4) bezüglich M'. Denn (Q2) ist nach Definition von A klar; und (Q3) ist leicht einzusehen, da alle Elemente von einem $\bar{h}_i(M_\sigma|\ \sigma \in S_i)$ Folgen einer Länge $\geqslant 3$ sind, während jedes Element aus M' die Länge 1 hat.

Zu (Q4): Sei

$$\bar{h}_i(M_\sigma|\ \sigma \in S_i) = \bar{h}_j(N_\varkappa|\ \varkappa \in S_j) = a;$$

dann existiert $f \in \bar{h}_i(M_\sigma|\ \sigma \in S_i) = \bar{h}_j(N_\varkappa|\ \varkappa \in S_j)$, also $f = (i, \tau, c_1, \dots, c_m) = (j, \chi, d_1, \dots, d_m)$, somit $i = j$. Ist nun für ein $\sigma \in S_i$ $(c_1, \dots, c_m) \in M_\sigma$, so ist $(i, \sigma, c_1, \dots, c_m) \in \bar{h}_i(N_\varkappa|\ \varkappa \in S_i)$, also nach (20) $(c_1, \dots, c_m) \in N_\sigma$, somit $M_\sigma \subset N_\sigma$, aus Symmetrie daher $M_\sigma = N_\sigma$ $(\sigma \in S_i)$.

Zu (Q1): Die Injektivität von $\bar{f}^y$ und $\bar{g}^y$ folgt aus der Gültigkeit von (Q4); daß gerade $R(K_y, M')$ bzw. $R(L_y, M')$ die Definitionsbereiche sind, ist auch klar. Sei nun $(M_\sigma|\ \sigma \in S_i) \in A^{S_i} - R(S_i, M')$. Aus (21) folgt, daß sämtliche Elemente eines M_τ $(\tau \in S_i)$ eine Länge $\geqslant 3$ haben, also $M_\tau \notin M'$ und daher $M_\tau = \bar{h}_{i_\tau}(N_{\varkappa\tau}|\ \varkappa \in S_{i_\tau})$ $(\tau \in S_i)$. Andererseits folgt aus (21) für jedes $\tau \in S_i$

$$M_\tau = \{(\tau, \sigma, d_1, \dots, d_n)|\ \sigma \in S_j,\ (d_1, \dots, d_n) \in N_\sigma\}.$$

Wie zu (Q4) schließt man jetzt auf $i_\tau = \tau$ $(\tau \in S_i)$, ferner $S_{i_\tau} = S_\tau = S_j$ und $N_{\varkappa\tau} = N_\varkappa$ $(\varkappa \in S_j, \tau \in S_i)$. Da nun also $M_\tau = \bar{h}_\tau(N_\sigma|\ \sigma \in S_j)$, muß $(N_\sigma|\ \sigma \in S_j)$ notwendig M'-regulär sein. Ist z.B. $S_i = K_y$, d.h. $S_j = L_y$, so ist $(M_\tau|\ \tau \in K_y) = \bar{g}^y(N_\sigma|\ \sigma \in L_y)$, $\bar{g}^y$ ist also surjektiv, ebenso $\bar{f}^y$ $(y \in Y)$. Um die Struktur $(\bar{h}_i)_{i \in I}$ von A geeignet zu vervollständigen, werden nun Abbildungen $f^y\colon A^{K_y} \to A^{L_y}$ und $g^y\colon A^{L_y} \to A^{K_y}$ definiert durch:

(23) $$f^y(\mathfrak{a}) := \begin{cases} \bar{f}^y(\mathfrak{a}), & \text{falls} \quad \mathfrak{a} \in R(K_y, M'), \\ (\bar{g}^y)^{-1}(\mathfrak{a}), & \text{falls} \quad \mathfrak{a} \in A^{K_y} - R(K_y, M'), \end{cases}$$
$$g^y(\mathfrak{a}) := \begin{cases} \bar{g}^y(\mathfrak{a}), & \text{falls} \quad \mathfrak{a} \in R(L_y, M'), \\ (\bar{f}^y)^{-1}(\mathfrak{a}), & \text{falls} \quad \mathfrak{a} \in A^{L_y} - R(L_y, M'). \end{cases}$$

Bestimmt man dann f^{y}_{λ} und $g^{\eta}_{\varkappa}$ $(\lambda \in L_y,\ \varkappa \in K_y)$ (d.h. h_i für $i \in I$) als kommutative Ergänzungen von (17) entsprechenden Diagrammen, so erhält man offensichtlich eine $\mathfrak{K}_Y$-Algebra $\left(A, (h_i)_{i\in I}\right)$, die die Bedingung 2) von Satz 2.2 bezüglich $M' \subset A$ erfüllt. Nach einem Satz von Pickert und van der Waerden kann man dann auch eine zu dieser isomorphe Algebra finden, die M umfaßt und 2) von Satz 2.2 bezüglich M erfüllt.

Aus Satz 2.2 lassen sich nun unmittelbar einige Folgerungen ziehen, z.B. folgt aus (Q1), (Q3) und (Q4)

Korollar 1. *Jede M-singuläre Folge $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)^{S_i} - R(S_i, M)$ $(i \in I)$ ist eine Folge ohne Wiederholungen und es gilt* $\operatorname{Bild}\mathfrak{a} \cap M = \emptyset$.

Aus (Q1) und (Q4) folgt

Korollar 2. *Aus $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)^{S_i} - R(S_i, M)$ und $\mathfrak{b} \in \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)^{S_j} - R(S_j, M)$ sowie $\operatorname{Bild}\mathfrak{a} \cap \operatorname{Bild}\mathfrak{b} = \emptyset$ folgt $S_i = S_j$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$; d.h. je zwei M-singuläre Folgen, deren Bilder einen nichtleeren Durchschnitt haben, sind gleich.*

Aus diesen beiden Korollaren und (Q2) ergibt sich schließlich

Korollar 3. *Es ist stets*

$$\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y) = M \cup \bigcup_{\mathfrak{a}\ M\text{-singulär}} \operatorname{Bild}\mathfrak{a}\,,$$

und dies ist eine disjunkte Vereinigung.

§ 3. Weitere Strukturaussagen über $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugte Algebren. Sei $\left(A, (p_j)_{j\in J}\right)$ eine beliebige Algebra vom Typus $(T_j)_{j\in J}$, dann erhält man durch die Definition

$$\boldsymbol{D}M := M \cup \bigcup_{j\in J} p_j(M^{T_j})$$

einen mehrstufigen Hüllenoperator auf A [6]. Man setzt dabei $\boldsymbol{D}^0M := M$, $\boldsymbol{D}^1M := \boldsymbol{D}M$ und $\boldsymbol{D}^{\alpha}M := \boldsymbol{D}(\bigcup_{\beta<\alpha} \boldsymbol{D}^{\beta}M)$ für jede Ordinalzahl α. Ferner

$$\boldsymbol{B}^{\alpha}M := \boldsymbol{D}^{\alpha}M - (\bigcup_{\beta<\alpha} \boldsymbol{D}^{\beta}M)\,,$$

die α-te Bairesche Klasse von M in A für eine beliebige Ordinalzahl α. Bekanntlich ist dann, wenn δ die ordinale Dimension des Typus $(T_j)_{j\in J}$ ist (d.h. die kleinste reguläre Ordinalzahl mit einer Mächtigkeit $> |T_j|$ für alle $j \in J$) und $\delta \geqslant \omega_0$ gilt:

$$\boldsymbol{C}M = \bigcup_{\alpha<\delta} \boldsymbol{D}^{\alpha}M = \bigcup_{\alpha<\delta} \boldsymbol{B}^{\alpha}M\,.$$

---

[6] Vgl. Schmidt [14] und [18] sowie Słomiński [19].

Ist $x \in \boldsymbol{C}M$ und $x \in \boldsymbol{B}^{\alpha}M$, so heißt $\alpha =: \sigma(x, M)$ die Stufenzahl von x bezüglich M. Ist $\mathfrak{a} \in (\boldsymbol{C}M)^T$ eine Folge, so werde auch eine Stufenzahl von $\mathfrak{a}$ bezüglich M definiert durch

$$\sigma(\mathfrak{a}, M) := \sup_{a \in \operatorname{Bild}\mathfrak{a}} \sigma(a, M)\,. \tag{24}$$

Ist $T = T_j$ für ein $j \in J$, so gilt, falls $\delta \geqslant \omega_0$, $0 \leqslant \sigma(\mathfrak{a}, M) < \delta$.

Satz 3.1. *Sei $N \subset \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ und N enthalte kein Bild einer M-singulären Folge. Ist dann $x \in \boldsymbol{B}^{\alpha}N$ $(0 < \alpha < \delta)$, so existiert genau eine M-singuläre Folge $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)^{S_i} - R(S_i, M)$ (für genau ein $i \in I$) mit $x \in \operatorname{Bild}\mathfrak{a}$; und dabei gilt*

$$\operatorname{Bild}\mathfrak{a} \subset N \cup \boldsymbol{B}^{\alpha}N\,, \tag{25}$$

und für die $\mathfrak{a}$ zugeordnete (M-reguläre) Folge $\mathfrak{b}$ gilt $\operatorname{Bild}\mathfrak{b} \subset \bigcup_{\beta<\alpha} \boldsymbol{B}^{\beta}N$.

Beweis durch transfinite Induktion: Sei $x \in \boldsymbol{B}^1N$, dann existiert eine Folge $\mathfrak{b} \in N^{S_j}$ mit $x = h_j(\mathfrak{b})$. $\mathfrak{b}$ ist dann nach Voraussetzung M-regulär. Ist nun z.B. $S_j = K_y$, so ist $x \in \operatorname{Bild} f^y(\mathfrak{b}) \subset N \cup \boldsymbol{B}^1N$ und $f^y(\mathfrak{b})$ ist M-singulär und eindeutig bestimmt (vgl. Korollar 3 zu Satz 2.2). Gelte nun die Behauptung des Satzes für alle Ordinalzahlen α mit $0 < \alpha < \gamma < \delta$ und sei $\gamma > 1$ und $x \in \boldsymbol{B}^{\gamma}N$. Dann existiert wiederum eine Folge $\mathfrak{b} \in (\bigcup_{\beta<\gamma} \boldsymbol{B}^{\beta}N)^{S_j}$ mit $x = h_j(\mathfrak{b})$. Wegen $\gamma > 1$ gibt es ein $b \in \operatorname{Bild}\mathfrak{b} \cap \boldsymbol{B}^{\beta}N$ für ein β mit $0 < \beta < \gamma$. Nun ist aber $\mathfrak{b}$ sicher ungleich der M-singulären Folge $\mathfrak{a}_{\beta}$ mit $b \in \operatorname{Bild}\mathfrak{a}_{\beta}$, denn die Resultate aller Anwendungen fundamentaler Operationen auf $\mathfrak{a}_{\beta}$ haben nach Induktionsvoraussetzung Stufenzahlen $< \beta$, während $\sigma\left(h_j(\mathfrak{b}), N\right) = \gamma > \beta$. Wegen der Disjunktheit der Bilder verschiedener M-singulärer Folgen muß $\mathfrak{b}$ also M-regulär sein. Daher gilt $x \in \operatorname{Bild}\mathfrak{a}$ für die $\mathfrak{b}$ zugeordnete M-singuläre Folge $\mathfrak{a}$, und es ist $\operatorname{Bild}\mathfrak{a} \subset \boldsymbol{D}^{\gamma}N$. Nach Induktionsannahme folgt daraus mit den Korollaren zu Satz 2.2 $\operatorname{Bild}\mathfrak{a} \subset N \cup \boldsymbol{B}^{\gamma}N$. Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

Mit Korollar 3 zu Satz 2.2 ergibt sich daraus sofort:

Korollar 1. *In $F(M, \mathfrak{K}_Y)$ ist $\boldsymbol{B}^{\alpha}M$ für $0<\alpha$ disjunkte Vereinigung der Bilder M-singulärer Folgen, und die Bilder der zugeordneten M-regulären Folgen sind ganz in $\bigcup_{\beta<\alpha} \boldsymbol{D}^{\beta}M = \bigcup_{\beta<\alpha} \boldsymbol{B}^{\beta}M$ enthalten. $\boldsymbol{B}^0M$ enthält kein Element eines Bildes einer M-singulären Folge.*

Korollar 2. *In $F(M, \mathfrak{K}_Y)$ haben alle Elemente des Bildes einer M-singulären Folge $\mathfrak{a}$ die gleiche Stufenzahl $\sigma(\mathfrak{a}, M)$ bezüglich M. Die Stufenzahlen bezüglich M der Elemente des Bildes der $\mathfrak{a}$ zugeordneten Folge $\mathfrak{b}$ sind sämtlich kleiner als $\sigma(\mathfrak{a}, M)$ und bilden eine konfinale Teilmenge des Abschnittes $\{\beta \mid \beta < \sigma(\mathfrak{a}, M)\}$ der Ordinalzahlreihe: $\sigma(\mathfrak{a}, M)$ ist die kleinste Ordinalzahl, die echt größer ist als alle Stufenzahlen bezüglich M der Elemente von* $\operatorname{Bild}\mathfrak{b}$.

Hieraus ist ersichtlich, daß die Mengen $R(S_i, M)$ in Satz 2.2 durch M und S_i eindeutig bestimmt sind.

Die Definition der regulären und singulären Folgen soll jetzt auch auf nicht frei erzeugte $\mathfrak{K}_Y$-Algebren ausgedehnt werden, und zwar in Anlehnung an die Korollare 1 und 2 zu Satz 3.1:

Definition 3.1. A sei eine von $N \subset A$ erzeugte $\mathfrak{K}_Y$-Algebra. $\mathfrak{a} \in \begin{cases} A^{K_y} \\ A^{L_y} \end{cases}$ heiße N*-singulär* genau dann, wenn für $\alpha := \sigma(\mathfrak{a}, N)$ gilt:

$$\begin{cases} f^y(\mathfrak{a}) \in \big(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{D}^\beta N\big)^{L_y} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} \notin \big(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{D}^\beta N\big)^{K_y}, \\ g^y(\mathfrak{a}) \in \big(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{D}^\beta N\big)^{K_y} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} \notin \big(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{D}^\beta N\big)^{L_y}; \end{cases}$$

anderenfalls heiße die Folge $\mathfrak{a} \in A^{S_i}$ $(i \in I)$ N*-regulär*. $R(S_i, N)$ sei weiterhin die Menge der N-regulären Folgen vom Typus S_i in A.

Bemerkung. Die einer N-singulären Folge zugeordnete Folge ist stets N-regulär, die Umkehrung gilt i.a. nicht mehr (vgl. aber Satz 3.1). Wie man an den Korollaren 1 und 2 zu Satz 3.1 sieht, stimmt für den Fall, daß NA $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugt, diese Definition mit der ursprünglichen überein, und die einer N-regulären Folge zugeordnete Folge ist N-singulär.

Mit Hilfe von Definition 3.1 kann man Satz 3.1 auch folgendermaßen formulieren:

Korollar 3. *Ist $N \subset \mathbf{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ und enthält N kein Bild einer M-singulären Folge, so ist eine Folge $\mathfrak{a} \in (\mathbf{C}N)^{S_i}$ $(i \in I)$ N-regulär (N-singulär) genau dann, wenn sie M-regulär (M-singulär) ist, speziell gilt dies, falls N auch noch $\mathfrak{K}_Y$-frei ist.*

Analog zu Korollar 3 zu Satz 2.2 gilt das

Korollar 4. *Ist $N \subset A \in \mathfrak{K}_Y$, so ist $\mathbf{C}N = N \cup \bigcup_{\mathfrak{a}\ N\text{-singulär}} \operatorname{Bild}\mathfrak{a}$. Diese Vereinigung ist i.a. nicht mehr disjunkt.*

Korollar 5. *Sei $N \subset \mathbf{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ und $\mathfrak{b}$ eine N-reguläre Folge, die M-singulär ist. Dann gilt*

$$\operatorname{Bild}\mathfrak{b} \subset N \cup \bigcup_{\substack{\tilde{\mathfrak{a}}\ N\text{-singulär} \\ \text{und } M\text{-regulär}}} \operatorname{Bild}\tilde{\mathfrak{a}}. \tag{26}$$

Beweis. Sei $x \in \operatorname{Bild}\mathfrak{b} - N$, dann existiert eine N-singuläre Folge $\tilde{\mathfrak{a}}$ mit $x \in \operatorname{Bild}\tilde{\mathfrak{a}}$; da $\mathfrak{b}$ M-singulär und N-regulär ist, gilt $\mathfrak{b} \neq \tilde{\mathfrak{a}}$ und wegen $\operatorname{Bild}\mathfrak{b} \cap \operatorname{Bild}\tilde{\mathfrak{a}} \neq \emptyset$ muß $\tilde{\mathfrak{a}}$ M-regulär sein.

Grundlegend für die späteren Mächtigkeitsabschätzungen von Erzeugendensystemen ist nun das folgende Ergebnis:

Satz 3.2. *Ist $N \subset \mathbf{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$, so gilt*

$$\mathbf{C}N \cap M \subset N \cup \bigcup_{\substack{\mathfrak{a}\ N\text{-singulär} \\ \text{und } M\text{-regulär}}} \operatorname{Bild}\mathfrak{a}. \tag{27}$$

Beweis. Sei $m \in M - N$, dann ist $m \in \operatorname{Bild}\mathfrak{a}$ für eine N-singuläre Folge $\mathfrak{a}$ in $\mathbf{C}N$, falls $m \in \mathbf{C}N$. $\mathfrak{a}$ muß dann aber wegen $M \cap \operatorname{Bild}\mathfrak{a} \neq \emptyset$ M-regulär sein.

Korollar 1. *Ist $N \subset \mathbf{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$, und enthält N kein Bild einer M-singulären Folge, so gilt*

$$\mathbf{C}N \cap M = N \cap M. \tag{28}$$

Korollar 2. *Gilt unter den Voraussetzungen von Korollar 1 $\mathbf{C}N = \mathbf{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$, so ist $M \subset N$. Ist N $\mathfrak{K}_Y$-frei, so gilt $M = N$.*

Denn ist N $\mathfrak{K}_Y$-frei, so ist N minimale Erzeugende, also gilt $M \supset N$.

Korollar 3. *Jede Erzeugende von $\mathbf{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$, die M nicht umfaßt, enthält das Bild einer M-singulären Folge.*

In § 4 werden wir nachweisen, daß die Mächtigkeit von $N \cup \bigcup_{\substack{\mathfrak{a}\ N\text{-sing.} \\ \text{u. } M\text{-reg.}}} \operatorname{Bild}\mathfrak{a}$ unter gewissen Voraussetzungen über Y und $|M|$ für $|N| < |M|$ auch unterhalb $|M|$ bleibt, diese Menge also M nicht umfassen kann, d.h. N kann kein Erzeugendensystem von $\mathbf{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ sein. Damit wird dann die Verallgemeinerung der Ergebnisse von Świerczkowski auf beliebige kardinale Dimensionen (bei ihm ist stets $\mathfrak{d} = \aleph_0$) erreichbar sein. Świerczkowski wählt übrigens in [21] für seine Untersuchungen der $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugten $\mathfrak{K}_Y$-Algebren nicht wie wir den Zugang über Satz 2.2, der bei ihm gar nicht vorkommt, sondern über die Korollare 1 und 2 zu Satz 3.1, die er zur axiomatischen Kennzeichnung der $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugten $\mathfrak{K}_Y$-Algebren benutzt. Zur Darstellung seiner Ergebnisse würden wir diese ordinalzahltheoretischen Methoden gar nicht benötigen, da hier aber allgemeinere Ergebnisse angestrebt werden, lassen sie sich nicht umgehen.

Zum Beweis des nächsten Satzes, der sichern soll, daß mit Problem 1 auch gleichzeitig Problem 2 gelöst wird, benötigen wir den

Hilfssatz. *Sei $N \subset \mathbf{B}^\alpha M \subset \mathbf{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$, und N enthalte kein Bild einer M-singulären Folge. Dann ist N $\mathfrak{K}_Y$-frei.*

Beweis. Wir zeigen, daß $\mathbf{C}N$ bezüglich N 2) von Satz 2.2 erfüllt. Nach Korollar 3 zu Satz 3.1 gilt $R(S_i, N) = R(S_i, M) \cap (\mathbf{C}N)^{S_i}$, und (Q1) und (Q4) sind unmittelbar klar. Mit Korollar 2 zu Satz 3.1 folgt sofort (Q3). Es muß also noch $\mathbf{C}^*N = \mathbf{C}N$ bewiesen werden mit $\mathbf{C}^*$ als Hüllenoperator für die auf $R(S_i, N)$ eingeschränkten Operationen. Aber angenommen, es existiert ein $a \in \mathbf{C}N - \mathbf{C}^*N$, so gibt es ein solches mit kleinster Stufenzahl bezüglich M. Da ein solches nicht in N liegen kann, ist es im Bild einer N-singulären Folge $\mathfrak{a}$ enthalten, die aber auch M-singulär ist. Die Elemente des Bildes der $\mathfrak{a}$ zugeordneten N-regulären, also auch M-regulären Folge haben bezüglich M kleinere Stufenzahlen als die von Bild $\mathfrak{a}$, liegen aber in $\mathbf{C}N$ und daher nach Voraussetzung in $\mathbf{C}^*N$. Dann gilt aber $\operatorname{Bild}\mathfrak{a} \subset \mathbf{C}^*N$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist auch (Q2) nachgewiesen: CN wird von N $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugt.

SATZ 3.3. *Für alle Mengen $M \neq \emptyset$ gilt*

$$HUP(\{F(M, \mathfrak{K}_Y)\}) = \mathfrak{K}_Y \,. \tag{29}$$

Zum Beweis benutzen wir die Tatsache (vgl. [18]), daß für $A \in \mathfrak{K}_Y$ mit $|A| \geqslant 2$ $HUP(\{A\}) = \mathfrak{K}_Y$ genau dann gilt, wenn $HUP(\{A\})$ für alle $\mathfrak{n} < \mathfrak{d}+1$ ($\mathfrak{d}$ die kardinale Dimension) eine von einer Menge N mit $|N| \geqslant \mathfrak{n}$ $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugte Algebra enthält. Nach Satz 2.1 gilt $\mathfrak{d} \geqslant \aleph_0$ für $\mathfrak{K}_Y$. Wir unterscheiden:

1) $\mathfrak{d} > \aleph_0$. Dann ist $B^1 M = \bigcup_{H(\mathfrak{a})} \mathrm{Bild}\, \mathfrak{a}$, wobei die Aussage H genau dann auf eine Folge $\mathfrak{a}$ zutreffe, wenn $\mathfrak{a}$ M-singulär ist und das Bild der $\mathfrak{a}$ zugeordneten Folge in M liegt. Diese Vereinigung ist disjunkt und nicht leer. Vermöge einer Auswahlfunktion werde jeder Folge $\mathfrak{a}$ mit $H(\mathfrak{a})$ ein Element $a(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Bild}\, \mathfrak{a}$ zugeordnet, und man setze $N := \bigcup_{H(\mathfrak{a})} (\mathrm{Bild}\, \mathfrak{a} - \{a(\mathfrak{a})\})$. $N \subset B^1 M$ enthält dann kein Bild einer M-singulären Folge, ist also nach vorstehendem Hilfssatz $\mathfrak{K}_Y$-frei. Zu jedem $i \in I$ mit $|S_i| \geqslant \aleph_0$ (und es gibt solche wegen $\mathfrak{d} > \aleph_0$) gibt es eine Folge $\mathfrak{a}$ mit $H(\mathfrak{a})$ und $|\mathrm{Bild}\, \mathfrak{a} - \{a(\mathfrak{a})\}| = |S_i|$, daher gilt mit $Y' := \{y \mid |K_y| \geqslant \aleph_0\}$:

$$|N| \geqslant \sum_{y \in Y'} (|K_y| + |L_y|) \geqslant |S_i| \quad \text{für alle } i \in I \,.$$

Nach Definition der kardinalen Dimension gilt daher für alle $\mathfrak{n} < \mathfrak{d} = \mathfrak{d}+1$ $|N| \geqslant \mathfrak{n}$, so daß (29) für $\mathfrak{d} > \aleph_0$ bewiesen ist.

2) $\mathfrak{d} = \aleph_0$. In diesem Fall soll zu jedem $n < \aleph_0$ eine n-elementige $\mathfrak{K}_Y$-freie Teilmenge von $F(M, \mathfrak{K}_Y)$ angegeben werden. Es existiert nämlich ein $y \in Y$ mit $\mathfrak{l}_y \geqslant 2$, und zu einem solchen y seien f_i^y und f_j^y zwei bestimmte Operationen vom Typus K_y, $i \neq j$. Jede konstante K_y-Folge $\mathfrak{a} = (a \mid \sigma \in K_y)$ zu einem Element $a \in M$ oder einem Wert a von f_i^y oder f_j^y ist dann M-regulär, ferner $\sigma(f_i^y(\mathfrak{a}), M) = \sigma(f_j^y(\mathfrak{a}), M) = \sigma(a, M)+1$ und $f_i^y(\mathfrak{a}) \neq f_j^y(\mathfrak{a})$. Daher schließt man induktiv, daß $B^r M$ für natürliche Zahlen $r \geqslant 1$ mindestens 2^{r-1} verschiedene Werte von f_i^y und 2^{r-1} verschiedene Werte von f_j^y enthält. Die Gesamtheit aller Werte von f_i^y in $B^r M$ enthält aber kein Bild einer M-singulären Folge, ist also eine mindestens 2^{r-1}-elementige $\mathfrak{K}_Y$-freie Teilmenge von $F(M, \mathfrak{K}_Y)$, also gilt (29).

KOROLLAR 1. *Eine Teilmenge $N \subset F(M, \mathfrak{K}_Y)$ ist genau dann $\mathfrak{K}_Y$-frei, wenn sie $(F(M, \mathfrak{K}_Y))$-frei ist.*

Denn nach Satz 3.3 gilt ja für jede freie Teilmenge $N \subset F(M, \mathfrak{K}_Y)$, falls $M \neq \emptyset$,

$$\mathrm{ind}_{F(M,\mathfrak{K}_Y)} N \supset HUP(\{F(M, \mathfrak{K}_Y)\}) = \mathfrak{K}_Y; \quad F(\emptyset, \mathfrak{K}_Y) = \emptyset \,.$$

Daß jede $\mathfrak{K}_Y$-freie Teilmenge von $F(M, \mathfrak{K}_Y)$ frei ist, ist klar.

KOROLLAR 2. *Eine Menge N ist genau dann $\mathfrak{K}_Y$-Basis von $F(M, \mathfrak{K}_Y)$, wenn sie von $F(M, \mathfrak{K}_Y)$ ist.*

Ein für später sehr nützliches Ergebnis.

Während wir in $\sigma(\mathfrak{a}, M)$ einen ordinalen Abstand der Folge $\mathfrak{a}$ von dem Erzeugendensystem M kennengelernt haben, der Werte zwischen 0 und δ annehmen kann, soll nun für von M erzeugte $\mathfrak{K}_Y$-Algebren ein Abstand der M-regulären und M-singulären Folgen von M definiert werden, der nur natürliche Zahlen als Werte annehmen kann. Dabei sollen im folgenden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_n$ stets M-singuläre, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_n$ die zugeordneten M-regulären Folgen einer von einer Menge M erzeugten $\mathfrak{K}_Y$-Algebra A bezeichnen.

DEFINITION 3.2. Eine Folge $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$ (bzw. $\mathfrak{b}_1$), $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2), \ldots, (\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n)$ heiße eine *M-Kette der Länge n zu* $\mathfrak{a}_1$ (bzw. $\mathfrak{b}_1$), wenn für jedes μ mit $1 < \mu < n-1$ $\mathrm{Bild}\, \mathfrak{a}_{\mu+1} \cap \mathrm{Bild}\, \mathfrak{b}_\mu \neq \emptyset$. Sie heiße *vollständig*, wenn $\mathrm{Bild}\, \mathfrak{b}_n \subset M$; wir wollen dann auch sagen, die M-Kette verbinde $\mathfrak{a}_1$ (bzw. $\mathfrak{b}_1$) mit M.

Jede unvollständige M-Kette kann offenbar "nach unten" verlängert werden. Es ist aber, wie man aus der Definition 3.1 von M-singulären und M-regulären Folgen leicht folgert

$$(\sigma(\mathfrak{a}_1, M) \geqslant) \; \sigma(\mathfrak{b}_1, M) \geqslant \sigma(\mathfrak{a}_2, M) \geqslant \ldots \geqslant \sigma(\mathfrak{a}_n, M) \geqslant \sigma(\mathfrak{b}_n, M)$$

eine fallende Kette von Ordinalzahlen, die einmal abbrechen muß. Nun überlegt man sich leicht, daß eine M-Kette der Länge n genau dann unvollständig ist, wenn $\sigma(\mathfrak{a}_n, M) > 1$ und damit $\sigma(\mathfrak{b}_n, M) > 0$. Da sie sich in diesem Fall noch verlängern läßt und dann $\sigma(\mathfrak{a}_n, M) > \sigma(\mathfrak{a}_{n+1}, M)$ gilt, existiert zu jeder M-Kette eine endliche Vervollständigung. Dies gibt Anlaß zu

DEFINITION 3.3. Sei $\mathfrak{c}$ eine M-singuläre oder M-reguläre Folge in einer von einer Menge M erzeugten $\mathfrak{K}_Y$-Algebra, dann sei

$$\varrho(\mathfrak{c}, M) := \min\{n \mid n \text{ ist Länge einer } M\text{-Kette, die } \mathfrak{c} \text{ mit } M \text{ verbindet}\} \,. \tag{30}$$

Zusammenfassend haben wir also:

SATZ 3.4. a) *Jede M-singuläre Folge $\mathfrak{a}$ bzw. M-reguläre Folge $\mathfrak{b}$ von A hat einen endlichen Abstand $\varrho(\mathfrak{a}, M)$ bzw. $\varrho(\mathfrak{b}, M)$ von M.*

b) *Es ist $\varrho(\mathfrak{a}, M) = 1$ genau dann, wenn $\sigma(\mathfrak{a}, M) = 1$, und es ist $\varrho(\mathfrak{b}, M) = 1$ genau dann, wenn $\sigma(\mathfrak{b}, M) = 0$, d.h.* $\mathrm{Bild}\, \mathfrak{b} \subset M$. *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einander zugeordnet, so ist $\varrho(\mathfrak{a}, M) = \varrho(\mathfrak{b}, M)$ ($\mathfrak{a}$ M-singulär!).*

c) *Ist $\varrho(\mathfrak{a}, M) > 1$, $\mathfrak{a}$ M-singulär, $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{a}$ zugeordnet und* $\mathrm{Bild}\, \mathfrak{b} \cap \mathrm{Bild}\, \bar{\mathfrak{a}} \neq \emptyset$ *für eine M-singuläre Folge $\bar{\mathfrak{a}}$, so ist $\varrho(\bar{\mathfrak{a}}, M) \geqslant \varrho(\mathfrak{a}, M)-1$, wobei für mindestens eine M-singuläre Folge $\bar{\mathfrak{a}}$ das Gleichheitszeichen eintritt.*

Korollar. *Ist* $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1)$ *(bzw.* $\mathfrak{b}_1$*),* $(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2), \ldots, (\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n)$ *eine* M*-Kette, so gilt* $\varrho(\mathfrak{a}_r, M) \leqslant \varrho(\mathfrak{a}_{r+1}, M)+1$ *sowie auch* $\varrho(\mathfrak{b}_r, M) \leqslant \varrho(\mathfrak{b}_{r+1}, M)+1$ *für* $1 \leqslant r \leqslant n-1$*. Ist die Kette vollständig und von minimaler Länge, so gilt überall das Gleichheitszeichen.*

Schließlich gilt noch

Satz 3.5. *Sei* $N \subset \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ *und* $\mathfrak{b}$ *eine* N*-reguläre Folge, die* M*-singulär ist,* $\mathfrak{a}$ *die* $\mathfrak{b}$ *zugeordnete* M*-reguläre Folge, falls sie* N*-singulär ist (sonst werde sie nicht betrachtet); dann sind in jeder* N*-Kette zu* $\mathfrak{b}$ *(bzw.* $\mathfrak{a}$*) alle auftretenden* N*-singulären Folgen* $\mathfrak{a}_r$ M*-regulär und alle zugeordneten* N*-regulären Folgen* $\mathfrak{b}_r$ M*-singulär.*

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{a}_2$ stets M-regulär ist, der Rest folgt induktiv. Nun ist aber $\mathfrak{a}_2 \neq \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}$, $\text{Bild}\,\mathfrak{a}_2 \cap \text{Bild}\,\mathfrak{b}_1 \neq \emptyset$ und $\mathfrak{b}_1$ M-singulär, also muß $\mathfrak{a}_2$ M-regulär sein.

Damit haben wir die Hilfsmittel für die Abschätzung der Mächtigkeiten von Erzeugenden von $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ beisammen.

§ 4. Mächtigkeitsabschätzungen für Erzeugendensysteme.

Es sei M eine nichtleere Menge, $N \subset \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$, dann sollen folgende Abkürzungen eingeführt werden für beliebige Ordinalzahlen α und natürliche Zahlen n:

$$\mathfrak{S}_M N := \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \text{ ist } N\text{-singuläre und } M\text{-reguläre Folge in } CN\},$$
$$\mathfrak{R}_M N := \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} \text{ ist } N\text{-reguläre und und } M\text{-singuläre Folge in } CN\},$$
$$\mathfrak{S}_M^\alpha N := \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{S}_M N,\ \sigma(\mathfrak{a}, N) = \alpha\},$$
$$\mathfrak{R}_M^\alpha N := \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_M N \text{ ist einer Folge } \mathfrak{a} \in \mathfrak{S}_M^\alpha N \text{ zugeordnet}\},$$
$$S_M^\alpha N := \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}_M^\alpha N} \text{Bild}\,\mathfrak{a},$$
$$R_M^\alpha N := \bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_M^\alpha N} \text{Bild}\,\mathfrak{b}, \tag{31}$$
$$\mathfrak{S}_M^{n,\alpha} N := \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in \mathfrak{S}_M N,\ \varrho(\mathfrak{a}, N) = n \text{ und } \sigma(\mathfrak{a}, N) < \alpha\},$$
$$\mathfrak{R}_M^{n,\alpha} N := \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_M N \text{ ist einer Folge } \mathfrak{a} \in \mathfrak{S}_M^{n,\alpha} N \text{ zugeordnet}\},$$
$$S_M^{n,\alpha} N := \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}_M^{n,\alpha} N} \text{Bild}\,\mathfrak{a},$$
$$R_M^{n,\alpha} N := \bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_M^{n,\alpha} N} \text{Bild}\,\mathfrak{b}.$$

Aus den bisher bewiesenen Sätzen lassen sich unmittelbar folgende Ergebnisse zusammenstellen (α, β beliebige Ordinalzahlen, $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl):

(E1) $|\mathfrak{S}_M N| \leqslant |\mathfrak{R}_M N|$.

(E2) $|\mathfrak{S}_M^\alpha N| = |\mathfrak{R}_M^\alpha N|$.

(E3) $|\mathfrak{S}_M^{n,\alpha} N| = |\mathfrak{R}_M^{n,\alpha} N|$.

(E4) *Aus* $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{R}_M N$ *und* $\mathfrak{b}_1 \neq \mathfrak{b}_2$ *folgt* $\text{Bild}\,\mathfrak{b}_1 \cap \text{Bild}\,\mathfrak{b}_2 = \emptyset$*, für* $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{S}_M N$ *ist i.a. nur richtig, wenn* N $\mathfrak{K}_Y$*-frei ist.*

(E5) *Aus* $\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_M^{n+1,\alpha} N$ *folgt* $\text{Bild}\,\mathfrak{b} \cap S_M^{n,\alpha} N \neq \emptyset$*; wenn* $\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_M^{1,\alpha} N$*, so* $\text{Bild}\,\mathfrak{b} \subset N$.

(E6) $R_M^\alpha N \subset N \cup \bigcup_{\beta<\alpha} S_M^\beta N$ (vgl. Definition 3.1 und Satz 3.1, Korollar 5).

(E7) *Aus* $\alpha \neq \beta$ *folgt* $R_M^\alpha N \cap R_M^\beta N = \emptyset$ (vgl. (E4)).

(E8) *Alle Elemente von* $\mathfrak{R}_M N$ *(also auch von* $\mathfrak{R}_M^\alpha N$ *und* $\mathfrak{R}_M^{n,\alpha} N$*) sind Folgen ohne Wiederholungen; falls* N $\mathfrak{K}_Y$-frei ist, gilt dies auch für die *Elemente von* $\mathfrak{S}_M N$.

Wir machen jetzt folgende Voraussetzung:

(32) *Sei* $\mathfrak{m} \in \boldsymbol{K}$, $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ *additiv unerreichbar und für alle* $y \in Y$ $\mathfrak{k}_y < \mathfrak{m}$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{l}_y < \mathfrak{m}$. $\omega(\mathfrak{m}) = :\omega$ *sei die zur Mächtigkeit* $\mathfrak{m}$ *gehörige ordinale Anfangszahl, d.h. die kleinste Ordinalzahl* ω' *mit* $|\omega'| = \mathfrak{m}$. $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ *sei eine weitere Kardinalzahl,* $M \neq \emptyset$ *eine beliebige Menge und* $N \subset \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ *eine Teilmenge mit* $|N| = \mathfrak{n}$.

Hilfssatz 4.1. *Unter den Voraussetzungen* (32) *gilt für* $0 < \alpha < \omega$:

$$|S_M^\alpha N| < \mathfrak{m}, \tag{33}$$

$$|\mathfrak{R}_M^\alpha N| < \mathfrak{m} \quad \textit{und} \quad |\text{Bild}\,\mathfrak{b}| < \mathfrak{m} \quad \textit{für alle } \mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_M^\alpha N. \tag{34}$$

Beweis (durch transfinite Induktion). $S_M^0 N = \mathfrak{R}_M^0 N = \emptyset$. Gelten (33) und (34) für alle $\beta < \gamma$, wobei $0 < \gamma < \omega$, so gilt wegen (E6) $|R_M^\gamma N| \leqslant |N| + \sum_{\beta<\gamma} |S_M^\beta N| < \mathfrak{m}$, da $\mathfrak{m}$ additiv unerreichbar ist. Mit (E4) und (E6) folgt daraus sofort (34) für $\alpha = \gamma$. Da $\mathfrak{k}_y < \mathfrak{m}$ genau dann, wenn $\mathfrak{l}_y < \mathfrak{m}$ (nach (32)), fogt aus (34) auch $|\text{Bild}\,\mathfrak{a}| < \mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}_M^\gamma N$. Aus (E2) und (34) für $\alpha = \gamma$ ergibt sich $|\mathfrak{S}_M^\gamma N| = |\mathfrak{R}_M^\gamma N| < \mathfrak{m}$, also, da $\mathfrak{m}$ additiv unerreichbar ist, $|S_M^\gamma N| \leqslant \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}_M^\gamma N} |\text{Bild}\,\mathfrak{a}| < \mathfrak{m}$, somit (33) für $\alpha = \gamma$.

Korollar. *Unter den Voraussetzungen* (32) *gilt:*

(35) *Aus* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}_M N$ *und* $\sigma(\mathfrak{a}, N) < \omega$ *(d.h.* $\mathfrak{a} \in \bigcup_{\beta<\omega} \mathfrak{S}_M^\beta N$*) folgt* $|\text{Bild}\,\mathfrak{a}| < \mathfrak{m}$;

(36) *Aus* $\mathfrak{b} \in \bigcup_{\beta<\omega} \mathfrak{R}_M^\beta N$ *folgt* $|\text{Bild}\,\mathfrak{b}| < \mathfrak{m}$;

(37) *Aus* $\mathfrak{a} \in \bigcup_{0<n<\omega_0} \mathfrak{S}_M^{n,\omega} N$ bzw. $\mathfrak{b} \in \bigcup_{0<n<\omega_0} \mathfrak{R}_M^{n,\omega} N$ *folgt* $|\text{Bild}\,\mathfrak{a}| < \mathfrak{m}$ *bzw.* $|\text{Bild}\,\mathfrak{b}| < \mathfrak{m}$. (Umformulierung von (35) und (36)).

Hilfssatz 4.2. *Unter den Voraussetzungen* (32) *gilt für* $0 < n < \omega_0$:

$$|\mathfrak{S}_M^{n,\omega} N| < \mathfrak{m} \quad \textit{und} \quad |S_M^{n,\omega} N| < \mathfrak{m}; \tag{38}$$

$$|\mathfrak{R}_M^{n,\omega} N| < \mathfrak{m} \quad \textit{und} \quad |R_M^{n,\omega} N| < \mathfrak{m}. \tag{39}$$

Beweis (durch vollständige Induktion). Aus Satz 3.4 folgt $R_M^{1,\omega} N \subset N$, somit $|R_M^{1,\omega} N| < \mathfrak{m}$, mit (E4) und (E3) also $|\mathfrak{R}_M^{1,\omega} N| = |\mathfrak{S}_M^{1,\omega} N| < \mathfrak{m}$; da $\mathfrak{m}$ additiv unerreichbar ist, kann mit (37) daraus auf $|S_M^{1,\omega} N| = |\bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}_M^{1,\omega} N} \mathrm{Bild}\,\mathfrak{a}| < \mathfrak{m}$ geschlossen werden. (38) und (39) seien richtig für alle natürlichen Zahlen $\leqslant n$ $(n \geqslant 1)$. Aus $\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_M^{n+1,\omega} N$ folgt mit (E5) $\mathrm{Bild}\,\mathfrak{b} \cap S_M^{n,\omega} N \neq \emptyset$; wegen (E4) kann man über eine Auswahlfunktion damit eine injektive Abbildung von $\mathfrak{R}_M^{n+1,\omega} N$ in $S_M^{n,\omega} N$ angeben. Aus der Induktionsannahme und (E3) folgt dann $|\mathfrak{R}_M^{n+1,\omega} N| = |\mathfrak{S}_M^{n+1,\omega} N| < \mathfrak{m}$. Mit (37) folgen daraus (39) und (38) für $n+1$ anstelle von n.

Hilfssatz 4.3. *Unter den Voraussetzungen* (32) *gilt:*

$$|N \cup \bigcup_{\alpha<\omega} S_M^{\alpha} N| < \mathfrak{m}\,. \tag{40}$$

Beweis. Es ist $N \cup \bigcup_{\alpha<\omega} S_M^{\alpha} N = N \cup \bigcup_{0<n<\omega_0} S_M^{n,\omega} N$, wegen (38) gilt also im Falle $\mathfrak{m} > \aleph_0$, da $\mathfrak{m}$ additiv unerreichbar ist:

$$|N \cup \bigcup_{0<n<\omega_0} S_M^{n,\omega} N| \leqslant |N| + \sum_{0<n<\omega_0} |S_M^{n,\omega} N| < \mathfrak{m}\,, \quad \text{also (40)}\,.$$

Sei nun $\mathfrak{m} = \aleph_0$. Dann ist $\omega = \omega_0$, und $\mathfrak{n} = |N|$, und alle Mengen, die in (33) bis (39) abgeschätzt worden sind, sind endlich, insbesondere $S_M^{n,\omega} N$ und $R_M^{n,\omega} N$ $(0 < n < \omega_0)$; daher existieren $a_0 := \max\{\sigma(a, M) \mid a \in N\}$ und $a_n := \max\{\sigma(a, M) \mid a \in S_M^{n,\omega} N\}$ $(0 < n < \omega_0)$, wobei $a_n = 0$, falls $N = \emptyset$ bzw. $S_M^{n,\omega} N = \emptyset$. Für $N = \emptyset$ ist nichts zu zeigen, sei also $N \neq \emptyset$. Wir zeigen dann: Ist $S_M^{n,\omega} N \neq \emptyset$, so ist $a_n < a_{n-1}$.

Denn es ist ja $\mathfrak{R}_M^{n,\omega} N$ eine Menge M-singulärer Folgen, deren Bilder mit N bzw. $S_M^{n-1,\omega} N$ einen nichtleeren Durchschnitt haben. Daher gilt $\beta_n := \max\{\sigma(b, M) \mid b \in R_M^{n,\omega} N\} \leqslant a_{n-1}$ (man beachte, daß $\sigma(\mathfrak{b}, M) = \sigma(b, M)$ für alle $b \in \mathrm{Bild}\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_M^{n,\omega} N$). Mit Korollar 2 zu Satz 3.1 kann man also schließen, daß $a_n < \beta_n \leqslant a_{n-1}$. Da man sich andererseits leicht überlegt, daß aus $a_n = 0$ (für ein $n > 0$) $S_M^{k,\omega} N = \emptyset$ für alle $k > n$ folgt, gilt: $a_0 > a_1 > \ldots > a_n > \ldots$ ist eine fallende Folge von Ordinalzahlen, die also stationär werden muß; dies tritt genau dann ein, wenn $a_n = 0$ für ein $n \geqslant 0$; es gibt also eine natürliche Zahl k, so daß $S_M^{n,\omega} N = \emptyset$ für alle $n > k$. Somit gilt auch für $\mathfrak{m} = \aleph_0$:

$$|N \cup \bigcup_{0<n<\omega_0} S_M^{n,\omega} N| \leqslant |N| + \sum_{0<n<\omega_0} |S_M^{n,\omega} N| < \mathfrak{m} = \aleph_0\,.$$

Korollar 1. *Unter den Voraussetzungen* (32) *gibt es eine Ordinalzahl* γ *mit* $0 < \gamma < \omega$, *so daß*

$$S_M^{\alpha} N = \emptyset \quad \textit{für alle Ordinalzahlen } \alpha > \gamma\,. \tag{41}$$

Beweis. Ist $S_M^{\beta} N = \emptyset$ für ein $\beta > 0$, so gilt offensichtlich $S_M^{\alpha} N = \emptyset$ für alle $\alpha \geqslant \beta$. Wäre nun $S_M^{\alpha} N \neq \emptyset$ für alle α mit $0 < \alpha < \omega$, so wäre $|N \cup \bigcup_{\alpha<\omega} S_M N| \geqslant |\omega| = \mathfrak{m}$ im Widerspruch zu (40); also gilt (41).

Korollar 2. *Unter den Voraussetzungen* (32) *gilt*

$$\mathfrak{S}_M N = \bigcup_{\beta<\omega} \mathfrak{S}_M^{\beta} N\,, \quad \textit{d.h.} \quad N \cup \bigcup_{\beta} S_M^{\beta} N = N \cup \bigcup_{\beta<\omega} S_M^{\beta} N\,. \tag{42}$$

Damit erhalten wir als entscheidenden Satz für die Abschätzungen von Erzeugendensystemen von $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$:

Satz 4.1. *Ist* $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ *eine additiv unerreichbare Kardinalzahl und für alle* $y \in Y$ $\mathfrak{k}_y < \mathfrak{m}$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{l}_y < \mathfrak{m}$, *ist* M *eine beliebige Menge und* $N \subset \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ *mit* $|N| =: \mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ (vgl. (32)), *so gilt*

$$|M \cap \boldsymbol{C}N| < \mathfrak{m}\,. \tag{43}$$

Denn aus Satz 3.2 folgt zusammen mit Hilfssatz 4.3 und seinen Korollaren

$$|M \cap \boldsymbol{C}N| \leqslant |N \cup \bigcup_{\alpha} S_M^{\alpha} N| = |N \cup \bigcup_{\alpha<\omega} S_M^{\alpha} N| < \mathfrak{m}\,.$$

Daraus läßt sich sofort folgern:

Korollar 1. *Gilt unter den Voraussetzungen von Satz* 4.1 *noch* $|M| \geqslant \mathfrak{m}$, *so kann* N $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ *nicht erzeugen:* $\boldsymbol{C}N \neq \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$.

Korollar 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 4.1 *können* $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{K}_Y)$ *und* $\boldsymbol{F}(\mathfrak{n}, \mathfrak{K}_Y)$ *nicht isomorph sein, d.h.* $\mathfrak{n} \notin R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{m})$ *für alle* $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$.

Um die Verhältnisse für endliche Kardinalzahlen übersehen zu können, sind noch zusätzliche Überlegungen notwendig; dazu dienen die folgenden Sätze.

Satz 4.2. *Es sei* $\mathfrak{k} := \min\{\mathfrak{k}_y, \mathfrak{l}_y \mid y \in Y\}$ ($\mathfrak{k}$ *existiert, da* $\boldsymbol{K}$ *wohlgeordnet ist!*), $N \subset \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ *eine Basis; dann gilt:*

$$N = M \quad \textit{oder} \quad |N| \geqslant \mathfrak{k}\,. \tag{44}$$

Beweis. Nach Korollar 2 zu Satz 3.3 ist N $\mathfrak{K}_Y$-Basis von $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$. Aus den Korollaren 2 und 3 zu Satz 3.2 folgt daher (44), da im Falle $N \neq M$ eine M-singuläre Folge $\mathfrak{a}$ existiert mit $N \supset \mathrm{Bild}\,\mathfrak{a}$: Wegen $|\mathrm{Bild}\,\mathfrak{a}| \geqslant \mathfrak{k}$ gilt auch $|N| \geqslant \mathfrak{k}$.

Korollar. *Ist in Satz* 4.2 $|M| < \mathfrak{k}$, *so ist* M *die einzige Basis von* $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$; *insbesondere gilt dann also* $R_{\mathfrak{K}_Y}(|M|) = \{|M|\}$.

Hilfssatz 4.4. N *sei eine Basis von* $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ *und* $M \neq \emptyset \neq N$. *Mit den Bezeichnungen* (31) *gilt dann*

$$N_r := (N \cup \bigcup_{\mu=0}^{r} S_M^{\mu} N) - (\bigcup_{\mu=0}^{r} R_M^{\mu} N) \tag{45}$$

ist für $0 \leqslant r < \omega_0$ *eine Basis von* $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$.

Beweis durch vollständige Induktion. $N_0 = N$ ist nach Voraussetzung Basis. Sei also N_r Basis für ein $r \geqslant 0$. Dann ist zu zeigen, daß auch N_{r+1} Basis ist. Nun ist nach (E6) $R_M^{r+1} N \subset N \cup \bigcup_{\mu=0}^{r} S_M^{\mu} N$, und aus (E7) folgt $R_M^{r+1}N \cap \bigcup_{\mu=0}^{r} R_M^{\mu}N = \emptyset$, also $R_M^{r+1}N \subset N_r$. Da M und N $\mathfrak{K}_Y$-Basen sind, gilt auch $(N \cup \bigcup_{\mu=0}^{r} S_M^{\mu}N) \cap S_M^{r+1}N = \emptyset$, also $R_M^{r+1}N \cap \cap S_M^{r+1}N = \emptyset$, daher $N_{r+1} = (N_r - R_M^{r+1}N) \cup S_M^{r+1}N$ und $N_r \subset \boldsymbol{C}N_{r+1}$. Da $\mathfrak{R}_M^{r+1}N$ und $\mathfrak{S}_M^{r+1}N$ aus einander zugeordneten Folgen bestehen, zeigt man jetzt leicht, daß jede Abbildung von N_{r+1} in $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ zu einem Homomorphismus fortgesetzt werden kann, indem man unter Benutzung der Gleichungen (18) eine $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$-Belegung von N_r definiert, die nach Voraussetzung dann homomorph fortgesetzt werden kann und deren Fortsetzung auf N_{r+1} mit der dort gegebenen Abbildung übereinstimmt. Man beachte dabei, daß die Folgen, deren Bilder dabei gegeneinander ausgetauscht werden, keine Wiederholungen besitzen und daß ihre Bilder paarweise disjunkt sind; denn M und N sind $\mathfrak{K}_Y$-Basen. N_{r+1} ist also auch Basis von $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$.

Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 4.4 ist N_r $\mathfrak{K}_Y$-Basis von $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ $(0 \leqslant r < \omega_0)$.*

Hilfssatz 4.5. *Sei N Basis von $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ und $M \neq \emptyset \neq N$, ferner existiere genau ein $y_0 \in Y$ mit $0 < \mathfrak{k}_{y_0} =: k < \aleph_0$, und für dieses gelte $\mathfrak{l}_{y_0} =: l < \aleph_0$. Ferner sei $|M| < \aleph_0$. Dann gilt $|N_r| < \aleph_0$* (vgl. (45)) $(0 \leqslant r < \omega_0)$, *und für $d := l - k = \mathfrak{l}_{y_0} - \mathfrak{k}_{y_0}$ ist*

$$|N_r| \equiv |N_t| \ (\mathrm{mod}\, d) \qquad (0 \leqslant r,\ t < \omega_0)\,. \tag{46}$$

Beweis. Setzen wir $\mathfrak{m} := \aleph_0$, $|M| =: \mathfrak{n}$, so sind für $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die Voraussetzungen (32) erfüllt, und aus Korollar 2 zu Satz 4.1 folgt $|M| \notin R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{m})$. Da aber $|N_r| \in R_{\mathfrak{K}_Y}(|M|)$ $(0 \leqslant r < \omega_0)$, muß auch $|N_r| < \aleph_0$ gelten. Da nun bei einem Übergang von N_r zu N_{r+1} gemäß (45) Mengen einer Mächtigkeit k bzw. l gegen solche einer Mächtigkeit l bzw. k ausgetauscht werden, gilt $|N_r| \equiv |N_{r+1}|$ $(\mathrm{mod}\, d)$ $(0 \leqslant r < \omega_0)$, woraus (46) unmittelbar folgt.

Korollar 1. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 4.5 existiert eine Zahl r mit $0 \leqslant r < \omega_0$, so daß $N_r = M$.*

Beweis. Nach Korollar 1 zu Hilfssatz 4.3 gilt $S_M^{\tau}N = \emptyset$ für alle Ordinalzahlen $\tau \geqslant \beta$ mit einer geeigneten Ordinalzahl β zwischen 0 und ω_0. Da dann aber nach Satz 3.2 $M \subset N \cup \bigcup_{\tau=0}^{\beta} S_M^{\tau}N$, andererseits $M \cap \bigcup_{\tau=0}^{\beta} R_M^{\tau}N = \emptyset$, weil alle Folgen $\mathfrak{b} \in \bigcup_{\tau=0}^{\beta} \mathfrak{R}_M^{\tau}N$ M-singulär sind, gilt $M \subset (N \cup \bigcup_{\tau=1}^{\beta} S_M^{\tau}N) - (\bigcup_{\tau=1}^{\beta} R_M^{\tau}N) = N_\beta$, somit $M = N_\beta$, da N_β Basis von $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ ist.

Korollar 2. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 4.5 gilt $|N| \equiv |M|$ $(\mathrm{mod}\, d)$ für jede Basis N von $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$.*

Korollar 3. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 4.5 folgt aus $|M| = k$ und $W \subset \boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ mit $k < |W| < l$, daß W keine Basis von $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{K}_Y)$ sein kann.*

Damit haben wir bewiesen:

Satz 4.3. *Es existiere genau ein $y_0 \in Y$ mit $\mathfrak{k}_{y_0} =: k < \aleph_0$, und für dieses gelte $l := \mathfrak{l}_{y_0} < \aleph_0$. Dann gilt für alle $\mathfrak{m} \in \boldsymbol{K}$ mit $\mathfrak{m} < \aleph_0$:*

$$R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{m}) = \begin{cases} \{\mathfrak{m}\}\,, & \textit{falls } \mathfrak{m} < k\,, \\ \{p + s(l-k) \mid 0 \leqslant s < \omega_0\}\,, & \textit{falls } k \leqslant \mathfrak{m} < \aleph_0\,,\ k \leqslant p < l \\ & \textit{und } \mathfrak{m} \equiv p \ \left(\mathrm{mod}\ (l-k)\right). \end{cases} \tag{47}$$

Dieser Satz ist nämlich für $\mathfrak{m} < k$ eine Folge des Korollars von Satz 4.2; für $k \leqslant \mathfrak{m} < \aleph_0$ folgt er aus Hilfssatz 4.5 mit seinen Korollaren unter Berücksichtigung von Korollar 1 zu Satz 1.1.

Damit sind die allgemeinen Untersuchungen der Mächtigkeiten von Basen und Erzeugendensystemen $\mathfrak{K}_Y$-frei erzeugter $\mathfrak{K}_Y$-Algebren abgeschlossen, und wir können uns der Lösung der ersten beiden Probleme zuwenden.

§ 5. Lösung der Probleme 1 und 2.

Hauptsatz. *R sei eine beliebige beschränkte totaladditive Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$. Dann existiert eine nichttriviale primitive Klasse $\mathfrak{A}$ vollständiger Algebren, so daß die von $\mathfrak{A}$ in $\boldsymbol{K}$ induzierte Äquivalenzrelation $R_{\mathfrak{A}}$ (vgl. (1)) mit R identisch ist: $R = R_{\mathfrak{a}}$.*

Beweis. Ist $R = \mathrm{id}_{\boldsymbol{K}}$, so sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} :=$ Klasse aller vollständigen Algebren eines beliebigen Typus Δ. $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A})$ ist dann jeweils die von der Menge M absolut frei erzeugte Peano-Algebra vom Typus Δ, und es gilt: $\boldsymbol{F}(M, \mathfrak{A}) \cong \boldsymbol{F}(N, \mathfrak{A})$ genau dann, wenn $|M| = |N|$, also $R = R_{\mathfrak{A}}$. Ist $R \neq \mathrm{id}_{\boldsymbol{K}}$, so ist $R = S_{m,n} \cup \bigcup_{t \in T} R_{\mathfrak{m}_t, \mathfrak{n}_t}$ (bzw. $R = \bigcup_{t \in T} R_{\mathfrak{m}_t, \mathfrak{n}_t}$) (vgl. (R5), Seite 170). Dann läßt sich R gemäß (R6) durch eine Menge Y abgeschlossener Intervalle von $\boldsymbol{K}$ beschreiben. Eine solche Menge Y soll jetzt betrachtet werden. Aus (R6) und Satz 1.3 folgt dann für die gemäß § 2 zu Y definierte primitive Klasse $\mathfrak{K}_Y$ (wegen $R \neq \mathrm{id}_{\boldsymbol{K}}$ lassen sich (Y1) bis (Y4) für dieses Y erfüllen!): $R \subset R_{\mathfrak{K}_Y}$, d.h. $R(\mathfrak{m}) \subset R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{m})$ für alle $\mathfrak{m} \in K$. Sei nun z.B. $R = S_{m,n} \cup \bigcup_{t \in T} R_{\mathfrak{m}_t, \mathfrak{n}_t}$ (falls (6) vorliegt, geht man analog vor!), dann folgt aus (R6) und Satz 4.3 sofort $R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{m}) = R(\mathfrak{m})$ für alle $\mathfrak{m} \in \boldsymbol{K}$ mit $\mathfrak{m} < \aleph_0$. Sei also $\mathfrak{r} \geqslant \aleph_0$ eine beliebige Kardinalzahl, $\mathfrak{r} := \inf_{\mathfrak{n} \in R(\mathfrak{r})} \mathfrak{n}$, $\mathfrak{s} := \sup_{\mathfrak{n} \in R(\mathfrak{r})} \mathfrak{n}$. Im Falle $\mathfrak{s} \in R(\mathfrak{r})$ treffen auf $\mathfrak{m} := \mathfrak{s}^+$ und $\mathfrak{n} := \mathfrak{r}$ die Voraussetzungen von Satz 4.1 zu ($\mathfrak{s}^+ \geqslant \aleph_0$ ist immer additiv unerreichbar), im Falle $\mathfrak{s} \notin R(\mathfrak{r})$ sogar schon für $\mathfrak{m} := \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{n} := \mathfrak{r}$ (denn nach (R1) muß $\mathfrak{s}$ dann additiv unerreichbar sein); denn Y ist ja dementsprechend zu R definiert worden. Somit gilt $\mathfrak{r} \notin R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{s}^+)$ bzw. $\mathfrak{r} \notin R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{s})$, also (vgl. (R2))

$\mathfrak{z} \notin R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{r})$ für alle $\mathfrak{z} \in \boldsymbol{K}$ mit $\mathfrak{z} > \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{z} \notin R(\mathfrak{r})$. Ist $\mathfrak{i}$ additiv unerreichbar, so ist wiederum Satz 4.1 mit seinen Korollaren anwendbar, also $\mathfrak{z} \notin R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{i}) = R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{r})$ für alle $\mathfrak{z} < \mathfrak{i}$. Sei also $\mathfrak{i}$ additiv erreichbar, d.h. insbesondere $\mathfrak{i} > \aleph_0$. Da R totaladditiv ist, gibt es keine Kardinalzahl $\mathfrak{z} < \mathfrak{i}$, so daß $[\![\mathfrak{z}, \mathfrak{i}[\![\subset R(\mathfrak{z})$. Ist daher $\mathfrak{q} < \mathfrak{i}$ mit $\mathfrak{q} \geqslant \aleph_0$, so ist $\mathfrak{q} \leqslant \sup_{\mathfrak{f} \in R(\mathfrak{q})} \mathfrak{f} = : \mathfrak{s}' < \mathfrak{i}$. Wie für $\mathfrak{s}$ folgert man $\mathfrak{i} \notin R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{q})$, woraus mit (R2) wiederum $\mathfrak{q} \notin R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{r})$ folgt für alle $\mathfrak{q} < \mathfrak{i}$. Insgesamt gilt also auch $R_{\mathfrak{K}_Y}(\mathfrak{r}) \subset R(\mathfrak{r})$ für alle $\mathfrak{r} \in \boldsymbol{K}$, womit schließlich $R = R_{\mathfrak{K}_Y}$ nachgewiesen ist.

Die vollständige Lösung von Problem 1 erhalten wir damit in:

KOROLLAR 1. *Für eine Äquivalenzrelation R von $\boldsymbol{K}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *R ist beschränkt und totaladditiv;*

2) *es existiert eine nichttriviale primitive Klasse $\mathfrak{A}$ vollständiger Algebren, so daß $R = R_{\mathfrak{A}}$;*

3) *es existiert eine nichttriviale primitive Klasse $\mathfrak{A}$ von (nicht notwendig vollständigen) Algebren, so daß $R = R_{\mathfrak{A}}$.*

Ist R eine beschränkte und totaladditive Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$ und $\mathfrak{A}$ eine primitive Klasse mit $R = R_{\mathfrak{A}}$, so ist für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m} \in \boldsymbol{K}$ $R(\mathfrak{m})$ gerade die Klasse aller Mächtigkeiten der $\mathfrak{A}$-Basen einer $\mathfrak{A}$-Algebra A, die eine $\mathfrak{A}$-Basis der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ besitzt. Aus Satz 3.3 mit seinen Korollaren, dem Korollar 2 zu Satz 1.2 sowie der Struktur der zum Beweis des Hauptsatzes benutzten primitiven Klassen $\mathfrak{K}_Y$ folgert man über Korollar 1 hinaus das

KOROLLAR 2. *R sei eine Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *R ist totaladditiv und beschränkt;*

2) *es existiert eine nichttriviale primitive Klasse $\mathfrak{A}$ vollständiger Algebren, so daß für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m} \in \boldsymbol{K}$ $R(\mathfrak{m})$ gerade die Klasse aller Mächtigkeiten der Basen (nicht nur $\mathfrak{A}$-Basen!) von $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A})$ ist;*

3) *es existiert eine nichttriviale primitive Klasse $\mathfrak{A}$ von (nicht notwendig vollständigen) Algebren, so daß für jede Kardinalzahl $\mathfrak{m} \in \boldsymbol{K}$ $R(\mathfrak{m})$ gerade die Klasse aller Mächtigkeiten der Basen von $\boldsymbol{F}(\mathfrak{m}, \mathfrak{A})$ ist.*

Nach Korollar 2 zu Satz 1.2 kann nur eine beschränkte Restklasse einer Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$ als Klasse aller Mächtigkeiten der Basen einer geeigneten Algebra A auftreten, und sie kann dann auch als Restklasse einer beschränkten totaladditiven Äquivalenzrelation angesehen werden. In Korollar 2 steckt daher schon die Lösung des zweiten Problems:

KOROLLAR 3. *Für eine Teilklasse T von $\boldsymbol{K}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *T ist Restklasse einer beschränkten totaladditiven Äquivalenzrelation in $\boldsymbol{K}$;*

2) *T ist die Klasse aller Mächtigkeiten der Basen einer geeigneten vollständigen Algebra;*

3) *T ist die Klasse aller Mächtigkeiten der Basen einer geeigneten (nicht notwendig vollständigen) Algebra.*

Literaturverzeichnis

[1] H. Bachmann, *Transfinite Zahlen; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Berlin 1955.

[2] P. Burmeister, *Zu den totaladditiven Äquivalenzrelationen der Kardinalzahlreihe*, Zeitschr. f. math. Logik u. Grundlagen d. Math. (im Druck).

[3] — und J. Schmidt, *Über die Dimension einer partiellen Algebra mit endlichen oder unendlichen Operationen II*, ibidem (im Druck).

[4] C. J. Everett, *Vector spaces over rings*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), S. 312-316.

[5] A. Goetz und C. Ryll-Nardzewski, *On bases of abstract algebras*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 8 (1960), S. 157-161.

[6] B. Jónsson und A. Tarski, *Two general theorems concerning free algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), S. 554.

[7] R. Kerkhoff, *Eine Konstruktion absolut freier Algebren*, Math. Ann. 158 (1965), S. 109-112.

[8] E. Marczewski, *Independence and homomorphisms in abstract algebras*, Fund. Math. 50 (1961), S. 45-61.

[9] J. Schmidt, *Mengenlehre I*, B. I. Hochschultaschenbücher Bd. 56 Mannheim 1966 (im Druck).

[10] — *Algebraic operations and algebraic independence in algebras with infinitary operations*, Math. Japon. 6 (1962), S. 77-112.

[11] — *Die Charakteristik einer allgemeinen Algebra I*, Arch. Math. 13 (1962), S. 457-470.

[12] — *Die Charakteristik einer Halbgruppe*, ibidem 16 (1965), S. 407-411.

[13] — *Concerning some theorems of Marczewski on algebraic independence*; Colloq. Math. 13 (1964), S. 11-15.

[14] — *Über die Dimension einer partiellen Algebra mit endlichen oder unendlichen Operationen (I)*, Zeitschr. f. math. Logik u. Grundlagen d. Math. 11 (1965), S. 227-239.

[15] — *Die überinvarianten und verwandte Kongruenzrelationen einer allgemeinen Algebra*; Math. Ann. 158 (1965), S. 131-157.

[16] — *A general existence theorem on partial algebras and its special cases*; Colloq. Math. 14 (1966), S. 73-87.

[17] — *Ausarbeitung eines 1961/62 an der Universität Köln abgehaltenen Seminars über Allgemeine Algebra.*

[18] — *Allgemeine Algebra; Ausarbeitung einer im Wintersemester 1965/66 an der Universität Bonn gehaltenen Vorlesung.*

[19] J. Słomiński, *The theory of abstract algebras with infinitary operations*, Rozprawy Mat. 18, Warszawa 1959.

[20] — *A theory of extensions of quasi-algebras to algebras*; Rozprawy Mat. 40, Warszawa 1964.

[21] S. Świerczkowski, *On isomorphic free algebras*, Fund. Math. 50 (1961), S. 35-44.

Reçu par la Rédaction le 1. 4. 1967