Quotienten geordneter Räume und Folgenkonvergenz

von

Horst Herrlich (Berlin)

X sei ein topologischer Raum. Es wird gezeigt, daß die beiden folgenden Probleme äquivalent sind:

PROBLEM 1. Kennt man alle konvergenten Moore–Smith-Folgen von X und ihre Limites, so kennt man die Topologie von X. (Ist X T_1-Raum, so genügt sogar die Kenntnis aller konvergenten Moore–Smith-Folgen alleine.) Dagegen liefert die Kenntnis aller konvergenten Folgen von X und deren Limites nach S. P. Franklin [1] nur dann vollständige Informationen über die Topologie von X, wenn X Quotient eines metrischen Raumes ist. Das legt die folgende Fragestellung nahe: Wann ist die Topologie von X durch die Kenntnis aller konvergenten Moore–Smith-Folgen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ mit wohlgeordneter Indexmenge Λ (kurz: aller wohlgeordneten Folgen) und deren Limites bestimmt?

Zur schärferen Fassung des Problems werde definiert:

1. Für jede Teilmenge A von X sei $\operatorname{Lim} A$ die Menge der Limites aller wohlgeordneten Folgen aus A.

2. X heiße *folgenbestimmt*, wenn jede Teilmenge A von X mit $\operatorname{Lim} A \subset A$ abgeschlossen ist.

3. X heiße *stark folgenbestimmt*, wenn $\bar{A} = \operatorname{Lim} A$ für jede Teilmenge A von X gilt.

Jeder stark folgenbestimmte Raum ist offenbar folgenbestimmt. Die Umkehrung gilt nicht (siehe Bemerkung 2).

PROBLEM 2. X heißt *ordnungsfähig*, wenn die Topologie von X die Ordnungstopologie einer passenden Totalordnung R von X ist. Das Paar (X, R) heißt *geordneter Raum*.

Von verschiedenen Autoren wurde die Frage untersucht, wann ein Raum stetiges Bild bestimmter geordneter Räume ist. Hier geht es um folgendes Problem: Wie lassen sich die Quotienten geordneter Räume charakterisieren?

LEMMA. *Gibt es im Raum X einen Punkt x, so daß $Y = X - \{x\}$ diskret ist und sich so zu einer wohlgeordneten Folge $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ anordnen läßt,* *daß die Mengen $X_\lambda = \{x\} \cup \{x_\mu, \mu > \lambda\}$ für $\lambda \in \Lambda$ eine Umgebungsbasis von x bilden, so ist X ordnungsfähig.*

Beweis. Zunächst läßt sich jede Menge so total ordnen, daß sie bzw. die zugehörige Ordnungstopologie diskret ist. Besitzt Y ein größtes Element (oder ist Y leer), so ist damit alles gezeigt. Andernfalls gibt es eine konfinale Teilmenge Λ_1 von Λ, deren Ordnungstyp eine reguläre Anfangszahl ω_a ist. Durch $f(\lambda) = \mathrm{Min}\{\mu\colon \mu \in \Lambda_1, \mu \geqslant \lambda\}$ wird eine Abbildung f von Λ auf Λ_1 definiert, Für jedes $\lambda \in \Lambda_1$ existiert eine totale Ordnung $<_\lambda$ von $\Lambda_\lambda = f^{-1}(\lambda)$, so daß Λ_λ bez. $<_\lambda$ ein erstes und ein letztes Element besitzt und bez. der zugehörigen Ordnungstopologie diskret ist. ν sei der Ordnungstyp der ganzen Zahlen, J eine durch $\lesssim$ total geordnete Menge vom Ordnungstyp ω_a, falls $\omega_a = \omega$ gilt, vom Ordnungstyp $\nu \cdot \omega_a$, falls $\omega_a \neq \omega$ gilt. g sei eine bijektive Abbildung von Λ_1 auf J. Setzt man $x_\mu \leqslant x_k$ genau dann, wenn $gf(x_\mu) \lesssim gf(x_k)$ oder gleichzeitig $f(x_\mu) = f(x_k) = \lambda$ und $x_\mu <_\lambda x_k$ gilt, so erhält man eine totale Ordnung $\leqslant$ auf Y. Fügt man x als letztes Element hinzu, so erhält man eine Ordnung $\leqslant$ auf X, die mit der Topologie von X verträglich ist. X ist somit ordnungsfähig.

Satz 1. *Ist X ein topologischer Raum, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *X ist Quotient eines geordneten Raumes.*

(b) *X ist Quotient eines Raumes, in dem jeder Punkt eine (bez. der Inklusion dual) wohlgeordnete Umgebungsbasis besitzt.*

(c) *X ist folgenbestimmt.*

Beweis. (a)$\vee$(b)$\Rightarrow$(c). Ist X ein geordneter Raum oder ein Raum, in dem jeder Punkt eine wohlgeordnete Umgebungsbasis besitzt, so ist X offenbar folgenbestimmt. Sei jetzt Y folgenbestimmt, f eine Quotientenabbildung von Y auf einen Raum Z. Ist A eine Teilmenge von Z mit $\mathrm{Lim} A \subset A$, und setzt man $B = f^{-1}[A]$, so gilt $\mathrm{Lim} B \subset B$. Folglich ist B abgeschlossen in Y, A also abgeschlossen in Z. Somit ist Z folgenbestimmt.

(c)$\Rightarrow$(a)$\wedge$(b). Ist X ein folgenbestimmter Raum, x ein Punkt von X und $F = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine gegen x konvergente wohlgeordnete Folge in X, so läßt sich die Menge $\{x\} \cup \{x_\lambda;\ \lambda)\colon \lambda \in \Lambda\}$ in naheliegender Weise so topologisieren, daß man einen Raum $X(F, x)$ erhält, der die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt und somit die Eigenschaften (a) und (b) besitzt. Ist Y die topologische Summe aller $X(F, x)$, wobei x alle Punkte von X und F alle gegen x konvergenten wohlgeordnete Folgen durchläuft, so läßt sich in natürlicher Weise eine Abbildung f von Y aus X konstruieren. Diese ist immer stetig. Sie ist genau dann Quotientenabbildung, wenn X folgenbestimmt ist.

Folgerung. *Jeder metrische Raum ist Quotient eines geordneten Raumes.*

Kowalsky [2] hat bewiesen, daß ein Raum genau dann eine Sequenz Topologie trägt, wenn jeder Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ (mengentheoretischer) Durchschnitt von Fréchet-Filtern ist. Sein Beweis kann fast wörtlich zur Herleitung der folgenden Charakterisierung der stark folgenbestimmten Räume übernommen werden:

Satz 2. *Ein topologischer Raum X ist genau dann stark folgenbestimmt, wenn jeder Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ Durchschnitt von Filtern mit wohlgeordneten Basen ist.*

Bemerkungen. 1. Obige Sätze bleiben richtig, wenn man bei der Definition der (starken) Folgenbestimmtheit die wohlgeordneten Folgen durch Moore–Smith-Folgen mit total geordneten Indexmengen ersetzt.

2. Für $i = 0, 1$ sei ω_i die kleinste Ordnungszahl mit der Mächtigkeit $\aleph_i$, W_i die Menge aller Ordnungszahlen a mit $a \leqslant \omega_i$, versehen mit der natürlichen Ordnungstopologie. Der Produktraum $X = W_0 \times W_1$ hat folgende Eigenschaften:

(a) X ist folgenbestimmt, aber nicht stark folgenbestimmt;

(b) X ist kompakt und Quotient eines geordneten Raumes, aber nach Ergebnissen von Treybig [3] nicht Quotient eines kompakten geordneten Raumes.

3. Da jeder diskrete Raum ordnungsfähig ist, ist jeder Raum stetiges Bild eines geordneten Raumes. Der von $A = [(W_0 - \{\omega_0\}) \times (W_1 - \{\omega_1\})] \cup \{(\omega_0, \omega_1)\}$ erzeugte Unterraum des in Bemerkung 2 konstruierten Raumes ist jedoch nicht folgenbestimmt, also nicht Quotient eines geordneten Raumes.

4. Das Produkt zweier geordneter Räume ist im allgemeinen nicht folgenbestimmt. Ist z.B. ν (bzw. ω) der Ordnungstyp der ganzen (bzw. natürlichen) Zahlen, X (bzw. Y) eine geordnete Menge vom Ordnungstyp $\nu \cdot \omega_1 + 1$ (bzw. $\nu \cdot \omega_1 \cdot \omega + 1$), versehen mit der natürlichen Ordnungstopologie, so ist $X \times Y$ nicht folgenbestimmt. Um das zu sehen, genügt es zu bemerken, daß die Menge

$$A = \{((n, a),\ (0, a, n))\colon\ 0 < n < \omega_0,\ 0 < a < \omega_1\}$$

die Bedingung $\mathrm{Lim} A \subset A$ erfüllt, aber nicht abgeschlossen in $X \times Y$ ist.

Literaturverzeichnis

[1] S. P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice*, Fund. Math. 57 (1965), pp. 107-115.

[2] H.-J. Kowalsky, *Topologische Räume*, Basel 1961, S. 74.

[3] L. B. Treybig, *Concerning continuous images of compact ordered spaces*, Proc. Am. Math. Soc. 15 (1964), pp. 866-871.

Reçu par la Rédaction le 17. 8. 1966