Un exemple effectif d'un ensemble mesurable (B) de classe α.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

C'est M. Kuratowski qui a donné le premier exemple effectif d'un ensemble mesurable (B) de classe α, indépendant de la façon dont le nombre transfini α est donné [1]). Dans cette Note nous donnerons un autre exemple de même nature, en se basant sur des considérations d'un ordre un peu différent.

Il existe, comme on sait, plusieurs classifications des ensembles mesurables (B) [2]): nous prendrons ici la suivante. Appelons ensembles de classe 0 les intérieurs des intervalles aux extrémités rationnelles et définissons par l'induction transfinie les ensembles de classe α comme ensembles qui ne sont d'aucune classe $<\alpha$ et qui sont de la forme $\prod\limits_{p=1}^{\infty}\sum\limits_{q=1}^{\infty}E_{p,q}$, où $E_{p,q}$ (p, q naturels) sont des ensembles de classes $<\alpha$.

Supposons qu'à tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \dots, n_k$ correspond un ensemble $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$: nous dirons que nous avons un *système* d'ensembles $S\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$. Soit S un système d'ensembles $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ donné, p et q deux nombres naturels donnés: nous désignerons par $S^{p,q}$ un nouvel système d'ensembles $\{E'_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ qu'on obtient en posant pour tout système fini d'indices $n_1, n_2, \dots, n_k$: $E'_{n_1, n_2, \dots, n_k} = E_{p, q, n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Nous définirons maintenant, par l'induction transfinie, pour tout

1) *C. R.*, t 176, p. 229, note du 22 janvier 1923.

2) Les rangs de classe d'un ensemble donné ne diffèrent dans les classifications connues que par un nombre fini.

nombre ordinal α une opération A (S) sur le système d'ensembles $S\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ [1]) comme il suit.

Posons, pour tout système d'ensembles $S\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$:

$$(1)\qquad A^1(S) = \prod_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} E_{p,q}$$

et pour tout nombre ordinal $\alpha > 1$:

$$(2)\qquad A^\alpha(S) = A^1(S) + \prod_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\xi<\alpha} A^\xi(S^{p,q}).$$

où la sommation $\sum\limits_{\xi<\alpha}$ s'étend à tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$.

Soit maintenant

$$(3)\qquad I_1, I_2, I_3, \dots$$

une suite infinie, formée de tous les intervalles ouverts aux extrémités rationnelles.

Désignons (pour k et m naturels) par $Q(k, m)$ l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle (0, 1) dont la fraction continue a pour k-ième dénominateur le nombre m et posons

$$(4)\qquad H_k = \sum_{m=1}^{\infty} Q(k, m) I_m \text{ [2]}),$$

$$(5)\qquad N(n_1, n_2, \dots, n_k) = 2^{n_1-1} + 2^{n_1+n_2-1} + \dots + 2^{n_1+n_2+\dots+n_k-1}$$

$$(6)\qquad S_0 = S_0\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}, \text{ où } E_{n_1, n_2, \dots, n_k} = H_{N(n_1, n_2, \dots, n_k)},$$

$$(7)\qquad E^\alpha = A^\alpha(S_0).$$

Nous prouverons que *pour tout nombre transfini $\alpha < \Omega$, E^α est un ensemble de classe α.* A ce but nous étudierons d'abord quelques propriétés de l'opération A^α.

[1]) Ce sont MM. Souslin et Lusin qui ont considéré les premiers des opérations effectuées sur un système d'ensembles $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$: voir N. Lusin et W. Sierpiński: *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 48.

[2]) Ces ensembles ont été introduits en 1917 par M. N. Lusin dans la construction d'un ensemble (A) de M. Souslin qui n'est pas mesurable (B). Cf. ma note „*Sur l'existence de toutes les classes d'ensembles mesurables* (B), *C. R.* t. 175, p. 860 (note du 13 novembre 1922).

Propriété I. Pour tout nombre ordinal α et tout ensemble E de classe $\leqslant \alpha$ il existe un système d'ensembles de classe 0, $S\{E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ tel que

$$\Lambda^{\xi}(S) = E \quad \text{pour} \quad \xi \geqslant \alpha. \tag{8}$$

Démonstration. Notre propriété est vraie pour $\alpha = 1$: en effet, E étant un ensemble de classe $\leqslant 1$, nous avons $E = \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} M_{p,q}$, où $M_{p,q}$ sont des ensembles de classe 0, et il suffira de poser $E_{p,q} = M_{p,q}$ (pour p et q naturels) et $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = 0$ pour tous les systèmes $n_1, n_2, \ldots, n_k$ contenant plus ou moins que deux nombres, pour avoir la formule (8) pour $\alpha = 1$.

Supposons maintenant notre propriété vraie pour tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$ et soit E un ensemble de classe $\leqslant \alpha$ (où α est un nombre ordinal donné > 1). D'après notre classification d'ensembles, nous pouvons écrire

$$E = \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} M^{p,q}, \tag{9}$$

où $M^{p,q}$ est un ensemble de classe $\alpha_{p,q} < \alpha$ (pour p et q naturels). Notre proriété étant vraie, d'après l'hypothèse, pour les nombres ordinaux $< \alpha$, il existe pour tout système de deux nombres naturels p, q un système $T(p, q)$ d'ensembles de classe 0, $\{M^{p,q}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, tel que

$$M^{p,q} = \Lambda^{\xi}(T(p, q)), \quad \text{pour} \quad \xi \geqslant \alpha_{p,q}. \tag{10}$$

Or, de (1) et (2) résulte tout de suite pour tout système S d'ensembles la formule

$$\Lambda^{\xi}(S) \subset \Lambda^{\eta}(S), \quad \text{pour} \quad \xi < \eta: \tag{11}$$

la formule (10) donne donc, d'après $\alpha_{p,q} < \alpha$:

$$M^{p,q} = \sum_{\alpha_{p,q} \leqq \xi < \eta} \Lambda^{\xi}(T(p, q)) = \sum_{\xi < \eta} \Lambda^{\xi}(T(p, q)), \quad \text{pour} \quad \eta \geqslant \alpha. \tag{12}$$

Posons

$$E_p = E_{p,q} = 0 \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

et

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = M^{n_1, n_2}_{n_3, n_4, \ldots, n_k} \tag{13}$$

pour tous les systèmes finis d'indices $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ contenant plus ou moins que deux nombres, et désignons par S le système d'ensembles $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ ainsi définis. D'après la définition des systèmes $T(p, q)$ et celle des systèmes $S^{p, q}$, on voit sans peine, d'après (13), que $T(p, q) = S^{p, q}$, pour p et q naturels. Or, d'après $E_{p, q} = 0$ $(p, q = 1, 2, \dots)$ et en vertu de (1), nous trouvons $\Lambda^1(S) = 0$. Les formules (2) et (12) donnent donc, d'après (9):

$$\Lambda^\eta(S) = \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\xi<\eta} \Lambda^\xi(S^{p, q}) = \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\xi<\eta} \Lambda^\xi(T(p, q)) =$$

$$= \prod_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} M^{p, q} = E, \quad \text{pour} \quad \eta \geqslant \alpha.$$

ce qui prouve que notre propriété est encore vraie pour le nombre α. La propriété I est ainsi démontrée par l'induction transfinie pour tout nombre ordinal α.

Propriété II. Soient E et G deux ensembles et $S\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ et $T\{G_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ deux systèmes d'ensembles, tels qu'on a pour un nombre ordinal α donné:

$$E = \Lambda^\alpha(S), \; G = \Lambda^\alpha(T).$$

Si a est un élément de l'ensemble E et si b est un point tel que la formule $b \varepsilon G_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ subsiste pour tout système d'indices n_1, $n_2, \dots, n_k$ pour lequel subsiste la formule $a \varepsilon E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, alors b est un élément de l'ensemble G.

La propriété II se démontre sans aucune difficulté par l'induction transfinie en vertu des formules (1) et (2).

Nous allons maintenant à démontrer que, pour tout nombre transfinie $\alpha < \Omega$, l'ensemble E^α, défini par la formule (7), est un ensemble de classe α.

On voit sans peine que les ensembles (4) sont de classe 1. (En effet, de (6) et de la définition des ensembles I_n et $Q(k, m)$ résulte sans peine que, pour tout k naturel donné, H_k est l'ensemble de nombres irrationnels contenus dans un ensemble ouvert: c'est donc un G_δ. Or, on voit aisément que les ensembles de classe $\leqslant 1$ coïncident avec les ensembles G_δ). Or, il résulte sans peine par l'induction, des formules (1) et (2), que, si $S_0\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ est un système d'ensembles de classe $\leqslant 1$, alors, pour α fini, les ensembles $\Lambda^\alpha(S_0)$ sont de classe $\leqslant \alpha + 1$; il s'ensuit tout de suite de la formule (2) que les ensembles $\Lambda^\omega(S_0)$ sont de classe $\leqslant \omega$, et on en déduit par l'induction transfinie que les ensembles $\Lambda^{\alpha}(S_0)$ sont de classe $\leqslant \alpha$, pour tout nombre ordinal α, tel que $\omega \leqslant \alpha < \Omega$. Donc, d'après (6) et (7) l'ensemble E^{α} est de classe $\leqslant \alpha$ pour tout nombre α de deuxième classe.

Soit maintenant α un nombre ordinal donné et M un ensemble donné quelconque de classe $\leqslant \alpha$. Il résulte de la propriété I qu'il existe un système d'ensembles de classe 0, $T\{M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$, tel que

$$M = \Lambda^{\alpha}(T) \tag{14}$$

Soit N un nombre naturel donné quelconque. Nous pouvons, comme on sait, écrire le nombre N d'une façon unique sous la forme

$$N = 2^{n_1-1} + 2^{n_1+n_2-1} + \ldots + 2^{n_1+n_2+\cdots+n_k-1} \tag{15}$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont des nombres naturels. $M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ étant un ensemble de classe 0, c'est donc un terme de la suite (4): posons

$$M_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = I_{m_N}; \tag{16}$$

l'indice m_N est ainsi bien déterminé pour tout nombre naturel N.

Désignons par x le nombre irrationel, défini par le développement en fraction continue

$$x = \frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \frac{1|}{|m_3} + \ldots \tag{17}$$

et distinguons deux cas.

1) $x \varepsilon M$. Soit $n_1, n_2, \ldots, n_k$ un système d'indices, tel que $x \varepsilon M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. D'après (16), (15) et (5) nous avons

$$x \varepsilon I_{m_{N(n_1, n_2, \ldots, n_k)}}. \tag{18}$$

Or, d'après (17) et d'après la définition des ensembles $Q(k, m)$, nous avons

$$x \varepsilon Q(k, m_k), \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{19}$$

donc, en particulier:

$$x \varepsilon Q(N(n_1, n_2, \ldots, n_k), m_{N(n_1, n_2, \ldots, n_k)}). \tag{20}$$

Les formules (18) et (20) prouvent, d'après (4), que $x \varepsilon H_{N(n_1, n_2, \ldots, n_k)}$, donc, d'après (6): $x \varepsilon E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

Nous avons donc démontré que la formule $x \varepsilon E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ subsiste pour tout système d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pour lequel subsiste la formule $x \varepsilon M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$; x étant un point de M, nous en concluons, d'après (14) et (7) et en vertu de la propriété II, que $x \varepsilon E^{\alpha}$.

2) $x \operatorname{non} \varepsilon M$ Admettons que nous avons $x \varepsilon E^{\alpha}$ et soit $n_1, n_2, \ldots, n_k$ un système d'indices, tel que $x \varepsilon E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$: d'après (7) et (4) nous avons donc

$$x \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} Q(N(n_1, n_2, \ldots, n_k), m) I_m. \tag{21}$$

Il résulte donc de (21) l'existence d'un indice m tel que

$$x \varepsilon Q(N(n_1, n_2, \ldots, n_k), m) I_m; \tag{22}$$

or, il s'ensuit immédiatement de la définition des ensembles $Q(k, m)$ que, pour k fixe, les ensembles $Q(k, m)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ sont sans points communs deux à deux: l'indice m satisfaisant à la formule (22) est donc unique et il résulte de (20) que $m = m_{N(n_1, n_2, \ldots, n_k)}$. Nous avons donc $x \varepsilon I_{m_{N(n_1, n_2, \ldots, n_k)}}$, ce qui donne, d'après (5), (15) et (16): $x \varepsilon M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$.

La formule $x \varepsilon E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ entraîne donc, pour tout système d'indices $n_1, n_1, \ldots, n_k$, la formule $x \varepsilon M_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, ce qui donne, d'après la propriété II, $x \varepsilon M$, contrairement à l'hypothèse que $x \operatorname{non} \varepsilon M$. Nous avons donc $x \operatorname{non} \varepsilon E^{\alpha}$.

Nous avons donc démontré que la formule $x \varepsilon M$ entraîne $x \varepsilon E^{\alpha}$ et la formule $x \operatorname{non} \varepsilon M$ entraîne $x \operatorname{non} \varepsilon E^{\alpha}$. Il en résulte tout de suite que $M \neq CE^{\alpha}$. M étant un ensemble quelconque de classe $\leqslant \alpha$, cela prouve que CE^{α} ne peut être un ensemble de classe $\leqslant \alpha$.

Or, on déduit sans peine, par l'induction transfinie, des formules (1) et (2) que le complémentaire d'un ensemble de classe $\leqslant \xi$ est un ensemble de classe $\leqslant \xi + 1$. Soit ξ_{α} la classe de l'ensemble E^{α}: nous avons démontré plus haut qu'il est $\xi_{\alpha} \leqslant \alpha$ (pour $\omega \leqslant \alpha < \Omega$). Donc CE^{α} est un ensemble de classe $\leqslant \xi_{\alpha} + 1$. Or, nous avons prouvé que CE^{α} ne peut être de classe $\leqslant \alpha$: nous trouvons donc $\xi_{\alpha} + 1 > \alpha$, donc $\xi_{\alpha} \geqslant \alpha$, et puisque d'autre part $\xi_{\alpha} \leqslant \alpha$, nous avons $\xi_{\alpha} = \alpha$, c'est-à-dire E^{α} est un ensemble de classe α. c. q. f. d.

Donc, pour tout nombre transfini $\alpha < \Omega$, E^{α} est un exemple effectif d'un ensemble de classe α.

Remarquons encore, qu'en modifiant légèrement notre démonstration, on pourrait prouver que E^{Ω} est un exemple effectif d'un ensemble non mesurable (B).