Remarque sur un théorème de M. Mullikin.

Par

S. Mazurkiewicz (Varsovie).

M. Anna Mullikin a démontré dans un mémoire récent [1]) le théorème suivant: *si M est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sans points communs deux à deux: $M_1, M_2 \dots$ dont aucun ne décompose pas (disconnects) un plan S, alors M ne décompose pas S.*

Je me propose de donner une nouvelle démonstration de ce remarquable théorème en me basant sur plusieurs résultats concernant les ensembles fermés.

Il résulte d'un théorème de MM. Kuratowski et Knaster [2]), que tout ensemble qui décompose le plan contient un sous-ensemble continu qui décompose le plan. Donc il suffit de démontrer le théorème pour M continu. Soit a un point de $S - M$ et désignons pour tout ensemble A par $\varphi(A)$ le transformé de A par l'inversion de centre a. $\varphi(M)$ est un continu borné qui décompose S, donc on peut trouver deux points b et c de $S - \varphi(M)$ tels que $\varphi(M)$ est un $\mathfrak{S}(b, c; S)$ c. à. d. une coupnre du plan entre b et c [3]). $\varphi(M)$ contient un $\mathfrak{S}_i(b, c; S)$ [4]) qui est continu et que nous désignerons par Q. D'après $M = M_1 + M_2 + \dots$ on aura $\varphi(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(M_k)$ et

[1]) Anna M. Mullikin: *Certain theorems relating to plane connected point sets.* Trans. Amer. Math Soc. XXIV p. 148–154. (1922).

[2]) *Sur les ensembles connexes. Fund. Math.* II p. 233/4 Th. XXXVII. La restriction »dont un au moins est borné« peut être om'se, le théorème de Phragmén-Brouwer étant vrai pour les ensembles non bornés (voir l. c. p. 233, adn. et *Fund. Math* III p. 20–25).

[3]) *Fund. Math.* I p. 62.

[4]) l. c. p. 63, 65,

$Q=\sum_{k=1}^{\infty}[Q\times\varphi(M_k)]$, les ensembles $Q\times\varphi(M_k)$ étant fermés et ayant en commun deux à deux le point a au plus. Il s'ensuit que ces ensembles contiennent a et sont connexes [1]). Comme Q est un $\mathfrak{S}_i(b, c; S)$, touts les $Q\times\varphi(M_k)$ sauf un seul (on peut toujours supposer que c'est $Q\times\varphi(M_1)$) se réduisent au point a [2]). donc $Q=Q\times\varphi(M_1)$ et $Q\times\varphi(M_1)$ est un $\mathfrak{S}(b, c; S)$. Comme $\varphi(M_1)\subset\varphi(M)$ ne contient pas b et c, $\varphi(M_1)$ est aussi un $\mathfrak{S}(b, c; S)$ donc $\varphi(M_1)$ décompose S. Donc M_1 décompose S, contrairement à la supposition. Le théorème est ainsi démontré.

[1]) **Mazurkiewicz**: *Sur les continus plans non bornés*: *Fund. Math.* V p. 193 Lemme 2. (1924).

[2]) l. c. p. 194 Lemme 3. Ce lemme n'est au fond qu'un cas spécial du théorème de M. **Mullikin**.