Sur une fonction de deux variables sans intégrale double.

Par

G. Fichtenholz (Pétrograd).

D'après le théorème connu du à MM. Lebesgue-Fubini[1]), si la fonction $f(x, y)$ de deux variables x, y est sommable dans le rectangle $P=(a, b; c. d)$. c'est-à-dire, s'il existe l'intégrale double finie

$$(1) \qquad \int_P f(x, y)\, dx\, dy$$

(au sens de M. Lebesgue), on a constamment

$$(2) \qquad \int_F dy \int_E f(x, y)\, dx = \int_E dx \int_F f(x, y)\, dy,$$

pourvu que les ensembles mesurables E et F soient compris respectivement dans les intervalles (a, b) et (c, d). D'autre part, comme l'a montré M. Tonelli[2]), si la fonction $f(x, y)$ est mesurable superficiellement et de signe constant, il suffit l'existence même de l'intégrale

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx \quad \left[\text{ou } \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy\right]$$

pour qu'il existe l'intégrale (1). Nous nous proposons ici de former l'exemple d'une fonction mesurable, mais de signe variable, telle

[1]) Voir: H. Lebesgue, *Intégrale, Longueu , Aire*, Annali di Matematica pura ed applicata (3) 7, 1902; pp 276–281; G. Fubini, *Sugli i tegrali multipli*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5) 16 I, 1907, pp. 608–612. On peut consulter aussi: Ch. J. de la Vallée-Poussin, *Cours d'Analyse Infinitésimule*, t. II, Louvain-Paris, 1912, pp. 117–122.

[2]) Tonelli, *Sull'integra ione per parti*, Rendiconti cités, 18 II, 1909, pp. 246–248; de la Vallée-Poussin, loc. cit. p. 121. Comparer: Fubini, *Sugli integrali doppii*, Rendiconti. 22 I, 1913, p. 585.

que l'intégrale (1) n'existe pas, tandis que la relation (2) demeure toujours vraie.

Pour faire cela, il convient d'abord de développer quelques recherches de nature très élémentaire.

Imaginons que l'on a construit dans le plan de xy un rectangle

$$D=(\alpha, \beta;\ \gamma, \delta)$$

ayant ses côtés parallèles aux axes des coordonnées, et partageons D, par des transversales parallèles à l'axe de x, en un nombre quelconque n de rectangles égaux

$$D_\nu(\alpha, \beta;\ \gamma_\nu, \delta_\nu),$$

où $\gamma_\nu=\gamma+\frac{\nu-1}{n}(\delta-\gamma)$, $\delta_\nu=\gamma+\frac{\nu}{n}(\delta-\gamma)$, $\nu=1, 2, \ldots, n$ (Nous laissons au lecteur de tracer les figures). Décomposons de nouveau chaque rectangle D_ν, par des parallèles à l'axe de y, en un nombre

$$z_\nu=l_1 \,.\, l_2 \ldots l_\nu$$

de portions rectangulaires

$$D_\nu^{(\lambda_\nu)}=(\alpha_\nu^{(\lambda_\nu)}, \beta_\nu^{(\lambda_\nu)};\ \gamma_\nu, \delta_\nu),$$

où $\alpha_\nu^{(\lambda_\nu)}=\alpha+\frac{\lambda_\nu-1}{z_\nu}(\beta-\alpha)$, $\beta_\nu^{(\lambda_\nu)}=\alpha+\frac{\lambda_\nu}{z_\nu}(\beta-\alpha)$, $\lambda_\nu=1, 2, \ldots, z_\nu$, tous les l_ν étant des nombres pairs, d'ailleurs arbitrairs. Considérons une fonction auxiliaire $\varphi(x, y)$ égale à $(-1)^{\lambda_\nu-1}$ à l'intérieur du rectangle $D_\nu^{(\lambda_\nu)}(\lambda_\nu=1, 2, \ldots z_\nu;\ \nu=1, 2, \ldots, n)$ et à 0 partout ailleurs. Soient E, F les ensembles mesurables quelconques compris respectivement dans $(\alpha. \beta)$ et (γ, δ); désignons par (E, F) l'ensemble superficiel de points x, y, pour lesquels x appartient à E et y à F. Nous allons établir une formule fondamentale que voici:

$$\left|\int_{(E,F)}\varphi(x, y)\,dx\,dy\right|<\frac{mD}{2\sqrt{n}}, \tag{3}$$

mD designant la mesure $(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)$ de D, et cela quels que soient $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Pour simplifier le langage, nous appellerons *aire* d'une portion A de D l'intégrale double

$$\int_A\varphi(x, y)\,dx\,dy;$$

par exemple, l'*aire* de D est zéro, celle de $D_\nu^{(\lambda_\nu)}$ sera $\frac{(-1)^{\lambda_\nu-1}}{n\,.\,z_\nu}mD$.

Envisageons d'abord le système de domaines rectangulaires

$$\Delta_n^{(\lambda_n)} = (\alpha_n^{(\lambda_n)}, \beta_n^{(\lambda_n)}; \gamma, \delta)$$

où $\lambda_n = 1, 2, \ldots, z_n$. Si $n=1$, l'aire de $\Delta_1^{(\lambda)}$ est égale à $\frac{1}{z_1} mD$, pour l'une moitié de z_1 valeurs d'index λ_1, et à $-\frac{1}{z_1} mD$, pour l'autre; si $n=2$, l'aire de $\Delta_2^{(\lambda_2)}$ sera respectivement

$$\frac{1}{z_2} mD, \; 0, \; -\frac{1}{z_2} mD.$$

pour $\frac{1}{4}z_2$, $\frac{1}{2}z_2$, $\frac{1}{4}z_2$ de ces rectangles. Dans le cas général l'aire du rectangle $\Delta_n^{(\lambda_n)}$ est égale à

$$(n-2\nu)\frac{mD}{nz_n}$$

pour

$$\frac{C_n^\nu}{2^n} L_n$$

$(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ de valeurs d'index λ_n, où C_n^ν sont les coefficients de la formule du binôme. On peut obtenir ce résultat sans peine par récurrence, à l'aide de l'identité

$$C_{n-1}^\nu + C_{n-1}^{\nu-1} = C_n^\nu;$$

car, si notre affirmation est vraie pour le rectangle $D = (\alpha, \beta; \gamma_2, \delta)$, décomposé en parties

$$\bar{\Delta}_{n-1}^{(\lambda_{n-1})} = (\alpha_{n-1}^{(\lambda_{n-1})}, \beta_{n-1}^{(\lambda_{n-1})}; \gamma_2, \delta), \quad (\lambda_{n-1} = 1, 2, \ldots z_{n-1})$$

on voit qu'à chaque rectangle $\bar{\Delta}_{n-1}^{(\lambda_{n-1})}$ d'aire

$$(n-1-2\nu)\frac{m\bar{D}}{(n-1)z_{n-1}}$$

correspondent l_n rectangles $\Delta_n^{(\lambda_n)}$, dont pour l'une de deux moitiés l'aire est égale à

$$(n-2\nu)\frac{mD}{nz_n}$$

et pour l'autre à

$$[n-2(\nu+1)]\frac{mD}{nz_n},$$

Tirons ceux des rectangles $\Delta_n^{(\lambda_n)}$ dont l'*aire* est positive; leur somme a pour l'*aire*

$$\mu_n \,.\, m\,D,$$

où

$$\mu_n = \frac{1}{n\,.\,2^n} \sum_{\nu=0}^{\nu=E\left(\frac{n}{2}\right)} (n-2\nu)\, C_n^\nu\,,$$

le signe $E(z)$ désignant l'*entier* de z Cela peut s'écrire, d'après les propriétés bien connues des coëfficients de la formule du binôme,

$$\mu_{2p+1} = \mu_{2p} = \frac{1}{2^{2p+1}}\, C_{2p}^p. \tag{4}$$

Donc l'*aire* d'un système arbitraire de rectangles $\Delta_n^{(\lambda_n)}$ ne peut surpasser le nombre $\mu_n \,.\, m\,D$ (qui ne dépend pas de $l_1, l_2, \ldots, l_n$).

Il importe d'observer que cela est encore vrai, si nous remplaçons chaque $\Delta_n^{(\lambda_n)}$ par sa portion $\overline{\Delta}_n^{(\lambda_n)}$ comprise dans un nombre $\overline{n} < n$ de rectangles D_ν choisis à volonté:

$$D_{\nu_1},\ D_{\nu_2}, \ldots, D_{\nu_{\overline{n}}}.$$

En effet, par la réunion de ceux-ci on construit un rectangle $\overline{D}$, et on voit, d'après ce qui précède, que l'*aire* d'un système quelconque de $\overline{\Delta}_n^{(\lambda_n)}$ est au plus égale à $\mu_{\overline{n}} \,.\, m\,\overline{D}$. Mais, comme on a constamment (voir (4))

$$(n-1)\,\mu_{n-1} \leqslant n\,\mu_n,$$

il résulte $\overline{n}\,\mu_{\overline{n}} \leqslant n\,\mu_n$, en sorte que l'on a

$$\mu_{\overline{n}} \,.\, m\,\overline{D} = \frac{\overline{n}\,\mu_{\overline{n}}}{n} \,.\, m\,D \leqslant \mu_n \,.\, m\,D.$$

Passons à l'intégrale

$$\int_{(E,\,F)} \varphi(x,\, y)\, dx\, dy = \int_K dy \int_E \varphi(x,\, y)\, dx.$$

Les points de F, en lesquels

$$\int_E \varphi(x,\, y)\, dx > 0,$$

on peut enfermer dans un système F_0 d'intervalles $(\gamma_\nu,\, \delta_\nu)$, et l'on a évidemment

$$\int_{(E,\,F)} \varphi(x,\, y)\, dx\, dy \leqslant \int_{F_0} dy \int_E \varphi(x,\, y)\, dx = \int_E dx \int_{F_0} \varphi(x,\, y)\, dy.$$

De même, la portion de E où

$$\int_{F_0} \varphi(x, y)\, dy > 0,$$

est enserrée dans un système E_0 d'intervalles $(\alpha_n^{(\lambda_n)}, \beta_n^{(\lambda_n)})$, et l'on a

$$\int_{(E, F)} \varphi(x, y)\, dx\, dy \leqslant \int_{E_0} dx \int_{F_0} \varphi(x, y)\, dy = \int_{(E_0, F_0)} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

D'après ce qui précède

$$\int_{(E, F)} \varphi(x, y)\, dx\, dy \leqslant \mu_n \,.\, mD;$$

évidemment, il ne faut que changer le signe de $\varphi(x, y)$, pour obtenir l'inégalité

$$\int_{(E, F)} \varphi(x, y)\, dx\, dy \geqslant -\mu_n \,.\, mD,$$

d'où il suit

(5) $$\left| \int_{(E, F)} \varphi(x, y)\, dx\, dy \right| \leqslant \mu_n \,.\, mD.$$

Alors l'expression (4) de μ_n peut être mise sous la forme

$$\mu_{2p+1} = \mu_{2p} = \frac{1}{2\sqrt{2p+1}} \sqrt{\frac{1\,.\,3}{2\,.\,2} \cdot \frac{3\,.\,5}{4\,.\,4} \cdots \frac{(2p-1)(2p+1)}{2p\,.\,2p}};$$

puisque tous les facteurs sous le radical sont < 1, on a

$$\mu_n < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

ce qui nous donne, en tenant compte de (5), la relation (3) à démontrer.

De là les inégalités suivantes:

(6) $$\int_E dx \left| \int_F \varphi(x, y)\, dy \right| < \frac{mD}{\sqrt{n}},$$

$$\int_F dy \left| \int_E \varphi(x, y)\, dx \right| < \frac{mD}{\sqrt{n}}.$$

Pour prouver la première, par exemple, il suffit, en rapportant la formule (3), de considérer séparément les portions E_1 et E_2 de E, où l'on a respectivement

$$\int_F \varphi(x, y)\, dy > 0 \text{ ou } < 0.$$

Ces préliminaires posés, définissons une fonction $f(x, y)$ dans le carré $P=(0, 1; 0, 1)$ comme il suit. Par rapport à chaque carré partiel

$$P_k=\left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}; \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right) \qquad (k=1, 2, 3, \dots)$$

nous pouvons construire la fonction $\varphi_k(x, y)$, comme $\varphi(x, y)$ l'est par rapport à D, en posant

$$n=n_k=2^{2k} \quad \text{et} \quad l_1=l_2=\dots=l_{n_k}=2.$$

Soit maintenant $f(x, y)=2^{2k}\varphi_k(x, y)$ dans le carré P_k $(k=1, 2, 3, \dots$ et $=0$ partout ailleurs. Il n'existe pas l'intégrale double (1), même infini, parce que l'on a

$$\int_P |f(x, y)|\,dx\,dy=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{P_k}|f(x, y)|=1+1+1+\dots=\infty,$$

ainsi que

$$\int\int_{P(f>0)} f(x, y)\,dx\,dy=\left|\int\int_{P(f<0)} f(x, y)\,dx\,dy\right|=+\infty.$$

Si E, F sont deux ensembles mesurables dans l'intervalle $(0, 1)$, désignons respectivement par E_k, F_k leur portions comprises dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$ $(k=1, 2, \dots)$. Il existe les intégrales

$$\int_{E_k} dx \int_F f(x, y)\,dy=2^{2k}\int_{(E_k, F_k)}\varphi_k(x, y)\,dx\,dy \tag{7}$$

et l'on a, en vertu de la relation (6),

$$\int_{E_k} dx\left|\int_F f(x, y)\,dy\right|=2^{2k}\int_{E_k} dx\left|\int_{F_k}\varphi_k(x, y)\,dy\right|<2^{2k}\cdot\frac{m\,P_k}{\sqrt{n_k}}=\frac{1}{2^k}.$$

La série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} dx\left|\int_F f(x, y)\right|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

étant convergente, il existe l'intégrale [1])

$$\int_E dx\left|\int_F f(x, y)\,dy\right|$$

et, par conséquent, l'intégrale $\int_E dx\int_F f(x, y)\,dy$

[1]) Pour la fonction *non-négative* $\left|\int_F f(x, y)\,dy\right|$ cette conclusion est legitime.

aussi, et l'on a (voir (7))

$$\int_F dx \int_F f(x, y)\, dy = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \int_{(E_k, F_k)} \varphi_k(x, y)\, dx\, dy.$$

On peut démontrer de la même façon l'existence de l'intégrale

$$\int_F dy \int_E f(x, y)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \int_{(E_k, F_k)} \varphi_k(x, y)\, dx\, dy,$$

d'où il résulte (2).

Donc, la fonction $f(x, y)$, à laquelle on aboutit par la construction précédente, possède bien la propriété signalée au début.

Août 1917.