Sur une définition topologique des ensembles $F_{\sigma\delta}$

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

D'après la notation de M. Hausdorff, les ensembles $F_{\sigma\delta}$ sont les produits dénombrables de sommes dénombrables d'ensembles fermés. Cette définition fait appel, en général, aux points étrangers à l'ensemble qu'on définit. Or, M. Mazurkiewicz a prouvé en 1920 [1]) que tout ensemble homéomorphe d'un $F_{\sigma\delta}$ est un $F_{\sigma\delta}$. La propriété d'être un $F_{\sigma\delta}$ est donc un invariant topologique et elle ne dépend que des propriétés de seuls points de l'ensemble considéré. Une analyse détaillée de la démonstration de M. Mazurkiewicz m'a conduit à caractériser les $F_{\sigma\delta}$ par des propriétés de seuls points de ces ensembles.

Théorème: *Pour qu'un ensemble E (situé dans un espace à m dimensions) soit un $F_{\sigma\delta}$, il faut et il suffit qu'on puisse faire correspondre à tout système fini de nombres naturels $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ un sous-ensemble $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ de E, fermé dans E [2]), de sorte que les quatre conditions suivantes soient vérifiées:*

(1) $$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

(2) $$E_{n_1, n_2, \dots, n_k} - E_{n_1, \dots, n_{k-1}, n_k - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} E_{n_1, \dots, n_k, n} \text{ [3])}$$

(3) $$E_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subset E_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k+1}$$

[1]) *Fund. Math* t. II, p. 104–111.

[2]) Un ensemble $M \subset E$ est dit *fermé dans* E, si tout point de E qui est point d'accumulation de M, appartient à M.

[3]) On doit comprendre par $E_{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, 0}$ l'ensemble vide.

(4) *si* $n_1, n_2, n_3, \ldots$ *est une suite infinie de nombres naturels. et* $p_k (k=1, 2, \ldots)$ *une suite infinie de points de* E, *tels que* $p_k \varepsilon E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ *pour* $k=1, 2, \ldots$, *les points* $p_k (k=1, 2, \ldots)$ *convergent vers un point de* $\bar{E}$.

Démonstration. Soit E un ensemble $F_{\sigma\delta}$ donné. Nous avons donc

$$E = S_1 S_2 S_3 \ldots, \tag{5}$$

où $S_n (n=1, 2, \ldots)$ sont des ensembles F_σ. Donc nous pouvons poser

$$S_1 = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots, \tag{6}$$

où $F_n (n=1, 2, \ldots)$ sont des ensembles fermés, et

$$F_n \subset F_{n+1}. \qquad (n=1, 2, 3 \ldots) \tag{7}$$

Nous définirons maintenant par l'induction les ensembles fermés $F_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ comme il suit.

Soit k un nombre naturel donné > 1, et supposons que nous avons déjà défini tous les ensembles $F_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}}$. Soit $(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1})$ un système donné quelconque de $k-1$ nombres naturels. L'ensemble $F_{n_1, \ldots, n_{k-1}} - F_{n_1, \ldots, n_{k-2}, n_{k-1}-1}$ est un F_σ (comme différence de deux ensembles fermés), donc son produit par l'ensemble S_k est aussi un F_σ (comme produit de deux F_σ), et nous pouvons poser:

$$S_k (F_{n_1, \ldots, n_{k-1}} - F_{n_1, \ldots, n_{k-2}, n_{k-1}-1}) = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots, \tag{8}$$

où $\Phi_n (n=1, 2, \ldots)$ sont des ensembles fermés, dont on peut encore supposer que leurs diamètres $\delta(\Phi_n)$ satisfont à l'inégalité

$$\delta(\Phi_n) < \frac{1}{k}, \quad \text{pour} \quad n=1, 2, \ldots \tag{9}$$

n_k étant un nombre naturel donné quelconque, nous définirons l'ensemble $F_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k}$ par la formule:

$$F_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_{n_k}. \tag{10}$$

De (10) et (8) résulte que

$$F_{n_1, \ldots, n_k} \subset (F_{n_1, \ldots, n_k} - F_{n_1, \ldots, n_{k-2}, n_{k-1}-1}),$$

donc aussi

$$F_{n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}} \subset (F_{n_1, \ldots, n_k} - F_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k-1}). \tag{11}$$

Or, d'après (10):

(12) $$(F_{n_1,\ldots,n_k} - F_{n_1,\ldots,n_{k-1},n_k-1}) \subset \Phi_{n_k}.$$

Les formules (11), (12) et (9) donnent:

(13) $$\delta(F_{n_1,\ldots,n_{k+1}}) < \frac{1}{k}.$$

Posons

(14) $$E_{n_1,\ldots,n_k} = EF_{n_1,\ldots,n_k};$$

ce seront des ensembles fermés dans E, et, d'après (6) et (5), nous aurons la formule (1), d'après (5), (8) et (10) la formule (2), enfin, d'après (10): $F_{n_1,\ldots,n_k} \subset F_{n_1,\ldots,n_{k-1},n_k+1}$, ce qui donne la formule (3). Or, soit $n_1, n_2, n_3, \ldots$ une suite infinie de nombres naturels et $p_1, p_2, p_3, \ldots$ une suite infinie de points de E, telle que $p_k \varepsilon E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ pour $k=1,2,\ldots$ D'après (14) nous avons donc

(15) $$p_k \varepsilon F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Les ensembles fermés $F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ $(k=1,2,\ldots)$ sont donc tous non vides. Or, d'après (11), ils forment un suite décroissante: d'après Cantor, il existe donc un point p, tel que

(16) $$p \varepsilon F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}, \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

D'après (10) et (8), nous avons $F_{n_1,\ldots,n_k} \subset S_k$, donc, d'après (16), $p \varepsilon S_k$, pour $k = 1, 2, \ldots$, ce qui prouve, d'après (5), que $p \varepsilon E$.

Or, de (15), (16) et (13) résulte que $\varrho(p_{k+1}, p) < 1/k$, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, ce qui prouve que $\lim_{k=\infty} p_k = p$. Nous avons ainsi vérifié la propriété (4).

Les conditions de notre théorème sont ainsi nécessaires.

Soit maintenent E un ensemble donné, satisfaisant aux conditions de notre théorème. Posons

(17) $$R_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \overline{E}_{n_1,\ldots,n_k} - \sum_{s=1}^{k} \overline{E}_{n_1,\ldots,n_{s-1},n_s-1},$$

où $\overline{M}$ désigne l'ensemble $M + M'$. Les ensembles (17) seront évidemment des F_σ. Posons

(18) $$S_k = \Sigma R_{n_1,n_2,\ldots,n_k},$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes de k nombres naturels $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Les ensembles $S_k (k=1,2,\ldots)$ seront encore des F_σ (comme sommes d'infinités dénombrables des F_σ) et parsuite l'ensemble

$$H = S_1 S_2 S_3 \ldots \tag{19}$$

sera un $F_{\sigma\delta}$. Nous proverons que $E = H$.

k étant un nombre naturel donné, ordonnons tous les systèmes $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ de k nombres naturels d'après la méthode de premières différences: nous obtiendrons ainsi une suite transfinie C_k (du type ω^k).

Soit p un point donné de l'ensemble E.

D'après (1) et (2) nous trouvons sans peine

$$E = \Sigma E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}, \tag{20}$$

la sommation s'étendant à tous les systèmes de k nombres naturels $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Soit $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ le pemier système de la suite C_k, tel que $p \varepsilon E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ (un tel système existe, d'après (20) et $p \varepsilon E$). Nous avons donc

$$p \text{ non } \varepsilon E_{m_1, m_2, \ldots, m_k}, \text{ pour } (m_1, \ldots, m_k) \prec (n_1, \ldots, n_k),$$

ce qui entraîne, p étant un point de E et l'ensemble $E_{m_1, \ldots, m_k}$ étant fermé dans E:

$$p \text{ non } \varepsilon \overline{E}_{m_1, m_2, \ldots, m_k}, \text{ pour } (m_1, \ldots, m_k) \prec (n_1, \ldots, n_k),$$

d'où résulte sans peine, d'après (17) et $p \varepsilon E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$:

$$p \varepsilon R_{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$

donc, d'après (18), $p \varepsilon S_k$. Nous avons donc démontré que l'hypothèse $p \varepsilon S$ donne $p \varepsilon S_k$, pour $k = 1, 2, \ldots$: il en résulte, d'après (19), que

$$E \subset H. \tag{21}$$

Observons maintenant que nous avons toujours

$$R_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \cdot R_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = 0, \text{ pour } (m_1, \ldots, m_k) \neq (n_1, \ldots, n_k). \tag{22}$$

En effet, supposons que

$$(m_1, m_2, \ldots, m_k) \prec (n_1, n_2, \ldots, n_k):$$

soit h le premier indice, tel que $m_h \neq n_h$: nous aurons donc

$$m_1 = n_1, \; m_2 = n_2, \ldots, \; m_{h-1} = n_{h-1}, \; m_h \leq n_h - 1,$$

d'où, d'après (2) et (3):

$$E'_{m_1,\dots,m_k} \subset E_{m_1,\dots,m_h} \subset E_{n_1,\dots,n_{h-1},n_h-1};$$

donc aussi

$$\overline{E}_{m_1,\dots,m_k} \subset \overline{E}_{n_1,\dots,n_{h-1},n_h-1},$$

ce qui donne, d'après (17) (h étant $\leqslant k$):

$$\overline{E}_{m_1,\dots,m_k} \cdot R_{n_1,\dots,n_k} = 0,$$

donc aussi $R_{m_1,\dots,m_k} . R_{n_1,\dots,n_k} = 0$ (puisque, d'après (17): $R_{m_1,\dots,m_k} \subset \overline{E}_{m_1,\dots,m_k}$). La formule (22) est ainsi établie.

Or, d'après (17) nous avons

$$R_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}} = \overline{E}_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}} - \sum_{s=1}^{k+1} \overline{E}_{n_1,\dots,n_{s-1},n_s-1};$$

ce qui donne sans peine, d'après (17) et (2):

(23) $$R_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}} \subset R_{n_1,\dots,n_k}.$$

Soit maintenant q un point de l'ensemble (19). Nous avons donc, d'après (19), $q \varepsilon S_k$ pour $k = 1, 2, \dots,$ et, d'après (18), il existe pour tout indice k un système $(n_1^k, n_2^k, \dots, n_k^k)$, tel que

(24) $$q \varepsilon R_{n_1^k, n_2^k, \dots, n_k^k}; \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

et nous en concluons tout de suite, d'après (22) et (23), que

(25) $$n_i^k = n_i^i \text{ pour } k \geqslant i. \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

Posons $n_i^i = n_i$ pour $i = 1, 2, \dots$: d'après (24) et (25), nous aurons

$$q \varepsilon R_{n_1,n_2,\dots,n_k}, \text{ pour } k = 1, 2, 3, \dots,$$

ce qui donne, d'après (17):

$$q \varepsilon \overline{E}_{n_1,n_2,\dots,n_k}; \text{ pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

Il existe donc pour tout indice k un point p_k de l'ensemble $E_{n_1,n_2,\dots,n_k}$, tel que

(26) $$\varrho(q, p_k) < \frac{1}{k}.$$

D'après la propriété (4), nous en concluons qu'il existe un point p de E, tel que

$$\lim_{n=\infty} p_k = p,$$

ce qui donne, d'après (26): $q = p$, et prouve que q est un point de l'ensemble E.

Nous avons donc démontré que $H \subset E$, ce qui donne, d'après (21), $E = H$. L'ensemble E est donc un $F_{\sigma\delta}$, ce qui prouve que les conditions de notre théorème sont suffisantes.

Notre théorème est ainsi démontré.

Soit maintenant E un ensemble $F_{\sigma\delta}$, H un ensemble homéomorphe de E. Désignons par $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ les sous ensembles de E satisfaisant aux conditions de notre théorème, par $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ leurs homéomorphes dans H. On reconnait sans peine que les ensembles $H_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ satisfont encore aux conditions de notre théorème (relativement à l'ensemble H), d'où résulte que l'ensemble H est un $F_{\sigma\delta}$. Nous obtenons ainsi le théorème de M. Mazurkiewicz que *tout ensemble homéomorphe d'un $F_{\sigma\delta}$ est un $F_{\sigma\delta}$.*

Observons encore qu'on pourrait caractériser les ensembles (A) de M. Souslin par les propriétés de seuls points de ces ensembles: on pourrait notamment démontrer sans peine le théorème suivant, analogue au théorème que nous venons de démontrer:

Pour qu'un ensemble de points E (situé dans un espace à m dimensions) soit un ensemble (A), il faut et il suffit qu'on puisse faire correspondre à tout système fini de nombres naturels $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ un sous-ensemble $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ de E, de sorte que

1) $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$

2) $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}$

3) si $n_1, n_2, n_3, \ldots$ est une suite infinie de nombres naturels et $p_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ une suite infinie de points de E, tels que $p_k \varepsilon E_{n_0, n_2, \ldots, n_k}$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, les points $p_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ convergent vers un point de E.