Sur une propriété des ensembles $F_{\sigma\delta}$.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On appelle, d'après M. Hausdorff, $F_{\sigma\delta}$ les ensembles qui sont produits (dénombrables) de sommes (dénombrables) d'ensembles fermés. M. Borel a appelé *ensemble limite complet* d'une suite (dénombrable) d'ensemble E_n $(n=1, 2, \ldots)$ l'ensemble des points qui appartiennent à une infinité de E_n (M. de la Vallée Poussin appelle cet ensemble la *plus grande limite* de E_n et le désigne par $\overline{\lim}\, E_n$). Le but de cette Note est de démontrer le suivant

Théorème: *Pour qu'un ensemble de points* (d'un espace euclidien à m dimensions) *soit un $F_{\sigma\delta}$, il faut et il suffit qu'il soit la plus grande limite d'une suite d'ensembles fermés.*

Démonstration. La condition est suffisante: cela résulte immédiatement de la formule connue

$$\overline{\lim}\, E_n = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots)(E_2 + E_3 + \ldots)(E_3 + \ldots)\ldots$$

Il nous reste donc à démontrer que la condition de notre théorème est nécessaire. Pour le prouver nous démontrerons d'abord le lemme suivant concernant les ensembles F_σ (c. à. d. les sommes dénombrables d'ensembles fermés).

Lemme. *Tout ensemble E qui est un F_σ est une somme d'une suite finie ou dénombrable d'ensembles fermés $E = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$, où tout point de E appartient à deux au plus d'ensembles F_k.*

Soit E un ensemble F_σ donné: nous avons donc $E = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots$, où $\Phi_n (n = 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles fermés. Posons $S_n = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $S_0 = 0$ et $R_n = S_n - S_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$: les ensembles S_n seront fermés et parsuite les ensembles R_n seront des F_ρ, c'est-à-dire des différences de deux ensembles fermés, et nous aurons une décomposition de l'ensemble E en une somme (finie ou dénombrable) d'ensembles F_ϱ disjoints,

$$E = R_1 + R_2 + R_3 + \dots;$$

il suffira donc démontrer notre lemme pour les ensembles F_σ.

Soit donc E un ensemble F'_ϱ donné: nous pouvons donc poser $E = A - B$, où A et B sont des ensembles fermés. Désignons (pour tout point p de A) par $\varrho(p)$ la distance du point p à l'ensemble B: nous aurons évidemment $\varrho(p) > 0$ pour tout point p de E. Or, désignons, pour tout nombre n naturel donné, par F_n l'ensemble de tous les points p de A, tels que

$$\frac{1}{n} \leqslant \varrho(p) \leqslant \frac{1}{n-1}\ [1].$$

Les ensembles $F_n (n = 1, 2, \dots)$ sont évidemment fermés (ou vides) et nous aurons $E = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$; or, on voit sans peine que les ensembles F_m et F_n, où $m < n$, ne peuvent avoir des points communs que dans le cas où $n = m + 1$ [2]. Notre lemme est ainsi démontré.

Soit maintenant E un ensemble $F_{\sigma\delta}$ donné. Nous pouvons donc poser

$$E = H_1 H_2 H_3 \dots, \tag{1}$$

où $H_n (n = 1, 2, \dots)$ sont des ensembles F_σ, et on peut encore supposer que

$$H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \dots, \tag{2}$$

(puisque le produit d'un nombre fini des ensembles F_σ est un F_σ).

Les ensembles H_n étant des F_σ, nous pouvons poser, d'après notre lemme:

$$H_n = F_n^1 + F_n^2 + F_n^3 + \dots, \tag{3}$$

où F_n^k sont des ensembles fermés (ou vides), tels que tout point de H_n appartient à deux au plus d'ensembles $F_n^k (k = 1, 2, \dots)$.

[1] Pour $n = 1$ cette inégalité signifie le même que $\frac{1}{n} \leqslant \varrho(p)$.

[2] On en déduit sans peine que tout ensemble F_σ est une somme de deux ensembles dont chacun est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés disjoints.

Soit

$$(4) \qquad (n_1, k_1), (n_2, k_2), (n_3, k_3), \ldots$$

une suite infinie formée de tous les systèmes différents de deux indices naturels (n, k). Posons

$$(5) \qquad E_i = F_{n_i}^{k_i} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots);$$

je dis que

$$(6) \qquad E = \overline{\lim}\, E_i.$$

Soit p un point qui n'appartient pas à l'ensemble E. D'après (1), il existe un indice m, tel que p non εH_m, donc, d'après (2), p non εH_n, pour $n \geqslant m$, et, d'après (3): p non εF_n^k pour $n \geqslant m$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Or, d'après la propriété de la décomposition (3), pour n donné, la la formule $p \varepsilon F_n^k$ ne peut subsister que pour deux au plus indices k différent. Il en résulte que la formule $p \varepsilon F_n^k$ subsiste pour $2(m-1)$ au plus systèmes différents de deux indices naturels (n, k). Donc, d'après (5) (les systèmes de la suite (4) étant tous différents) p n'appartient qu'à un nombre fini (ou nul) d'ensembles (5), et par-suite p non $\varepsilon \overline{\lim}\, E_i$. Nous avons donc démontré que la formule p non εE entraîne la formule p non $\varepsilon \overline{\lim}\, E_i$, d'où résulte que

$$(7) \qquad \overline{\lim}\, E_i \subset E.$$

Or, soit p un point de E. D'après (1), nous avons $p \varepsilon H_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$; d'après (3), il existe donc pour tout n naturel un indice k, tel que $p \varepsilon F_n^k$. Il en résulte que p appartient à une infinité d'ensembles (5): donc p appartient à l'ensemble $\overline{\lim}\, E_i$. Par conséquent

$$(8) \qquad E \subset \overline{\lim}\, E_i.$$

Les formules (7) et (8) donnent la formule (6), c. q. f. d. Notre théorème est ainsi démontré.

Il résulte de notre théorème et du théorème de M. Mazurkiewicz sur l'invariance topologique des ensembles $F_{\sigma\delta}$ [1]) que *le plus grandes limites des suites d'ensembles fermés sont des invariants topologiques*. Il serait intéressant de trouver une démonstration directe de cette proposition, ce qui me semble d'ailleurs assez difficile.

[1]) *Fund. Math.* II, p. 104; aussi: ce volume, p. 29.