Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

A. Khintchine (Moskau).

1. Problemstellung.

Ein Ereigniss E habe die Wahrscheinlichkeit p, $0 < p < 1$. Es werde eine unbegrenzte Anzahl von Versuchen angestellt, die voneinander unabhängig gedacht seien. Dabei sei E unter den n ersten Versuchen $m(n)$ Mal aufgetreten. Man setze $\mu(n) = m(n) - pn$.

Dann wird eine Function $\chi(n)$ gesucht, welche der folgenden Bedingung genügeleisten soll:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine solche natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$, dass man mit einer Wahrscheinlichkeit $> 1 - \varepsilon$ zweierlei behaupten darf, nämlich:

1° *Für alle $n > n_0$ ist*

$$\left|\frac{\mu(n)}{\chi(n)}\right| < 1 + \varepsilon;$$

2° *Für ein gewisses $n > n_0$ ist*

$$\left|\frac{\mu(n)}{\chi(n)}\right| > 1 - \varepsilon.$$

In einem ganz bestimmten Sinne wird hier also die exakte obere Grenze der Abweichung $|\mu(n)|$ gesucht. Es ist von vornherein klar, dass die Frage, wenn überhaupt, nur eine einzige Lösung zulässt; darunter ist natürlich gemeint, dass irgendwelche zwei Lösungen asymptotisch gleich sein müssen. Es handelt sich ja nur um ein asymptotisches Gesetz.

2. Der Satz.

Satz. — *Das Problem hat tatsächlich eine Lösung, und es ist, wenn $q = 1 - p$ gesetzt wird,*

$$\chi(n) \sim \sqrt{2pqn \lg \lg n}\ ^{1)}.$$

3. Beweis.

Man bezeichne mit $P(n, m)$ die Wahrscheinlichkeit des m — maligen Auftretens von E bei n Versuchen, also

$$P(n, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Hilfssatz I. *Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass für $|\mu(n)| < \varepsilon n$ die Relationen*

$$\frac{1-\delta}{\sqrt{2\pi pqn}} e^{-\frac{\mu^2}{2pqn}(1+\delta)} < P(n, m) < \frac{1+\delta}{\sqrt{2\pi pqn}} e^{-\frac{\mu^2}{2pqn}(1-\delta)}$$

gelten.

Ich erlaube mir, den nur auf einer ganz elementaren Rechnung mit der Stirling'schen Formel beruhenden Beweis dieses Hilfssatzes nicht durchzuführen.

Hifssatz II [2]. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ giebt es ein $\zeta > 0$ so dass für $|\mu(n)| \geqq \varepsilon n$ die Relation*

[1]) Die Herren Hardy und Littlewood behandeln in ihrer 1914 erschienenen Arbeit: Some problems of Diophantine Approximation (Acta mathematica, Bd. 37), das Problem der Frequenz der einzelnen Ziffern in der g-adischen Entwickelung einer beliebigen reellen Zahl θ. Das schärfste Theorem 1·45 dieser schönen und wichtigen Arbeit liefert für $g = 2$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|\mu(n)|}{\sqrt{n \log n}} \leqq \sqrt{\frac{1}{2}}$ für fast alle θ; dabei ist $\mu(n)$ der Überschuss über $n/2$ der Anzahl der Einser unter den ersten n Ziffern der dyadischen Entwicklung der Zahl θ. Setzt man aber in Herrn Khintchine's Formel $p = q = \frac{1}{2}$ so liefert sie sogar $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|\mu(n)|}{\sqrt{n \log\log n}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ für fast alle θ.

Wie man von einem Problem zum andern übergeht, ist von H. Steinhaus (Fundamenta mathematicae IV, pp. 286—310) gezeigt worden.

Da bekanntlich $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{|\mu(n)|}{\sqrt{n}} = 0$ fast überall gilt, hat also vorliegende Arbeit die „wahre" Grössenordnung der Funktion $\mu(n)$ gefunden. *Anm. d. Red.*

[2]) Für den Spezialfall $p = \frac{1}{a}$, a ganz, von den Herren Hardy und Littlewood bewiesen, loc. cit. Lemma 1.442.

$$P(n, m) < e^{-\zeta n}$$

gilt.

Der Beweis erfolgt ganz so, wie ihn die Herren Hardy und Littlewood in ihrer zitierten Arbeit für den von ihnen behandelten Spezialfall angegeben haben.

Hilfssatz III. *Es sei $\nu = \nu(n)$ eine Funktion von n so dass*

$$\frac{\nu}{\sqrt{n}} \to +\infty \text{ für } n \to +\infty.$$

Dann gibt es eine Konstante $K = K(p)$ so dass

$$\sum_{|\mu|>\nu} P(n, m) < K(p)\left[\frac{\sqrt{n}}{\nu} e^{-(1-\delta)\frac{\nu^2}{2pqn}} + ne^{-\zeta\nu}\right].$$

Dabei ist $\delta > 0$ beliebig klein gedacht, und $\zeta > 0$ ergibt sich aus Hilfssatz I und II.

Beweis: Es werde $\varepsilon > 0$ nach Hilfssatz I bestimmt. Dann ist

$$\sum_{|\mu|>\nu} P(n, m) = \sum_{\nu}^{\varepsilon n} + \sum_{-\nu}^{-\varepsilon n} + \sum_{\varepsilon n}^{qn} + \sum_{-\varepsilon n}^{-pn} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$

Darin ist wegen Hilfssatz II

$$S_3 < ne^{-\zeta n}, \quad S_4 < ne^{-\zeta n},$$

also a fortiori

$$S_3 < ne^{-\zeta\nu}, \quad S_4 < ne^{-\zeta\nu},$$

da im Falle $\nu > n$ $S_3 = S_4 = 0$ ist.

Ferner ist wegen Hilfssatz I

$$S_1 < \frac{1+\delta}{\sqrt{2\pi pqn}} \sum_{\mu=\nu}^{\varepsilon n} e^{-(1+\delta)\frac{\mu^2}{2pqn}} <$$

$$< \frac{1+\delta}{\sqrt{2\pi pqn}} \left\{ e^{-(1-\delta)\frac{\nu^2}{2pqn}} + \int_{\nu}^{\infty} e^{-(1+\delta)\frac{\mu^2}{2pqn}} d\mu \right\} <$$

$$< \frac{1+\delta}{\sqrt{2\pi pqn}} e^{-(1-\delta)\frac{\nu^2}{2pqn}} + K'(p) \int_{\nu\sqrt{\frac{1-\delta}{2pqn}}}^{\infty} e^{-u^2} du <$$

$$< \frac{1+\delta}{\sqrt{2\pi pqn}} e^{-(1-\delta)\frac{\nu^2}{2pqn}} + K''(p) \frac{\sqrt{n}}{\nu} e^{-(1-\delta)\frac{\nu^2}{2pqn}} < K'''(p) \frac{\sqrt{n}}{\nu} e^{-(1-\delta)\frac{\nu^2}{2pqn}}$$

für $\nu < n$; sonst ist $S_1 = S_2 = 0$.

Da für S_2 die gleiche Überlegung gilt, so ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz IV. *Es sei $\varepsilon' > 0$ beliebig klein, und $A(n)$ bedeute die Wahrscheinlichkeit der Relation*

$$\left| \frac{\mu(n)}{\sqrt{2pqn \lg \lg n}} \right| > 1 + \varepsilon'.$$

Dann ist

$$A(n) < \frac{K_1(p)}{(\lg n)^{1+\sigma}},$$

wo $\sigma > 0$ von n unabhängig ist[1].

Beweis. Die Anwendung von Hilfssatz III mit

$$\nu = (1+\varepsilon')\sqrt{2pqn \lg \lg n}$$

ergibt

$$A(n) = \sum_{|\mu| > \nu} P(n, m) <$$

$$< K(p) \left\{ \frac{1}{(1+\varepsilon')\sqrt{2pq \lg \lg n}} e^{-(1-\delta)(1+\varepsilon')^2 \lg \lg n} + n e^{-\zeta \nu} \right\} < \frac{K_1(p)}{(\lg n)^{1+\sigma}},$$

wo $1+\sigma = (1-\delta)(1+\varepsilon')^2$ gesetzt ist und folglich durch geeignete Auswahl von δ auch die Bedingung $\sigma > 0$ erfüllt werden kann.

Hilfssatz V. *Es sei $n_1 < n_2 < 2n_1$ und $B(n_1, n_2)$ bedeute die Wahrscheinlichkeit der Relation*

$$(1) \qquad \left| \frac{\mu(n_1)}{\sqrt{2pqn_1 \lg \lg n_1}} - \frac{\mu(n_2)}{\sqrt{2pqn_2 \lg \lg n_2}} \right| > \varepsilon'.$$

Dann ist

$$B(n_1, n_2) < K_{10} \{ e^{-K_{11} \frac{n_1 \lg \lg n_1}{n_2 - n_1}} + n_1 e^{-K_{12} \sqrt{n_1}} \}.$$

Dabei bedeuten hier und im Folgenden alle K von n_1 und n_2 unabhängige positive Zahlen

Beweis. Unter den $n_2 - n_1$ Versuchen vom $n_1 + 1^{\text{ten}}$ bis zum n_2^{ten} soll E $m(n_1, n_2)$ Mal auftreten. Dann ist offenbar, wenn wir $\mu(n_1, n_2) = m(n_2 - n_1) - p(n_2 - n_1)$ setzen

$$\mu(n_2) = \mu(n_1) + \mu(n_1, n_2),$$

[1]) Alle n von hier an $\geqslant 3$.

also kann statt (1) auch

$$\left|\mu(n_1)\left\{\frac{1}{\sqrt{2pqn_1\lg\lg n_1}}-\frac{1}{\sqrt{2pqn_2\lg\lg n_2}}\right\}-\frac{\mu(n_1,n_2)}{\sqrt{2pqn_2\lg\lg n_2}}\right|>\varepsilon'$$

geschrieben werden. Daraus ersieht man, dass, wenn (1) erfüllt ist, notwendigerweise auch wenigstens eine der beiden Relationen

$$\left|\mu(n_1)\left\{\frac{1}{\sqrt{2pqn_1\lg\lg n_2}}-\frac{1}{\sqrt{2pqn_2\lg\lg n_2}}\right\}\right|>\frac{\varepsilon'}{2} \tag{2}$$

und

$$\left|\frac{\mu(n_1,n_2)}{\sqrt{2pqn_2\lg\lg n_2}}\right|>\frac{\varepsilon'}{2} \tag{3}$$

erfüllt sein muss. Es seien nun $B_1(n_1, n_2)$ resp. $B_2(n_1, n_2)$ die Wahrscheinlichkeiten von (2) resp. (3). Dann ist folglich

$$B(n_1, n_2) \leqq B_1(n_1, n_2) + B_2(n_1, n_2). \tag{4}$$

Die Relation (2) ergibt nun

$$|\mu(n_1|>\frac{\varepsilon'}{2}\cdot\frac{\sqrt{2pq}\sqrt{n_1n_2\lg\lg n_1\lg\lg n_2}}{\sqrt{n_2\lg\lg n_2}-\sqrt{n_1\lg\lg n_1}},$$

also, wegen $n_1 < n_2$ und

$$\sqrt{n_2\lg\lg n_2}-\sqrt{n_1\lg\lg n_1}<(n_2-n_1)\frac{\lg\lg n_1}{\sqrt{n_1\lg\lg n_1}},$$

$$|\mu(n_1)|>K_2\frac{n_1\sqrt{n_1\lg\lg n_1}}{n_2-n_1}.$$

Wir wenden Hilfssatz III mit $v=K_2\dfrac{n_1\sqrt{n_1\lg\lg n_1}}{n_2-n_1}$, $n=n_1$ an und erhalten somit

$$B_1(n_1, n_2)<K\left\{\frac{n_2-n_1}{K_2n_1\sqrt{\lg\lg n_1}}e^{-(1-\delta)\frac{K_2^2n_1^2\lg\lg n_1}{2pq(n_2-n_1)^2}}+n_1e^{-\zeta v}\right\}< \tag{5}$$

$$<K_3\{e^{-K_4\frac{n_1\lg\lg n_1}{n_2-r_1}}+n_1e^{-K_5\sqrt{n_1}}\}.$$

Anderseits folgt aus (3)

$$|\mu(n_1, n_2|>K_6\sqrt{n_1\lg\lg n_1},$$

und Hilfssatz III mit $v=\sqrt{n_1\lg\lg n_1}$, $n=n_2-n_1$ ergibt

$$(6)\qquad B_2(n_1, n_2) < K\left\{\frac{\sqrt{n_2 - n_1}}{K_6\sqrt{n_1 \lg\lg n_1}}\, e^{-(1-\delta)\frac{K_8^2 n_1 \lg\lg n_1}{2pq(n_2-n_1)}} + (n_2 - n_1)e^{-\zeta v}\right\} <$$

$$< K_7\left\{e^{-K_8\frac{n_1\lg\lg n_1}{n_2-n_1}} + n_1 e^{-K_9\sqrt{n_1}}\right\}.$$

Aus (4), (5) und (6) folgt endlich

$$B(n_1, n_2) < K_{10}\left\{e^{-K_{11}\frac{n_1\lg\lg n_1}{n_2-n_1}} + n_1 e^{-K_{12}\sqrt{n_1}}\right\},$$

womit Hilfssatz V bewiesen ist.

Hilfssatz VI. *Es bedeute nun $C(n_1, n_2)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens eine der Relationen*

$$\left|\frac{\mu(n_1)}{\sqrt{2pqn_1\lg\lg n_1}} - \frac{\mu(b)}{\sqrt{2pqb\lg\lg b}}\right| > \varepsilon' \quad (n_1 + 1 \leqq b \leqq n_2,\ n_1 < n_2 < 2n_1,$$

erfüllt ist. Dann ist

$$C(n_1, n_2) < K_{10} n_1\left\{e^{-K_{11}\frac{n_1\lg\lg n_1}{n_2-n_1}} + n_1 e^{-K_{12}\sqrt{n_1}}\right\}.$$

Beweis. Folgt aus Hilfssatz V wegen

$$C(n_1, n_2) \leqq \sum_{b=n_1+1}^{n_2} B(n_1, b),$$

denn die Anzahl der Summanden rechts ist $n_2 - n_1 < n_1$ und jeder Summand wegen Hilfssatz V kleiner als

$$K_{10}\left\{e^{-K_{11}\frac{n_1\lg\lg n_1}{n_2-n_1}} + n_1 e^{-K_{12}\sqrt{n_1}}\right\}.$$

Beweis der ersten Hälfte des Satzes. Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig angegeben und $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{3}$ gewählt. Ferner sei $\tau < 1$ eine positive Zahl, die später näher bestimmt werden soll.

Ich setze

$$n(m) = n(m, 0) = [(1+\tau)^m] + 1,$$

und allgemein

$$n(m, k) = \left[(1+\tau)^m\left(1 + \frac{k\tau}{m}\right)\right] + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

Dann ergibt erstens Hilfssatz IV, $n = n(m)$ gesetzt,

$$(7)\qquad A(n(m)) < \frac{K_1}{(\lg n(m))^{1+\sigma}} < \frac{K_1}{(m\lg(1+\tau))^{1+\sigma}} = \frac{K_{13}}{m^{1+\sigma}}.$$

Zweitens setze ich in Hilfssatz V $n_1 = n(m)$, $n_2 = n(m, k)$, und erhalte somit für genügend grosses m und $0 \leqq k \leqq m$:

$$B(n(m), n(m, k)) < K_{10}\left\{e^{-K_{11}\frac{(1+\tau)^m(\lg m + \lg\lg(1+\tau))}{\frac{K\tau}{m}(1+\tau)^m+1}} + (1+\tau)^{m+1} e^{-K_{12}\sqrt{(1+\tau)^m}}\right\} <$$

$$< K_{10}\left\{e^{-K_{11}\frac{\lg m + \lg\lg(1+\tau)}{\tau+\frac{1}{(1+\tau)^m}}} + (1+\tau)^{m+1} e^{-K_{12}\sqrt{(1+\tau)^m}}\right\} < K_{14}\, e^{-K_{11}\frac{\lg m}{\tau+\frac{1}{(1+\tau)^m}}}.$$

Nun sei von vornherin τ so gewählt, dass $K_{11} > 2\tau$, also für genügend grosses m auch $K_{11} > 2\left(\tau + \frac{1}{(1+\tau)^m}\right)$ ist. Dann folgt

$$B(n(m), n(m, k)) < \frac{K_{14}}{m^{2+\sigma_1}},$$

mit $\sigma_1 > 0$, für genügend grosses m. Man erhält daher

$$\sum_{k=1}^{m} B(n(m), n(m, k)) < \frac{K_{14}}{m^{1+\sigma'}}. \tag{8}$$

Endlich setze ich in Hilfssatz VI $n_1 = n(m, k)$, $n_2 = n(m, k+1)$, $0 \leqq k \leqq m-1$, und erhalte für genügend grosses m:

$$C(n(m, k), n(m, k+1)) <$$

$$< K_{10}(1+\tau)^{m+1}\left\{e^{-K_{11}\frac{(1+\tau)^m(\lg m + \lg\lg(1+\tau))}{\frac{\tau}{m}(1+\tau)^m+1}} + (1+\tau)^{m+1} e^{-K_{12}\sqrt{(1+\tau)^m}}\right\} =$$

$$= K_{10}(1+\tau)^{m+1}\left\{e^{-K_{11}\frac{m(\lg m + \lg\lg(1+\tau))}{\tau+\frac{m}{(1+\tau)^m}}} + (1+\tau)^{m+1} e^{-K_{12}\sqrt{(1+\tau)^m}}\right\} =$$

$$= K_{10}\left\{e^{(m+1)\lg(1+\tau) - K_{11}\frac{m \lg m}{\tau+\frac{m}{(1+\tau)^m}} - K_{11}\frac{m\lg\lg(1+\tau)}{\tau+\frac{m}{(1+\tau)^m}}} + e^{2(m+1)\lg(1+\tau) - K_{12}\sqrt{(1+\tau)^m}}\right\} <$$

$$< K_{15}\, e^{-m},$$

uud folglich

$$\sum_{k=0}^{m-1} C(n(m, k), n(m, k+1)) < K_{15}\, m\, e^{-m}. \tag{9}$$

Nun sei die positive ganze Zahl m_0 so gross gewählt, dass erstens für $m \geqq m_0$ (7), (8) und (9) erfüllt sind und dass zweitens

$$\sum_{m=m_0}^{\infty}\left\{\frac{K_{13}}{m^{1+\sigma}} + \frac{K_{14}}{m^{1+\sigma'}} + K_{15}\, m\, e^{-m}\right\} < \varepsilon \tag{10}$$

ist, und man setze $n_0 = n(m_0)$.

Dann ist erstens die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenigstens für ein $m \geqq m_0$ die Relation

$$\left| \frac{\mu(n(m))}{\sqrt{2pqn(m)\lg\lg n(m)}} \right| > 1+\varepsilon' \tag{11}$$

erfüllt ist, nicht grösser als $\sum\limits_{m=m_0}^{\infty} A(n(m))$, also wegen (7) kleiner als $\sum\limits_{m=m_0}^{\infty} \frac{K_{13}}{m^{1+\sigma}}$.

Zweitens ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für wenigstens ein Paar m, k ($m \geqq m_0$, $1 \leqq k \leqq m$) die Relation

$$\left| \frac{\mu(n(m))}{\sqrt{2pqn(m)\lg\lg n(m)}} - \frac{\mu(n(m,k))}{\sqrt{2pq(m,k)\lg\lg n(m,k)}} \right| > \varepsilon' \tag{12}$$

erfüllt ist, nicht grösser als

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} B(n(m),\, n(m,k)),$$

also wegen (8) kleiner als $\sum\limits_{m=m_0}^{\infty} \frac{K_{14}}{m^{1+\sigma'}}$.

Endlich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für wenigstens ein $n \geqq n_0$, wenn m und k durch

$$n(m,k) \leqq n < n(m,k+1)$$

bestimmt werden, die Relation

$$\left| \frac{\mu(n)}{\sqrt{2pqn\lg\lg n}} - \frac{\mu(n(m,k))}{\sqrt{2pqn(m,k)\lg\lg n(m,k)}} \right| > \varepsilon' \tag{13}$$

erfüllt ist, nicht grösser als

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} C(n(m,k),\, n(m,k+1)),$$

also wegen (7) kleiner als

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} K_{15}\, m\, e^{-m}.$$

Alles in Allem, erlaubt uns also (10) mit einer Wahrscheinlichkeit grösser als $1-\varepsilon$ zubehaupten, dass für kein $n > n_0$, wenn m

und k durch $n(m, k) \leq n < n(m, k+1)$ bestimmt werden, irgendeine der Relationen (11), (12) oder (13) erfüllt ist. Demgemäss schliesst man mit einer Wahrscheinlichkeit $> 1 - \varepsilon$, das für alle $n \geq n_0$

$$\left|\frac{\mu(n)}{\sqrt{2pqn\lg\lg n}}\right| \leq \left|\frac{\mu(n)}{\sqrt{2pqn\lg\lg n}} - \frac{\mu(n(m,k))}{\sqrt{2pqn(m,k)\lg\lg n(m,k)}}\right| +$$
$$+\left|\frac{\mu(n(m,k))}{\sqrt{2pqn(m,k)\lg\lg n(m,k)}} - \frac{\mu(n(m))}{\sqrt{2pqn(m)\lg\lg n(m)}}\right| +$$
$$+\left|\frac{\mu(n(m))}{\sqrt{2pqn(m)\lg\lg n(m)}}\right| \leq \varepsilon' + \varepsilon' + 1 + \varepsilon' = 1 + 3\varepsilon' < 1 + \varepsilon$$

ist, womit die erste Hälfte des Satzes bewiesen ist.

Hilfssatz VII. *$D(n)$ bedeute die Wahrscheinlichkeit der Relation*

$$\frac{\mu(n)}{\sqrt{2pqn\lg\lg n}} > 1 - \varepsilon'. \qquad (0 < \varepsilon' < 1)$$

Dann ist

$$D(n) > K_{16}\frac{\sqrt{\lg\lg n}}{(\lg n)^{1-\sigma_2}},$$

wo $\sigma_2 > 0$ von n unabhängig ist,

Beweis. Es sei $\varepsilon'' < \varepsilon'$ positiv; wegen Hilfssatz I ist

$$D(n) = \sum_{\mu > (1-\varepsilon')\sqrt{2pqn\lg\lg n}} P(n, m) > \sum_{\mu > (1-\varepsilon')\sqrt{2pqn\lg\lg n}}^{\mu < (1-\varepsilon'')\sqrt{2pqn\lg\lg n}} P(n, m) > \frac{1-\delta}{\sqrt{\pi pqn}} \sum_{\mu > (1-\varepsilon')\sqrt{2pqn\lg\lg n}}^{\mu < (1-\varepsilon'')\sqrt{2pqn\lg\lg n}} e^{-\frac{\mu^2}{2pqn}(1+\delta)} >$$
$$> \frac{\delta - 1}{\sqrt{2\pi pqn}} \{(\varepsilon' - \varepsilon'')\sqrt{2pqn\lg\lg n} - 1\} e^{-(1-\varepsilon'')^2(1+\delta)\lg\lg n} =$$
$$= \left\{\frac{(1-\delta)(\varepsilon' - \varepsilon'')\sqrt{\lg\lg n}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1-\delta}{\sqrt{2\pi pqn}}\right\} \cdot \frac{1}{(\lg n)^{1-\sigma_2}} > K_{16}\frac{\sqrt{\lg\lg n}}{(\lg n)^{1-\sigma_2}},$$

wo $\sigma_2 = 1 - (1-\varepsilon'')^2(1+\delta)$ für genügend kleine δ positiv ist.

Beweis der zweiten Hälfte des Satzes. Es seien R_1, R_2 und R_3 so gewählt, dass

$$1 - \varepsilon < R_1 < R_2 < R_3 < 1$$

sei, und ferner A ganz, positiv und so gross, dass

$$(14) \qquad 1)\ A > n_0. \quad 2)\ \sqrt{1 - \frac{1}{A}} > \frac{R_2}{R_3}, \quad 3)\ 1 + \frac{1}{\sqrt{A}} < \frac{R_1}{1-\varepsilon}$$

sei. Es bedeute P_k die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwar

$$\left|\frac{\mu(A^k)}{\sqrt{2pqA^k \lg\lg A^k}}\right| > 1-\varepsilon, \tag{15}$$

aber für jedes $i < k$

$$\left|\frac{\mu(A^i)}{\sqrt{2pqA^i \lg\lg A^i}}\right| \leqslant 1-\varepsilon \tag{16}$$

ist. Dann bedeutet $\sum\limits_{k=1} P_k$ genau die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für wenigstens ein $k < t$ (15) erfüllt ist.

Nun betrachten wir die $A^k - A^{k-1}$ Versuche der Nummern von $A^{k-1}+1$ bis A^k; dabei soll E genau M Mal auftreten. Nach Hilfssatz VII, $1-\varepsilon' = R_3$ gesetzt, ist die Wahrscheinlichkeit der Relation

$$\frac{M-(A^k-A^{k-1})p}{\sqrt{2pq(A^k-A^{k-1})\lg\lg(A^k-A^{k-1})}} > R_3 \tag{17}$$

grösser als

$$K_{16}\frac{\sqrt{\lg\lg(A^k-A^{k-1})}}{(\lg(A^k-A^{k-1}))^{1-\sigma_3}}.$$

Nun seien (17) für k und (16) für jedes $i < k$ erfüllt. Es ist $M = m(A^k) - m(A^{k-1})$, also

$$M-(A^k-A^{k-1})p = \mu(A^k) - \mu(A^{k-1}).$$

Daher folgt aus (17):

$$\mu(A^k) > \mu(A^{k-1}) +$$

$$+ R_3\sqrt{2pqA^k\left(1-\frac{1}{A}\right)\left\{\lg\lg A^k + \lg\left(1+\frac{\lg\left(1-\frac{1}{A}\right)}{k\lg A}\right)\right\}},$$

also wegen (14) 2)

$$\mu(A^k) > \mu(A^{k-1}) + R_2\sqrt{2pqA^k\left\{\lg\lg A^k + \lg\left(1+\frac{\lg\left(1-\frac{1}{A}\right)}{k\lg A}\right)\right\}},$$

also, für genügend grosse k,

$$\mu(A^k) > \mu(A^{k-1}) + R_1\sqrt{2pqA^k\lg\lg A^k}.$$

Andererseits ergibt (16) für $i = k-1$

$$\mu(A^{k-1}) \geqslant -(1-\varepsilon)\sqrt{2pq\,A^{k-1}\lg\lg A^{k-1}} >$$
$$> -(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{2pq\,A^{k}\lg\lg A^{k}},$$

also wegen (11) 3)

$$\mu(A^{k}) > \left(R_1 - (1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{\sqrt{A}}\right)\sqrt{2pq\,A^{k}\lg\lg A^{k}} > (1-\varepsilon)\sqrt{2pq\,A^{k}\lg\lg A^{k}}.$$

Es ergibt sich also, dass (15) eine Folge von (16) und (17) ist. Deswegen ist P_k nicht kleiner als die Wahrscheinlichkeit der gleichzeitigen Erfüllung von (16) und (17). Nun ist offenbar die Wahrscheinlichkeit von (16) gleich $1 - \sum_{i=1}^{k-1} P_i$. Da ferner (16) und (17) voneinander unabhängige Ereignisse bezeichnen, so ist folglich, wenn Π_k die Wahrscheinlichkeit von (17) bedeutet,

$$P_k \geqslant \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} P_i\right)\cdot \Pi_k \quad \text{(für genügend grosses } k\text{)}. \tag{18}$$

Es ist aber

$$\Pi_k > K_{16}\,\frac{\sqrt{\lg\lg(A^{k}-A^{k-1})}}{(\lg(A^{k}-A^{k-1}))^{1-\sigma_2}} > K_{17}\cdot\frac{1}{k^{1-\sigma_2}}.$$

Das ist aber das allgemeine Glied einer divergenten Reihe. Aus (18) folgt dann, dass der Ausdruck $1 - \sum_{1}^{k} P_i$ mit wachsendem k notwendig unendlich klein werden muss, denn sonst würde rechts in (18) dass allgemeine Glied einer divergenten Reihe stehen, was für die linke Seite nicht zutrifft. Somit ist

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} P_i = 1.$$

Es sei k_0 so gross, das

$$\sum_{i=1}^{k_0} P_i > 1 - \varepsilon$$

ist. Dann kann ich mit einer Wahrscheinlichkeit $> 1 - \varepsilon$ behaupten, dass für wenigstens ein k, $0 < k \leqq k_0$, die Relation (15) erfüllt wird. Wegen (14) 1) ist damit auch die zweite Hälfte des Satzes bewiesen.

4. Anwendung auf die Theorie der dyadischen Brüche.

Mutatis mutandis lässt sich die ganze Beweismethode des Satzes auf die metrische Mengentheorie übertragen, und ergibt dann für den Spezialfall $p = q = \frac{1}{2}$.

Satz: *Es sei x eine Irrationalzahl, die wir in einen Dualbruch entwickelt denken. Unter den n ersten Ziffern dieser Entwicklung soll die Null $m(n)$ Mal auftreten. Man bezeichne mit $\mu(n)$ die Differenz $m(n) - \frac{n}{2}$. Dann ist für alle x mit Ausnahme einer Menge vom Masse Null*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|\mu(n)|}{\sqrt{\frac{n \lg \lg n}{2}}} = 1.$$

Die Herren Hardy und Littlewood haben in ihrer zitierten Arbeit einerseits

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|\mu(n)|}{\sqrt{n}} = +\infty,$$

andererseits

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|\mu(n)|}{\sqrt{n \lg n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

bewiesen. Die gebliebene Lücke ist nun offenbar durch den letzten Satz vollständig ausgefüllt [1]).

[1]) Damit ist auch ein Desideratum erfüllt, welches Herr Steinhaus (*Fundamenta Mathematicae* t. IV) ausgesprochen hat.

Moskau, December 1922.