# Une propriété des correspondances biunivoques.

Par

C. Kuratowski (Varsovie).

Le problème traité ici m'a été communiqué par M. Tarski. Pour établir un théorème géométrique sur l'équivalence par décomposition [1]), il lui fallut généraliser le theorème suivant de M. Bernstein, concernant les nombres cardinaux: l'égalité $2\mathfrak{m} = 2\mathfrak{n}$ entraîne $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ [2]). Le théorème que je vais démontrer présente la généralisation demandée; son rapport au théorème cité de M. Bernstein est tout à fait analogue à celui du théorème de M. Banach (voir note précédente) au „théorème d'équivalence" de Schröder-Bernstein.

*Si l'on décompose un ensemble $E$ de deux manières différentes:*

$$E = M + N, \; M \times N = 0, \tag{1}$$

$$E = P + Q, \; P \times Q = 0, \tag{2}$$

*et s'il existe une transformation biunivoque $\varphi(x)$ de $M$ en $N$, ainsi qu'une transformation biunivoque $\psi(x)$ de $P$ en $Q$, alors les ensembles $M$ et $Q$ se décomposent en 4 parties disjointes de façon que:*

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4, \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4, \tag{3}$$

$$Q_1 = M_1, \; Q_2 = \psi(M_2), \; Q_3 = \varphi(M_3), \; Q_4 = \psi\varphi(M_4). \tag{4}$$

Démonstration. La fonction $\varphi(x)$ n'étant définie que pour $x \varepsilon M$, on peut, en vertu des égalités $\varphi(M) = N$ et $M \times N = 0$, l'étendre aux $x$ appartenant à $N$ de sorte que $\varphi\varphi(x) = x$ quel que

[1]) V. Banach et Tarski: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, ce volume.

[2]) Cf. F. Bernstein Math. Ann. 61, D. König Math Ann. 77, W. Sierpiński Fund. Math. III.

soit $x \varepsilon E$. De même, nous supposerons la fonction $\psi(x)$ assujettie à l'égalité $\psi\psi(x) = x$ pour $x \varepsilon E$.

$a$ étant un élément arbitraire de $E$, nous appellerons *chaîne* de $a$ le plus petit ensemble $C(a)$ qui contient $a$ et qui contient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ dès qu'il contient $x$. En vertu des identités $\varphi\varphi(x) = x = \psi\psi(x)$, la chaîne $C(a)$ peut être représentée par une suite doublement infinie:

$$(5) \qquad \ldots \psi\varphi\psi(a),\ \varphi\psi(a),\ \psi(a),\ a,\ \varphi(a),\ \psi\varphi(a), \ldots$$

(dont les éléments peuvent se répéter).

Observons que, si $b \varepsilon C(a)$, alors $C(a) = C(b)$. On a donc:

$$C(x) \times C(y) = 0 \text{ ou bien } C(x) = C(y),$$

quels que soient $x$ et $y$.

L'ensemble $E$ se décompose ainsi en des chaînes **disjointes** (finies ou infinies). Choisissons en de chacune d'elles un élément appartenant à $M$ [1]).

Soit $C$ une chaîne arbitraire; soit $x_0$ son élément „choisi". Les éléments de $C$ constituent donc une suite:

$$(6) \qquad \ldots x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_{+1},\ x_{+2}, \ldots$$

où

$$x_{2n} = \psi(x_{2n-1}) = \psi(x_{2n+1}),\ x_{2n+1} = \varphi(x_{2n}) = \varphi(x_{2n+2}),\ -\infty < n < +\infty.$$

Soit $x_k$ un élément de $M$. Nous lui attacherons un élément $x_{l(k)}$ de $Q$ en convenant que:

1° si $k$ est pair, alors

$$(7) \qquad l(k) = k + 1$$

ou

$$(8) \qquad l(k) = k + 2,$$

suivant que $x_{k+1}$ appartient à $Q$ ou non;

2° si $k$ est impair,

$$(9) \qquad l(k) = k$$

ou

$$(10) \qquad l(k) = k + 1,$$

suivant que $x_k$ appartient à $Q$ ou non.

[1]) La démonstration a recours en ce point à l'axiome du choix de Zermelo. On pourrait omettre cet axiome, en prolongeant dans l'énoncé du théorème les suites $M_1, \ldots M_4$ et $Q_1, \ldots Q_4$ dans l'infini (le raisonnement serait analogue à celui de M. Sierpiński dans sa note citée). Mais alors le théorème ne serait plus applicable au problème de l'équivalence par décomposition **finie**. On ne pourrait l'appliquer qu'au cas de décomposition dénombrable.

Nous avons établi par cette convention une correspondance biunivoque entre les éléments de $M$ et de $Q$ qui entrent dans la chaîne $C$.

Nous allons prouver d'abord que cette correspondance est univoque. Supposons, à ce but, qu'il existe deux termes de la suite (6) tels que $x_i = x_j$. Je dis que la différence $d = |i - j|$ est paire. Je vais le prouver par induction.

1°: $d \neq 1$, car autrement on aurait $\varphi(x_i) = x_j = x_i$ ou $\psi(x_i) = x_j = x_i$ contrairement à l'hypothèse $M \times N = 0 = P \times Q$;

2°: $d \neq 3$, car $x = \varphi\psi\varphi(x)$ entraîne $\varphi(x) = \varphi\varphi\psi\varphi(x) = \psi\varphi(x)$, contrairement à 1°; de même $x \neq \psi\varphi\psi(x)$;

3°: si la proposition est vraie pour $d \leqslant 2n - 1$, elle subsiste pour $2n + 1$ $(> 3)$, car, autrement, on a, pour $x = x_i$, $h(x) = x$, où $h(x)$ est une opération $\dots\varphi\psi\varphi\dots$ obtenue par un groupement (fini) des $\varphi$ et $\psi$, telle que $h = \varphi\psi h_1 \varphi\psi$ ou bien $h = \psi\varphi h_1 \varphi\psi$, $h_1$ étant composé de $2n - 3$ fonctions; or l'égalité $x = \varphi\psi h_1 \psi\varphi(x)$ entraîne $\psi\varphi(x) = h_1 \psi\varphi(x)$ contrairement à l'hypothèse que $h_1(y) \neq y$ quel que soit $y$; donc $x \neq \varphi\psi h_1 \psi\varphi(x)$ et de même $x \neq \psi\varphi h_1 \varphi\psi(x)$.

$|i - j|$ étant pair, on a $x_{j+1} = \varphi(x_j)$ si $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ et $x_{j+1} = \psi(x_j)$ si $x_{i+1} = \psi(x_i)$. Donc, en tout cas: $x_{j+1} = x_{i+1}$ et, en général:

(11) $x_i = x_j$ entraîne $x_{i+n} = x_{j+n}$ pour tout $n$ entier.

On en conclut que, si un élément de $M$ apparait dans la suite (6) deux fois, une fois comme $x_i$ et l'autre fois comme $x_j$, on a $x_{l(i)} = x_{l(j)}$, ce qui prouve qu'à un même élément de $M$ ne correspondent jamais deux éléments différents de $Q$.

La réciproque est aussi vraie, car supposons que $x_{l(i)} = x_{l(j)}$. Il s'agit de prouver que $x_i = x_j$. En vertu du précédent, $l(i) - l(j)$ est pair. Nous en déduirons que $i - j$ est pair. En effet, si $i$ est pair et $j$ impair, il faut, pour que $l(i) - l(j)$ soit pair, qu'on ait: $l(i) = i + 1$ et $l(j) = j$ ou bien: $l(i) = i + 2$ et $l(j) = j + 1$. Mais dans le premier cas: $x_{l(i)} = x_{i+1} = \varphi(x_i)$, qui appartient à $N$, tandis que $x_{l(j)} = x_j$ appartient à $M$, contrairement à l'hypothèse $x_{l(i)} = x_{l(j)}$. De même dans le second cas. Donc $i - j$ est pair, d'où on conclut que les nombres $l(i)$ et $l(j)$ satisfont simultanément ou bien à (7) ou à (8) ou à (9) ou à (10); comme, selon (11), $x_{l(i)} = x_{l(j)}$ entraîne $x_{l(i)-1} = x_{l(j)-1}$ et $x_{l(i)-2} = x_{l(j)-2}$, on en déduit: $x_i = x_j$.

Enfin, tout élément $x_i$ de $Q$ correspond à un élément de $M$. Car, si $i$ est pair, on a $x_i = \psi(x_{i-1})$ et en posant $i = l(k)$ on est dans le cas (10) ou (8) suivant que $x_{i-1}$ appartient à $M$ ou non; si $i$ est impair, les cas (9) ou (7) se présentent suivant que $x_i \varepsilon M$ ou non.

Nous définirons à présent les ensembles $M_1, \dots M_4$. Soit $m \varepsilon M$. Il existe donc une seule chaîne $C$ qui contienne $m$. Soit $m = x_k$. Si $k$ est impair, nous rangeons $m$ dans l'ensemble $M_1$ ou $M_2$ suivant que $x_k$ appartient à $Q$ ou non; si $k$ est pair, $m$ devient élément de $M_3$, lorsque $x_{k+1} \varepsilon Q$, et élément de $M_4$ dans le cas contraire.

Les ensembles $Q_1, \dots Q_4$ étant définis par les égalités (4), on parvient à la décomposition demandée.

Il résulte directement de notre théorème que, *si l'on décompose un ensemble de points $E$ de deux façons différentes en deux parties congruentes ($M \cong N$ et $P \cong Q$), les ensembles $M$ et $Q$ se composent chacun de 4 parties respectivement congruentes $M_i \cong Q_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$)* [1].

Plus généralement, si on applique ce théorème aux relations qui possèdent la propriété ($\alpha$) (v. Note précédente), on parvient à la conclusion suivante:

Etant donnée une relation $R$ qui possède la propriété ($\alpha$) et qui est symétrique, transitive et réfléxive, si l'on décompose un ensemble $E$ conformément aux formules (1) et (2) et si, en outre, $MRN$ et $PRQ$, alors chacun des ensembles $M$, $N$, $P$ et $Q$ se compose de 4 parties disjointes: $M_1, \ldots M_4, \ldots Q_1, \ldots Q_4$ tels que $M_i R N_i R P_i R Q_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Ceci s'applique au cas ou „$XRY$" veut dire p. ex. que les ensembles $X$ et $Y$ sont homéomorphes, ou bien sont ordonnés pareillement, ou sont congruents.

Si on ajoute aux hypothèses, faites sur la relation $R$, la propriété d'être une relation ($\beta$), on en conclut que les conditions: (1), (2), $MRN$ et $PRQ$ entraînent que tous les 4 ensembles $M$, $N$, $P$ et $Q$ sont en relation $R$ entre soi.

Tels sont p. ex. les cas de même puissance et d'équivalence (géom.) par décomposition.

[1]) Dans des cas particulièrement simples (p. ex. de la division de l'ellipse par ses axes) on peut parvenir à cette décomposition sans avoir recours à notre théorème. Une application de ce théorème est fournie par l'intéressant exemple que je dois à M. Tarski: $E =$ l'ensemble de nombres réels, $M =$ l'ensemble des nombres $x$ tels que $2n \leqslant x < 2n+1$, $P$ celui des $x$ tels que $2n\sqrt{2} \leqslant x < (2n+1)\sqrt{2}$, l'indice $n$ étant un entier variable, et $N = E - M$, $Q = E - P$.