Sur une classe de fonctions d'ensemble.

Par

S. Banach (Léopol = Lwów).

Introduction.

Dans ce Mémoire je m'occupe des fonctions d'ensembles définies pour les ensembles formant un corps $\mathcal{K}_0$. Le corps $\mathcal{K}_0$ est le produit de toutes les classes $\mathcal{K}$ de sous-ensembles du carré aux sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ (nous l'appellerons *carré fondamental*), satisfaisant aux conditions suivantes:

1) Tout carré fermé, contenu dans le carré fondamental, appartient à $\mathcal{K}$.

2) Si E_1 et E_2 appartiennent à $\mathcal{K}$, et si $E_1 E_2 = 0$, alors $E_1 + E_2$ appartient à $\mathcal{K}$.

3) Si E_1 et E_2 appartiennent à $\mathcal{K}$ et $E_2 \subset E_1$, alors $E_1 - E_2$ appartient à $\mathcal{K}$.

Nous n'excluons pas le cas où les fonctions sont définies pour les ensembles n'appartenant pas au corps $\mathcal{K}_0$, mais nous ne les étudierons que pour les éléments du corps $\mathcal{K}_0$.

Par la *dérivée supérieure* d'une fonction d'ensemble $F(X)$ (définie dans $\mathcal{K}_0$) au point p, $\overline{F'}(p)$, je comprends la limite

$$\overline{\lim_{|K| \to 0}} \frac{F(K)}{|K|},$$

où K désigne un carré fermé contenu dans le carré fondamental et contenant le point p, et où $|K|$ désigne l'aire du carré K.

D'une façon analogue je définie la *dérivée inférieure*

$$\underline{F'}(p) = \underline{\lim_{|K| \to 0}} \frac{F(K)}{|K|}.$$

Lorsqu'on a pour le point p

$$\overline{F}'(p) = \underline{F}'(p),$$

la valeur commune de ces nombres sera désignée par $F'(p)$ et appelée la *dérivée* de la fonction F au point p.

Je prouverai que pour toute fonction les dérivées supérieure et inférieure sont mesurables.

Ensuite je m'occupe de fonctions à variation bornée. Une fonction $F(X)$ est dite *à variation bornée*, s'il existe un nombre fini M, tel que pour toute suite finie $E_1, E_2, \ldots, E_n$ d'ensembles de $\mathcal{K}_0$, où $E_i E_j = 0$ pour $i \neq j$, subsiste l'inégalité

$$|F(E_1)| + |F(E_2)| + \ldots + |F(E_n)| \leqslant M.$$

Je démontre que l'ensemble de points, où l'une des dérivées d'une fonction à variation bornée est infinie ($+\infty$ ou $-\infty$), est de mesure nulle.

Puis, j'étudie les fonctions à variation bornée qui satisfont à la condition

$$F(E_1+E_2) \leqslant F(E_1) + F(E_2)\ ^{1)}, \text{ pour } E_1 \,\varepsilon\, \mathcal{K}_0,\ E_2 \,\varepsilon\, \mathcal{K}_0,\ E_1 E_2 = 0.$$

J'appellerai ces fonctions *normales*, et je prouverai qu'elles ont presque partout une dérivée. Un cas particulier de ces fonctions sont les fonctions *additives* (au sens restreint) bornées supérieurement ou inférieurement, p. e. les fonctions additives positives.

Définition du réseau. Divisons le plan par des droites en carrés égaux: l'ensemble de ces carrés forme un *grillage* que nous désignerons par G. Une suite infinie des grillages $G_1, G_2, G_3, \ldots$ sera dit un *réseau*, si les conditions suivantes sont vérifiées: 1) les côtés des carrés formant G_n tendent vers 0 avec $1/n$; 2) tout carré du grillage G_n est contenu dans un carré de G_p, lorsque $n > p$.

Je désignerai un réseau par le signe R.

Remarque. En tenant compte de la définition du reseau on voit sans peine qu'il existe, pour toute fonction à variation bornee, un nombre fini M, tel que la somme des valeurs absolues de la fonction considérée, étendue aux carrés quelconques appartenant à un réseau donné et n'empiétant pas[2]), est $< M$.

[1]) Cette condition pourrait être remplacée par l'inégalité $F(E_1+E_2) \geqslant F(E_1) + F(E_2)$ comme il suit de la substitution $F(E) = -\Phi(E)$.

[2]) C'est à dire n'ayant pas deux à deux de points intérieurs communs.

Définition. Si ω est un domaine appartenant à $\mathcal{K}_0$ et R un réseau formé des grillages $G_n (n=1, 2, \ldots)$, nous appellerons *variation supérieure relative* de $F(X)$ dans ω par rapport au reseau R, la limite supérieure des sommes $\sum_{i=1}^{r_n} F(K_i^n)$, pour $n \to \infty$, où $K_i^n (i=1, 2, \ldots, r_n)$ sont des carrés du grillage G_n contenus dans ω. D'une façon analogue on définit la *variation inférieure relative* dans le domaine ω par rapport à R. Nous les désignerons par les symboles $\overline{V}[F, R, \omega]$, resp. $\underline{V}[F, R, \omega]$. Lorsque $\overline{V}[F, R, \omega] = \underline{V}[F, R, \omega]$, nous parlerons tout court de la variation relative dans ω par rapport à R.

La *variation supérieure absolue* est le nombre $\overline{V}[|F|, R, \omega]$; dans un sens analogue seront utilisées les symboles $\underline{V}[|F|, R, \omega]$ et $V[|F|, R, \omega]$.

Nous dirons que la fonction $F(X)$ *est absolument continue* par rapport au réseau R, s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$, tel que pour tout n naturel et tout ensemble des carrés $K_i (i=1, 2, \ldots, r)$ appartenant à G_n et satisfaisant aux conditions

1) $\qquad K_i K_j = 0 \quad$ pour $\quad i \neq j$,

2) $\qquad \sum_{i=1}^{r} |K_i| < \eta$,

subsiste l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{r} |F(K_i)| < \varepsilon.$$

Remarque. On pourrait démontrer sans peine que la condition 1) peut être remplacée par la condition que les carrés K_i et K_j n'empiètent pas l'un sur l'autre.

Définition. Une fonction $F(X)$ sera dite *absolument continue*, s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$, tel que pour tout ensemble des carrés $K_i (i=1, 2, \ldots, r)$ satisfaisant aux conditions 1) et 2) subsiste l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{r} |F(K_i)| < \varepsilon.$$

Remarque. Ici aussi la condition 1) peut être remplacée par la condition que K_i et K_j n'empiètent pas.

§ 1.

Théorème 1. *Un ensemble plan E, dont tout point p est situé sur un côté d'un carré $W(p)$ ne contenant à son intérieur aucun point de E, est de mesure nulle.*

Démonstration. Lorsque p est un point de l'ensemble E, la dérivée E' n'a aucun point commun avec l'intérieur du carré $W(p)$. Il en résulte que la densité de E' au point p appartenant à E et à E' ne peut être égale à 1, puisque, lorsque $K_n (n=1,2,\ldots)$ est une suite infinie de carrés ayant p pour centre, convergeant vers p, et dont les côtés sont parallèles aux côtés du carré $W(p)$, on a pour n suffisamment grand l'inégalité $|K_n E'| \leqslant \frac{3}{4} |K_n|$ (puisque, pour n suffisamment grand, au moins une quatrième partie du carré K_n est situé dans le carré $W(p)$). En vertu des théorèmes connus sur la densité il en résulte que $|EE'|=0$, d'où $|E|=0$, c. q. f. d.

Théorème 2. *Un ensemble plan E, dont tout point p est situé sur un côté ou à l'intérieur d'un carré $W(p)$, dont l'intérieur appartient à E, est mesurable* (L).

Démonstration. Soit E_1 l'ensemble de tous les points intérieurs de l'ensemble E; l'ensemble E_1 est donc mesurable. Posons $E_2 = E - E_1$. Si p appartient à E_2, alors

1) p est situé sur un côté du carré $W(p)$ (puisque si p était à l'intérieur du carré $W(p)$, p serait, d'après l'hypothèse du théorème, un point intérieur de E, donc un point de E_1)

2) à l'intérieur de $W(p)$ il n'y a pas de points de E_2 (en même raison que 1)).

L'ensemble E_2 est donc, en vertu du théorème 1, de mesure nulle, d'où il résulte que l'ensemble $E = E_1 + E_2$ est mesurable, c. q. f. d.

Remarque. Du théorème 2 résulte sans peine la proposition suivante:

Une fonction de deux variables $f(x, y)$, définie pour tout point du carré $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ et telle qu'on a toujours

$$f(x_1, y_1) \leqslant f(x_2, y_2) \quad \textit{pour} \quad x_1 \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y_2,$$

est une fonction mesurable (L) [1]).

[1]) Cette fonction peut être d'ailleurs non mesurable (B), comme l'a remarqué M. Sierpiński (On obtient une telle fonction p. e en désignant par N un ensemble donné quelconque non mesurable (B), situé dans l'intervalle $(0, 1)$, et en posant $f(x, y) = 0$ pour $x + y < 1$ et pour $x + y = 1$, $x \varepsilon N$, et $f(x, y) = 1$ pour tous les autres points (x, y)).

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que, pour tout nombre a réel donné, l'ensemble E de tous les points (x, y) satisfaisant à l'inégalité $f(x, y) \leqslant a$, vérifie les conditions du théorème 2.

Théorème 3. *Soit E un ensemble plan fermé et borné, et soit $\Delta_i (i = 1, 2, \ldots)$ une suite infinie de domaines fermés et bornés dont chacun contient à son intérieur l'ensemble E. Désignons par λ_i la distance maximum de points frontières de Δ_i à l'ensemble E, et soit $\lim\limits_{i \to \infty} \lambda_i = 0$. Il existe alors pour tout m naturel un nombre $N(m)$, tel qu'on a $\Delta_n \subset \Delta_m$ pour $n > N(m)$.*

Démonstration. Désignons par l_n la distance minimum de points frontières de Δ_n à l'ensemble E. D'après l'hypothèse, nous avons $l_n > 0$ (l'ensemble E étant à l'intérieur de Δ_n). Admettons qu'il existe un indice m auquel notre théorème ne s'applique pas. Il existerait donc une suite infinie croissante d'indices $n_k (k = 1, 2, \ldots)$, telle que aucun des domaines Δ_{n_k} ne serait tout entier à l'intérieur de Δ_m. Donc, tout ensemble $\Delta_{n_k} (k = 1, 2, \ldots)$ contiendrait un point p_{n_k} n'appartenant pas à Δ_m. En désignant par d_{n_k} la distance de p_{n_k} à l'ensemble E, on aurait les inégalités $\lambda_{n_k} \geqslant d_{n_k} \geqslant l_m > 0$ (puisque tout point, dont la distance à E est $< l_m$, est à l'intérieur de Δ_m), donc $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_{n_k} \geqslant l_m > 0$, contrairement à l'hypothèse que $\lim\limits_{i \to \infty} \lambda_i = 0$.

Théorème 4. *La dérivée supérieure de la fonction $F(X)$ est une fonction mesurable (L).*

Démonstration. Soit a un nombre réel donné quelconque et désignons par E l'ensemble de tous les points p pour lesquels $\overline{F'}(p) \geqslant a$. Choisissons pour tout point p de E une suite infinie de carrés $K_n(p)$ satisfaisant aux trois conditions suivantes:

1) $\quad |K_n(p)| \leqslant \dfrac{1}{n}, \quad$ pour $\quad p \in E, \ n = 1, 2, 3, \ldots,$

2) $\quad \dfrac{F(K_n(p))}{|K_n(p)|} \geqslant a - \dfrac{1}{n}, \quad$ pour $\quad p \in E, \ n = 1, 2, 3, \ldots$

3) $\quad p$ est un point de $K_n(p)$ (intérieur ou frontière).

(Il résulte de la définition de la dérivée supérieure qu'une telle suite $K_n(p)$ existe).

Posons $E_n = \sum\limits_{p \in E} K_n(p)$, la sommation s'étendant, pour n fixe, à tous les points p de E. Il est clair que $E \subset E_n$. Nous prouverons qu'en posant $P = E_1 E_2 E_3 \ldots$, nous aurons $P = E$.

En effet, d'après $E \subset E_n$, nous avons $E \subset P$. Or, si $p_0 \varepsilon P$, il existe une suite de points $p_n (n=1, 2, \ldots)$, tels que $p_n \varepsilon E$ et $p_0 \varepsilon K_n(p_n)$, ce qui donne, d'après 1) et 2), $\overline{F}'(p_0) \geqslant a$ et prouve que $p_0 \varepsilon E$. Donc $P \subset E$.

D'après le théorème 2, les ensembles $E_n (n=1, 2, \ldots)$ sont mesurables, ce qui entraîne la mesurabilité de l'ensemble $E = P = E_1 E_2 E_3 \ldots$ Ceci étant pour tout nombre a réel, nous concluons que la fonction $\overline{F}'(p)$ est mesurable, c. q. f. d.

Remarque. Du théorème démontré résulte sans peine la proposition suivante:

Si $f(x)$ est une fonction quelconque (mesurable ou non), *définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, la fonction*

$$\varphi(x) = \limsup_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k} \quad (h \geqslant 0,\ k \geqslant 0,\ h+k > 0)$$

est mesurable.

Pour la démonstration il suffit de considérer la fonction $F(\delta)$, définie pour tout intervalle $\delta = (x_1, x_2)$ par la formule: $F(\delta) = f(x_2) - f(x_1)$.

De cette remarque résulte sans difficulté la proposition [1]): $f(x)$ *étant une fonction quelconque, définie pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, la fonction*

$$\psi(x) = \limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (h \neq 0)$$

est mesurable [2]).

[1]) Cette proposition énonce, sans la démontrer, I. C. Burkill: *Fund. Math.* t. V, p. 321.

[2]) Il suffit évidemment de prouver que $\psi(x) = \varphi(x)$. Or, cela résulte tout de suite de la remarque que, pour $h > 0$, $k > 0$, le nombre $\frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k}$ est toujours compris (au sens large) entre les nombres $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ et $\frac{f(x) - f(x-h)}{k}$ (En effet, on a, pour $h > 0$, $k > 0$, l'identité

$$\frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k} = \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x) - f(x-k)}{k} \cdot \frac{k}{h}}{1 + \frac{k}{h}},$$

et, comme on sait, pour $t > 0$, le nombre $\frac{\alpha + \beta t}{1+t}$ est toujours compris (au sens large) entre α et β (quels que soient α et β réels).

Théorème 5. *Si $F(X)$ est une fonction à variation bornée, l'ensemble de points, où la dérivée supérieure est $+\infty$ ou $-\infty$, est de mesure nulle.*

Démonstration. Il suffira évidemment de démontrer notre théorème pour l'ensemble de points où la dérivée supérieure est $+\infty$: pour le cas où elle est $-\infty$ la démonstration serait tout à fait analogue.

D'après le théorème 4, l'ensemble E, où la dérivée supérieure de $F(X)$ est $+\infty$, est mesurable. Admettons que $|E|>0$ et recouvrons tout point p de E d'une suite infinie de carrés $K_n(p)$, de sorte que

1) $$\lim_{n\to\infty}|K_n(p)|=0, \quad \text{pour} \quad p\,\varepsilon\, E, \; n=1,2,\ldots,$$

2) $$\frac{F(K_n(p))}{|K_n(p)|}>a, \quad \text{pour} \quad p\,\varepsilon\, E, \; n=1,2,\ldots,$$

où a est un nombre réel donné.

η étant un nombre positif donné quelconque, on peut, d'après le théorème de M. Vitali [1]), extraire de l'ensemble de tous les $K_n(p)$ une suite finie de carrés — désignons les par $\overline{K}_1, \overline{K}_2, \ldots, \overline{K}_r$ — de sorte que les deux propriétés suivantes subsistent:

I) L'ensemble de points de E qui ne sont pas recouverts par les carrés $\overline{K}_i (i=1,2,\ldots,r)$ est de mesure $<\eta$.

II) Les carrés $\overline{K}_i (i=1,2,\ldots,r)$ sont sans points communs deux à deux.

De I) résulte l'inégalité

$$|\overline{K}_1|+|\overline{K}_2|+\ldots+|\overline{K}_r|\geqslant|E|-\eta,$$

et, d'après 2), nous avons

$$F(\overline{K}_i)>a\,.\,|\overline{K}_i|, \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,r,$$

d'où:

$$\sum_{i=1}^{r}F(\overline{K}_i)>a\sum_{i=1}^{r}|\overline{K}_i|\geqslant a(|E|-\eta),$$

ce qui est impossible, $F(X)$ étant une fonction à variation bornée et a et η étant des nombres positifs quelconques.

Nous avons donc $|E|=0$ et notre théorème est démontré.

[1]) V. p. e. *Fund. Math.* t. V, p. 130.

Définition. Une fonction $F(X)$ à variation bornée sera dite *normale*, si la condition $E_1 E_2 = 0$ entraîne l'inégalité $F(E_1+E_2) \leqslant F(E_1)+F(E_2)$ pour tout couple d'ensembles E_1 et E_2, pour lesquels les valeurs $F(E_1)$, $F(E_2)$ et $F(E_1+E_2)$ sont définies.

Théorème 6. *Toute fonction normale $F(X)$ est une différence de deux fonctions normales non positives.*

Démonstration. $F(X)$ étant une fonction d'ensemble, définie pour les ensembles X d'un corps $\mathcal{H}_0$, j'appelle, avec M. Fréchet, *variation de F sur l'ensemble $X \varepsilon \mathcal{H}_0$* la borne supérieure des sommes $|F(X_1)|+|F(X_2)|+\ldots+|F(X_n)|$, où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est une décomposition quelconque de X en un nombre fini d'ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{H}_0$. On voit sans peine que la variation $\omega(X)$ d'une fonction normale $F(X)$ est bien déterminée et finie, non négative pour tout ensemble X de $\mathcal{H}_0$, et que la fonction $-\omega(X)$ est normale [1]). Posons $F_1(X)=F(X)-\omega(X)$, $F_2(X)=-\omega(X)$; ce seront évidemment des fonctions normales, non positives et nous aurons $F(X)=F_1(X)-F_2(X)$, ce qui prouve notre théorème.

Théorème 7. *Une fonction normale $F(X)$ a presque partout une dérivée.*

Démonstration [2]). D'après le théorème 6, nous pouvons supposer que la fonction $F(X)$ est non positive (donc $\overline{F'} \leqslant 0$). Soit N l'ensemble de points p en lesquels la dérivée de $F(X)$ n'existe pas, et désignons par $N(u, v)$ l'ensemble de tous les points p pour lesquels subsistent les inégalités

$$(1) \qquad \overline{F'}(p) > v > u > \underline{F}'(p).$$

Nous avons évidemment $N = \sum_{u,v} N(u, v)$, la sommation s'étendant à tous les systèmes de nombres rationnels u, v, où $u < v < 0$.

Admettons que $|N| = m_e(N) > 0$: il existerait donc un système (u, v), tel que $|N(u, v)| = m_e(N(u, v)) > 0$. Soit p_0 un point de densité extérieure de l'ensemble $N(u, v)$, appartenant à $N(u, v)$, et soit ε un nombre positif donné quelconque D'après (1) nous avons, $\overline{F'}(p_0) > v$ et parsuite il existe un carré K, tel que

[1]) puisqu'on a toujours $\omega(X_1+X_2) \geqslant \omega(X_1)+\omega(X_2)$ pour $X_1 X_2 = 0$, $X_1 \varepsilon \mathcal{H}_0$, $X_2 \varepsilon \mathcal{H}_0$ (D'ailleurs il peut être $\omega(X_1+X_2) > \omega(X_1)+\omega(X_2)$: la fonction $\omega(X)$ n'est pas donc nécessairement normale).

[2]) Quelques simplifications de la démonstration de ce théorème sont dues à M. Saks.

(2) $$\frac{F(K)}{|K|} > v$$

et

(3) $$\frac{|K \cdot N(u, v)|}{|K|} > 1 - \varepsilon.$$

Or, d'après (1), à tout point p de $N(u, v)$ qui est intérieur à K correspond une suite infinie de carrés $K^n(p)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tels que

$$p \varepsilon K^n(p) \subset K, \lim_{n \to \infty} |K^n(p)| = 0 \quad \text{et} \quad \frac{F(K^n(p))}{|K^n(p)|} < u.$$

D'après le théorème de Vitali il existe donc un système fini de carrés disjoints, $K_1, K_2, \ldots, K_r$, tel que

(4) $$F(K_n) < |K_n| u \qquad (n = 1, 2, \ldots, r)$$

(5) $$\sum_{n=1}^{r} |K_n| > |K \cdot N(u, v)| - \varepsilon |K|$$

et

(6) $$\sum_{n=1}^{r} K_n \subset K.$$

De (5) et (3) il résulte que

(7) $$\sum_{n=1}^{r} |K_n| > |K|(1 - \varepsilon) - \varepsilon |K| = |K|(1 - 2\varepsilon).$$

La fonction $F(X)$ étant non positive, nous avons en particulier: $F(K - \sum_{n=1}^{r} K_n) \leqslant 0$. Donc, la fonction $F(X)$ étant normale, nous trouvons, d'après (4) et (2):

$$u \sum_{n=1}^{r} |K_n| > \sum_{n=1}^{r} F(K_n) \geqslant \sum_{n=1}^{r} F(K_n) + F\left(K - \sum_{n=1}^{r} K_n\right) \geqslant$$
$$\geqslant F(K) > v |K|,$$

ce qui donne, d'après (7), les nombres u et v étant négatifs:

$$u(1 - 2\varepsilon) > v;$$

ε étant un nombre positif quelconque, cela prouve que $u \geqslant v$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse que $u < v$.

Nous avons donc $|N|=0$ et le théorème est démontré.

Théorème 8. *Si $F(X)$ est une fonction à variation bornée ayant partout une dérivée finie, $F(X)$ est absolument continue par rapport à tout réseau.*

Démonstration. Admettons que la fonction $F(X)$ n'est pas absolument continue par rapport au réseau R. Il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$ tendant vers $+\infty$ et tels que de tout grillage G_{n_i} on peut extraire un ensemble fini D_i de carrés $K_i^t (t=1, 2, \ldots, r_i)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1) les carrés de l'ensemble D_i n'empiètent pas (c'est-à-dire n'ont pas deux à deux de points intérieurs communs)

2) en désignant par μ_i la somme des aires des carrés appartenants à D_i, nous avons $\lim\limits_{i\to\infty} \mu_i = 0$.

3) on a l'inégalité

$$\sum_{t=1}^{r_i} |F(K_i^t)| \geqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad i=1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Désignons maintenant par Δ_i l'ensemble de tous ces carrés K de D_i, pour lesquels

$$\frac{|F(K)|}{|K|} > \frac{\varepsilon}{2\mu_i}. \tag{2}$$

L'ensemble Δ_i n'est vide pour aucun i. Admettons, en effet, que l'ensemble Δ_i est vide: on aurait donc

$$\frac{|F(K_i^t)|}{|K_i^t|} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu_i} \quad \text{pour} \quad t=1, 2, \ldots, r_i,$$

ce qui donne

$$\sum_{t=1}^{r_i} |F(K_i^t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

contrairement à la condition 3).

Observons encore que la somme des valeurs absolues de $F(X)$ pour les carrés de Δ_i surpasse $\frac{1}{2}\varepsilon$ ce qui résulte de (1) et (2).

Désignons maintenant par B_1 l'ensemble de tous les nombres naturels k, tels que la somme de valeurs absolues de la fonction $F(X)$ sur les carrés $\sigma_i^k (i=1, 2, \ldots, r_k)$ appartenant à Δ_k et n'ayant de points intérieurs communs avec les carrés de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{k-1}$

surpasse le nombre $\eta_1 = \varepsilon/8$. Il est clair que l'ensemble B_1 est fini, puisque autrement la somme $\Sigma |F(\sigma_i^k)|$ étendue à tous les nombres $i = 1, 2, \ldots, r_k$ et à tous le nombres k de B_1 serait infinie, contrairement à l'hypothèse que $F(X)$ est une fonction à variation bornée (les carrés σ_i^k étant sans points intérieurs communs). Nous définirons maintenant un ensemble de carrés A_1 comme il suit: A_1 est formé de tous les carrés des Δ_k, où k est un nombre de B_1, qui ne sont intérieurs à aucun autre carré de Δ_k, où $k \varepsilon B_1$.

L'ensemble A_1 se compose, comme on voit sans peine, d'un nombre fini de carrés (fermés): il est donc fermé. Si N_1 est le plus grand nombre de B_1, désignons par Δ_i^1 l'ensemble de ces carrés appartenant à Δ_{N_1+i} qui sont recouverts par les carrés de A_1. De la définition de l'ensemble A_1 il résulte que la somme de valeurs absolues de la fonction $F(X)$ sur les carrés de Δ_i^1 surpasse $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{8} = \frac{3\varepsilon}{8}$. Δ_i^1 n'est donc pas vide. Nous définissons ensuite les ensembles B_2 et A_2, en prenant $\eta_2 = \frac{\varepsilon}{8^2}$. En procédant ainsi de suite, nous obtiendrons une suite infinie d'ensembles $A_i (i=1, 2, \ldots)$, telle que

1) A_i se compose d'un nombre fini de carrés n'empiétant pas les uns sur les autres,

2) on a $A_i \supset A_k$ pour $i < k$,

3) l'aire maximum de carrés de A_i tend vers 0 pour $i \to \infty$,

4) le quotient $|F(K)| : |K|$ pour les carrés K de A_i tend vers $+\infty$ avec i.

De 1) et 2) résulte l'existence d'un point p commun à tous les $A_i (i=1, 2, \ldots)$. De 3) et 4) nous concluons que $|F'(p)| = +\infty$, contrairement à l'hypothèse que la fonction $F(X)$ a partout une dérivée finie. Donc $F(X)$ est une fonction absolument continue par rapport au réseau R, c. q. f. d.

Remarque. Il suffit de supposer dans ce théorème que les dérivées supérieure et inférieure sont finies en tout point.

Théorème 9: *Si $F(X)$ est une fonction à variation bornée, absolument continue par rapport à un réseau R et ayant presque partout une dérivée, alors $F'(p)$ est intégrable superficiellement et on a pour tout domaine ω l'égalité*

$$\iint_{\omega} F'(p)\,dx\,dy = V[F, R, \omega].$$

Démonstration. Désignons par $\varphi_n(x, y)$ une fonction qui a une valeur constante $= F(K_i^n) : |K_i^n|$ à l'intérieur du tout carré K_i^n du grillage G_n qui est tout entier contenu dans ω. Pour tous les autres points du carré K_0 posons $\varphi_n(x, y) = 0$. Il est clair que la suite $\varphi_n(x, y)$ tend, pour $n \to \infty$, vers $F'(p)$ en presque tous les points p de ω. Remarquons que

(1) $$\iint_{\omega} |\varphi_n(x, y)|\, dx\, dy = \sum |F(K_i^n)|,$$

la somme à droite s'étendant à tous les carrés du grillage G_n contenus dans ω. La fonction $F(X)$ étant à variation bornée, il existe un nombre $M > 0$, tel que pour tout n naturel subsiste l'inégalité

(2) $$\Sigma |F(K_i^n)| < M.$$

Il en résulte, d'après (1), l'inégalité

$$\iint_{\omega} |\varphi_n(x, y)|\, dx\, dy < M, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Donc, la fonction $F'(p)$, comme limite des fonctions φ_n, est intégrable. Soient maintenant ε et η deux nombres positifs donnés quelconques. Il existe donc un nombre naturel N et un ensemble $E \subset \omega$ de mesure $> |\omega| - \eta$, tels que pour tout $n > N$ subsiste en tout point p de E l'inégalité $|F'(p) - \varphi_n| < \varepsilon$. D'où

$$\left| \iint_{E} (F'(p) - \varphi_n)\, dx\, dy \right| < \varepsilon |\omega|.$$

Désignons par E_1 le complémentaire de E par rapport à ω. Soient K_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ les carrés du grillage G_n qui sont contenus entièrement dans ω et tels que $K_i E_1 \neq 0$. Posons $m_i = |K_i E_1|$. Nous aurons donc

$$\iint_{E_1} \varphi_n\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{r} \frac{F(K_i)}{|K_i|} m_i = \sum_{i=1}^{r} F(K_i) \frac{m_i}{|K_i|}.$$

Décomposons cette somme en deux, Σ_1 et Σ_2, la somme Σ_1 s'étendant aux termes, pour lesquels $\dfrac{m_i}{|K_i|} \leqslant \varepsilon$, et la somme Σ_2 aux termes, pour lesquels $\dfrac{m_i}{|K_i|} > \varepsilon$. Il est clair qu'on a, d'après (2):

$$|\Sigma_1| \leqslant \varepsilon M.$$

Quant à Σ_2, nous avons

$$|\Sigma_2| \leqslant \Sigma |F(K_i)| = \Gamma_n.$$

La dernière somme s'étend aux carrés K_i pour lesquels $\frac{m_i}{|K_i|} > \varepsilon$. Or, remarquons que l'aire de la somme des carrés où $\frac{m_i}{|K_i|} > \varepsilon$ tend vers $|E_1|$ pour $n \to \infty$. Nous obtenons donc

$$\left|\iint_\omega \varphi_n - \iint_\omega F'(p)\right| \leqslant \left|\iint_E \varphi_n - \iint_E F'(p)\right| + \left|\iint_{E_1} \varphi_n\right| + \\ + \left|\iint_{E_1} F'(p)\right| \leqslant \varepsilon|\omega| + \varepsilon M + \Gamma_n + \iint_{E_1} |F'(p)|\,[1].$$

Donc, en choisissant η de sorte que pour tout n la somme des valeurs absolues de $F(X)$ sur les carrés de G_n dont la somme a une aire $< \eta$, soit $< \varepsilon$, et en prenant le nombre $N_1 \geqslant N$ tel que pour $n \geqslant N_1$ l'aire de la somme des carrés formant Γ_n soit $< \eta$, nous obtenons pour tout $n > N_1$ l'inégalité

$$\left|\iint_\omega \varphi_n - \iint_\omega F'(p)\right| < \varepsilon|\omega| + \varepsilon M + \varepsilon + \iint_{E_1} |F'(p)|$$

qui montre que

$$\lim_{n\to\infty} \iint_\omega \varphi_n = \iint_\omega F'(p).$$

Or, $\iint_\omega \varphi_n = \Sigma F(K_i^n)$, la sommation s'étendant aux carrés du grillage G_n contenus dans ω. Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \iint_\omega \varphi_n = V[F, R, \omega], \text{ c'est-à-dire } V[F, R, \omega] = \iint_\omega F'(p),$$

c. q. f. d.

Remarquons que dans la première partie de la démonstration du théorème précédent nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème 10. *Si la fonction $F(X)$ à variation bornée a presque partout une dérivée, cette dérivée est une fonction intégrable.*

Du théorème 9 résulte sans peine le

Théorème 11. *Si $F(X)$ est une fonction à variation bornée, absolument continue et ayant presque partout une dérivée, alors la*

[1] On supprime la différentielle $dx\,dy$ pour abréger l'écriture.

variation relative sur un domaine quelconque ω ne dépend pas du choix du réseau et est égale à l'intégrale de la dérivée sur ω.

Remarque I. On peut remplacer dans les théorèmes 9 et 11 la variation relative par la variation absolue, en remplacant en même temps l'intégrale de la dérivée par l'intégrale de la valeur absolue de la dérivée.

Théorème 12. *Si $F(X)$ est une fonction à variation bornée, ayant partout une dérivée finie et telle que l'inégalité*

$$|F(E_1+E_2+\ldots+E_r)|\leqslant|F(E_1)|+|F(E_2)|+\ldots+|F(E_r)|$$

subsiste pour tout système d'ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_r$, tel que $F(X)$ est définie pour les ensembles $E_i (i=1, 2, \ldots, r)$ et $E=E_1+E_2+\ldots+E_r$, alors

I) $F(X)$ est une fonction absolument continue,

II) L'intégrale de la dérivée sur tout domaine est égale à la variation de la fonction.

Démonstration. Nous prouverons d'abord que $F(X)$ est absolument continue. Considérons un carré quelconque K. Soit R un réseau tel que les côtés du carré K soient des lignes de division de tout grillage G_n. En désignant par $K_i (i=1, 2, \ldots, r)$ les carrés du grillage G_n contenus dans K, nous avons. d'après l'hypothèse, comme on voit sans peine:

$$|F(K)|\leqslant\sum_{i=1}|F(K_i)|.$$

En désignant la somme à droite par le symbole Γ_n, nous voyons qu'en vertu des théorèmes 8 et 9 et de la remarque 1, on a

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n=V(|F|, R, K)=\iint_K|F'(p)|.$$

D'où

$$(1)\qquad |F(K)|\leqslant\iint_K|F'(p)|$$

Si maintenant B est un ensemble quelconque de carrés K_i n'empiétant pas les uns sur les autres, nous avons d'après (1):

$$\sum_{i=1}^{r}|F(K_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{r}\iint_{K_i}|F'(p)|=\iint_B|F'(p)|,$$

ce qui prouve la continuité absolue de $F(X)$.

Quant à la seconde partie de notre théorème, elle est une conséquence immédiate du théorème 11.

Théorème 13. *Soit $F(X)$ une fonction absolument continue non négative et satisfaisant aux conditions suivantes, toutefois qu'elle est définie pour les ensembles $E_i (i=1, 2, \dots, n)$ et E:*

1) Si $E=E_1+E_2+\dots+E_n$, *on a* $F(E) \leqslant F(E_1)+F(E_2)+\dots+F(E_n)$,

2) Si $E_iE_k=0$ *pour* $i \neq k$ *et* $E \supset E_i$ *pour* $i=1, 2, \dots, n$, *on a*

$$F(E) \geqslant F(E_1)+F(E_2)+\dots+F(E_n).$$

Alors il existe presque partout la dérivée $F'(p)$, elle est intégrable et pour tout carré E subsiste la formule

$$F(E)=\iint_E F'(p).$$

D é m o n s t r a t i o n. Remarquons que $F(X)$ est une fonction à variation bornée. En effet, si K_0 désigne le carré contenant le corps dans lequel $F(X)$ est définie, et si $E_i (i=1, 2, \dots, n)$ sont des ensembles du corps contenus dans E et satisfaisant à la condition $E_iE_k=0$ pour $i \neq k$, nous avons, d'après 2) et d'après l'hypothèse que $F(E_i) \geqslant 0$, l'inégalité $|F(E_1)|+|F(E_2)|+\dots+|F(E_n)| \leqslant F(K_0)$, ce qui prouve que $F(X)$ est une fonction à variation bornée.

En vertu de la condition 1) et d'après le théorème 7 nous voyons donc que $F'(p)$ existe presque partout, donc, d'après le théorème 10, cette dérivée est intégrable. Or, du théorème 12 nous obtenons la formule

$$V(F, E)=\iint_E F'(p)$$

(où E est un carré quelconque pour lequel $F(X)$ est définie).

D'autre part, d'après l'hypothèse 1), pareillement comme dans le théorème 12, nous voyons que

$$\text{(I)} \qquad V(F, E) \geqslant F(E).$$

Nous prouverons maintenant la formule $V(F, E)=F(E)$ Prenons un réseau R de sorte que les côtés du carré E soient des lignes de division de R. D'après (I) il existe pour tout $\eta>0$ un n, tel qu'en désignant par $K_i^n (i=1, 2, \dots, r)$ les carrés du gillage G_n contenus dans E, on a l'inégalité

$$\text{(II)} \qquad V(F, E)-\eta \leqslant \sum_{i=1}^{r} F(K_i^n).$$

Le nombre positif μ étant donné quelconque, nous pouvons maintenant trouver un $p > n$, de sorte que l'aire de la somme A de tous les carrés du grillage G_p contenus dans E et contigus aux côtés d'un au moins de carrés K_i^n $(i = 1, 2, \ldots, r)$ soit $< \mu$. Choisissons μ de sorte que la somme S de valeurs de la fonction $F(X)$ étendue aux carrés formant A satisfasse à l'inégalité

$$S \leqslant \eta. \tag{III}$$

(On peut sans peine réaliser cette inégalité, en tenant compte de ce que $F(X)$ est une fonction absolument continue).

Remarquons maintenant que les carrés du grillage G_p qui n'appartiennent pas à A et sont contenus dans le carré K_i^n forment un carré que nous désignerons par t_i. Or, d'après l'hypothèse 1), la somme de valeurs de $F(X)$ étendue aux carrés t_i et aux carrés appartenant à A est $\geqslant F(K_1^n) + F(K_2^n) + \ldots + F(K_r^n)$. Par conséquent

$$S + \sum_{i=1}^{r} F(t_i) \geqslant \sum_{i=1}^{r} F(K_i^n),$$

d'où d'après (III):

$$\sum_{i=1}^{r} F(t_i) \geqslant \sum_{i=1}^{r} F(K_i^n) - \eta. \tag{IV}$$

Les carrés t_i étant sans points communs et $\subset E$, nous avons, d'après l'hypothèse 2):

$$\sum_{i=1}^{r} F(t_i) \leqslant F(E). \tag{V}$$

D'après (II), (IV) et (V), nous en trouvons

$$F(E) \geqslant V(F, E) - 2\eta.$$

Cette inégalité subsistant pour tout $\eta > 0$, nous avons donc

$$F(E) \geqslant V(F, E),$$

donc, d'après (I):

$$V(F, E) = F(E),$$

par conséquent

$$F(E) = \iint_E F'(p), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Supplément: Applications [1].

La masse, la chaleur, la charge éléctrique et beaucoup d'autres grandeurs employées en physique étant des fonctions additives il est aisé d'y appliquer les résultats précédents. On voit ainsi p. e. que l'existence d'une *densité* dans presque tous les points de l'univers est une conséquence purement mathématique de l'hypothèse que toute portion de l'espace enferme une masse bien définie et que cette masse possède les propriétés d'être additive et non-négative. Il est de même avec la température et avec la densité de la charge éléctrique. M. Fubini [2]) s'était posé la question s'il existe un corps pesant de densité nulle; il obtient un théorème analogue à celui de Rolle en supposant que la densité existe partout et en faisant certaines hypothèses restrictives sur la masse.

Ici nous allons tirer parti de théorèmes établis dans les §§ précédents pour montrer la dépendance mutuelle de quelques hypothèses dont se sert la mécanique statistique.

En mécanique statistique on représente le mouvement d'un système matériel à n degrès de liberté par le mouvement d'un seul point P dont les coordonnées $p_1, p_2 \dots p_n, q_1, q_2 \dots q_n$ remplissent les équations de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial q_i} \qquad (i=1, 2 \dots n),$$

$E(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n)$ étant l'énergie totale du système et les $q_1 \dots q_n$, $p_1 \dots p_n$ étant les coordonnées et vitesses généralisées du système. Quand le temps t change le point représentatif $P(t)$ décrit une courbe située sur la surface $E = \text{const.}$ On fait sur cette courbe les hypothèses suivantes [3]):

1. A toute portion ΔO_i d'aire $|\Delta O_i|$ de la hypersurface $E =$ constante il correspond une „fréquence relative" c'est-à-dire il existe la limite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \alpha(t) \, . \, dt = \Delta W_i$$

[1]) Ce supplément est écrit en collaboration avec M. Steinhaus.

[2]) Atti della Reale Accademia di Torino, 50, (1915), pp. 293—296.

[3]). Paul Hertz: Statistische Mechanik, VIIIième livre du „Repertorium der Physik" de R. H. Weber et R. Gans; (Teubner, Leipzig 1916), §§ 250—251, pp. 482—487.

ou la fonction $\alpha(t)$ est égale à 1 quand $P(t)$ est en ΔO et égale à O quand $P(t)$ est ailleurs.

2. La limite finie

$$\lim_{|\Delta O_i| \to o} \frac{\Delta W_i}{|\Delta O_i|} = w(\Pi) \tag{2}$$

nommée „la fréquence relative différentielle“, existe quand ΔO_i se retrécit autour d'un point quelconque déterminé Π de manière que l'aire $|\Delta O_i|$ tende vers zéro.

Pour fixer les idées supposons d'abord que $n=2$; $E=$ const. est alors une équation entre 4 variables. L'hypothèse 1 implique donc que à tout cube généralisé ΔO_i appartenant à une variété tridimensionale correspond un nombre non-négatif ΔW_i. La définition (1) montre que le nombre ΔW correspondant à la portion d'éspace composée de deux cubes ΔO_i, $\Delta \overline{O}_i$ sans points communs est égal à $\Delta W_i + \Delta \overline{W}_i$.

D'après notre théorème 7 il s'ensuit que la limite (2) existe pour presque tous les points Π intérieurs au domaine $E=$ const., si la suite $\{\Delta O_i\}$ est composée de cubes contenant le point Π à l'intérieur.

Examinons ce que devient la relation

$$\iiint_{\Delta O_i} w\, do = |\Delta O_i| \tag{3}$$

que l'on rencontre dans la mécanique statistique. Supposons toujours que l'intégrale soit étendue à un cube généralisé; si w est fini pour tous les points Π du cube la relation sera encore exacte d'après nos théorèmes 11 et 12, (3) est donc une conséquence mathématique des hypothèses 1 et 2.

Envisageons maintenant la portion $\Delta \Omega_i$ de ΔO_i qui reste quand on supprime les points de ΔO_i par lesquels passe le point mobile $P(t)$ („courbe de phase)“; nous écrirons $\Delta \Omega_i = \Delta O_i - H$ en désignant par H la trajectoire de $P(t)$. D'après cette définition ΔW_i correspondant à $\Delta \Omega_i$ sera égal à zéro. Quand $\Delta \Omega_i$ se retrécit d'une manière quelconque autour de Π on obtient donc

$$\lim \frac{\Delta W_i}{|\Delta \Omega_i|} = O \tag{4}$$

ce qui est vrai pour tous les points Π de $E=$ const. sauf les points supprimés. D'autre part (3) donne

$$\iiint\limits_{\Delta\Omega} w\,do = |\Delta\Omega| = |\Delta O|$$

car la mesure de H est nulle d'après M. Plancherel[1]); $|\Delta O|$ étant positif on voit que w est positif pour presque tous les Π de $\Delta\Omega$; (4) fournit donc

$$\lim \frac{\Delta W_i}{|\Delta\Omega_i|} \neq w(\Pi)$$

pour presque tous les Π. Il s'ensuit que les hypothèses 1 et 2 sont incompatibles quand on conserve dans l'énoncé de 2 les ensembles mesurables généraux ΔO_i comme des admissibles portions de l'hypersurface. Pour lever cette contradiction il suffit de restreindre la signification de ΔO_i dans cet énoncé et n'admettre que des cubes généralisés.

Il faut encore définir les cubes généralisés; ce sont les portions de l'hypersurface qui correspondent aux cubes ordinaires quand on représente les quatre coordonnées de l'hypersurface comme fonctions de trois paramètres; cette représentation est possible par des fonctions analytiques et on peût — ce qui importe ici — la choisir telle que le rapport de volumes du cube ordinaire de l'espace paramétrique et du cube généralisé qui lui correspond dans l'hypersurface soit toujours compris entre deux limites *positives finies*. Ces indications suffisent aussi dans les cas $n > 2$.

[1]) *Annalen* der Physik, 42, (1913), p. 1061. Il s'agit ici de la mesure de Lebesgue-Carathéodory.