Sur les fonctions approximativement discontinues.

Par

S. Kempisty (Wilno, Pologne).

Soit $f(x)$ une fonction donnée d'une variable réelle (mesurable ou non). Nous appellerons *la plus grande limite approximative à droite au point* x_0, et désignerons par $L^+(x_0)$, la borne inférieure de tous les nombres réels finis ou infinis a, tels que l'ensemble

$$\mathrm{E}[f(x) \leqslant a,\ x > x_0]$$

est de densité droite $= 1$ au point x_0 [1]). On définit d'une manière analogue la plus grande limite approximative à gauche, $L^-(x_0)$, et, les plus petites limites approximatives à droite et à gauche, $l^+(x)$ et $l^-(x_0)$, d'une fonction $f(x)$ au point x_0.

Théorème [2]): *Pour toute fonction $f(x)$ d'une variable réelle l'ensemble* $\mathrm{E}[L^+(x) < l^-(x)]$ *est au plus dénombrable.*

Démonstration [3]). Soit

$$(1) \qquad r_1, r_2, r_3, \ldots$$

une suite infinie, formée de tous les nombres rationnelles, et soit x_0 un point, tel que

$$(2) \qquad L^+(x_0) < l^-(x_0).$$

D'après (2) il existe des nombres rationnels situés entre $L^+(x)$ et

---

[1]) C'est-à-dire: $\lim\limits_{h=+0} \frac{1}{h} \operatorname{mes}_i \mathrm{E}[f(x) \leqslant a,\ x_0 < x < x_0 + h] = 1$, $\operatorname{mes}_i E$ désignant la mesure lebesguienne intérieure de l'ensemble E.

[2]) Ce théorème est analogue à un théoreme de M. W. H. Young sur les limites (ordinaires) d'une fonction en un point: *Proc. London Math. Soc.* Ser. 2, Vol. 8.

[3]) Cf une démonstration de M. Sierpiński de la dénombrabilité de l'ensemble $\mathrm{E}[f'_-(x) \neq f'_+(x)]$: *Fund. Math.* t. IV, p. 209.

$l^-(x)$: soit r_m le premier terme de la suite (1), tel que

$$(3) \qquad L^+(x_0) < r_m < l^-(x_0).$$

De (3) et de la définition du nombre $L^+(x_0)$ résulte sans peine qu'il existe des nombres rationnels $r_n > x_0$, tels que

$$(4) \quad \text{mes}_i\, \mathrm{E}[f(x) < r_m,\ x_0 < x < x_0 + h] > \tfrac{1}{2}h, \text{ pour } 0 < h < r_n - x_0:$$

soit r_n le premier terme de la suite (1) satisfaisant à ces conditions.

De même, de (3) et de la définition du nombre $l^-(x_0)$ résulte l'existence des nombres rationnels $r_p < x_0$, tels que

$$(4) \quad \text{mes}_i\, \mathrm{E}[f(x) > r_m,\ x_0 - h < x < x_0] > \tfrac{1}{2}h, \text{ pour } 0 < h < x_0 - r_p:$$

soit r_p le premier terme de la suite (1) satisfaisant à ces conditions.

A tout point x_0 de l'ensemble $E = \mathrm{E}[L^+(x) < l^-(x)]$ correspond ainsi un système bien déterminé de trois nombres naturels (m, n, p).

Je dis qu'aux points différents de E correspondent toujours des systèmes (m, n, p) différents.

Supposons, par contre, qu'aux points x_0 et $x_1 > x_0$ de E correspond le même système (m, n, p). Nous avons donc les inégalités (4) et (5) et les inégalités $r_p < x_1 < r_n$ et

$$(6) \quad \text{mes}_i\, \mathrm{E}[f(x) < r_m,\ x_1 < x < x_1 + h] > \tfrac{1}{2}h, \text{ pour } 0 < h < r_n - x_1,$$

$$(7) \quad \text{mes}_i\, \mathrm{E}[f(x) > r_m,\ x_1 - h < x < x_1] > \tfrac{1}{2}h, \text{ pour } 0 < h < x_1 - r_p.$$

D'après $x_0 < x_1 < r_n$, nous avons $0 < x_1 - x_0 < r_n - x_0$ et nous pouvons poser dans (4) $h = x_1 - x_0$, ce qui donne

$$(8) \qquad \text{mes}_i\, \mathrm{E}[f(x) < r_m,\ x_0 < x < x_1] > \frac{x_1 - x_0}{2}$$

Or, d'après $r_p < x_0 < x_1$, nous avons $0 < x_1 - x_0 < x_1 - r_p$ et nous pouvons poser dans (7) $h = x_1 - x_0$, ce qui donne

$$(9) \qquad \text{mes}_i\, [f(x) > r_m,\ x_0 < x < x_1] > \frac{x_1 - x_0}{2}.$$

Les formules (8) et (9) sont évidemment incompactibles. Il est ainsi démontré qu'aux points différents de E correspondent des systèmes différents (m, n, p). L'ensemble de tous les systèmes de trois nombres naturels étant denombrable, il en résulte que l'ensemble E est au plus dénombrable, c. q. f. d.

On démontre de même que l'ensemble $E[L^-(x) < l^+(x)]$ est au plus dénombrable.

Lorsque

$$L^+(x) = l^+(x).$$

nous avons à faire avec une seule limite approximative à droite. De même la valeur commune de $L^-(x)$ et $l^-(x)$ est la limite approximative à gauche. On a ainsi le suivant

Corollaire: *L'ensemble de points en lesquels les limites approximatives à droite et à gauche existent et sont différentes est au plus dénombrable.*

Or, l'ensemble de points en lesquels existe la limite approximative d'un seul côté peut avoir la puissance du continu.