Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes.

Par

M. M. Lavrentieff (Moscou).

On dit que deux ensembles sont *homéomorphes*, lorsqu'on peut établir entre leurs éléments une correspondance bicontinue, univoque et réciproque. Dans une Note récente[1]) j'ai démontré un théorème sur les ensembles homéomorphes[2]) dont quelques applications je voudrai donner ici. Je ne considérai d'ailleurs, dans ma note citée, que les ensembles linéaires; or, en modifiant un peu ma démonstration, M. Sierpiński[3]) l'a étendu aux ensembles de points situés dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions. Le rôle de ce théorème étant fondamental dans les considérations suivantes, nous rappellerons ici sa démonstration.

I. La recherche de l'homéomorphie étendue.

Théorème fondamental. *S'il existe une correspondance bicontinue, uniivoque et réciproque entre deux ensembles donnés (situés dans un espace à m dimensions), il est possible de déterminer une correspondance de même nature entre les points de deux ensembles G_δ[4]) enfermant les ensembles donnés, la seconde correspondance coïncidant avec la première pour les points des deux ensembles donnés.*

En effet, soient E et $\mathcal{E}$ les ensembles homéomorphes donnés, $q=f(p)$ — une fonction déterminant la correspondance biunivo-

[1]) *Comptes Rendus* t. 178, p. 187 (note du 7 janvier 1924).

[2]) C'est à M. N. Lusin que je dois le principe de ce théorème.

[3]) *Comptes Rendus* t. 178, p. 545 (note du 4 février 1924).

[4]) c'est-à-dire produits d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts.

que et bicontinue entre les point p de E et les points q de $\mathcal{E}$, $p=\varphi(q)$ — la fonction inverse de $f(p)$.

Appelons *oscillation* de la fonction $f(p)$ relativement à l'ensemble E au point p_0 de l'ensemble $\overline{E}=E+E'$ la limite pour $\eta=0$ des nombres $b(\eta)$, où $b(\eta)$ désigne la borne supérieure de distances de deux points $f(p_1)$ et $f(p_2)$ correspondant aux points p_1 et p_2 de E dont la distance au point p_0 est $<\eta$. L'oscillation de la fonction $\varphi(q)$ relativement à $\mathcal{E}$ au point q_0 de $\overline{\mathcal{E}}=\mathcal{E}+\mathcal{E}'$ sera définie d'une manière analogue.

Soit E^* l'ensemble de tous les points p de $\overline{E}$ en lesquels l'oscillation de $f(p)$ relativement à E est nulle, et soit $\mathcal{E}^*$ l'ensemble de tous les points q de $\overline{\mathcal{E}}$ en lesquels l'oscillation de $\varphi(q)$ relativement à $\mathcal{E}$ est nulle. On peut évidemment définir la fonction $f(p)$ en tout point p de E^* en posant $f(p)=\lim_{n=\infty} f(p_n)$, où $p_n\,(n=1,2,..)$ est une suite infinie de points de E qui converge vers p. La fonction $f(p)$ ainsi définie est évidemment continue en tout point de E^* par rapport à cet ensemble. D'une manière analogue on définit la fonction $\varphi(q)$ continue dans $\mathcal{E}^*$.

On voit sans peine que les ensembles E^* et $\mathcal{E}^*$ sont des G_δ: il suffit de s'appuyer sur la remarque que l'ensemble F_n de points de $\overline{E}$ en lesquels l'oscillation de $f(p)$ relativement à E est $\geqslant 1/n$ est fermé pour $n=1, 2, 3,\ldots$, et qu'on a $E^*=\overline{E}-(F_1+F_2+F_3+\ldots)$.

Désignons par E^{**} l'ensemble de tous les points p de E^*, tels que $f(p)\,\varepsilon\,\mathcal{E}^*$, et par $\mathcal{E}^{**}$ — l'ensemble de tous les points q de $\mathcal{E}^*$, tels que $\varphi(q)\,\varepsilon\,E^*$. L'ensemble $\mathcal{E}^*$ étant un G_δ, nous pouvons poser $\mathcal{E}^*=G_1G_2G_3\ldots$, où $G_n\,(n=1,2,\ldots)$ sont des ensembles ouverts. L'ensemble H_n de points p de E^*, tels que $f(p)\,\varepsilon\,G_n$ est évidemment ouvert dans E^*, c'est-à-dire nous avons $H_n=E^*\Gamma_n$, où Γ_n est un ensemble ouvert. Or, nous avons évidemment $E^{**}=H_1H_2H_3\ldots=$ $=E^*\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\ldots$: donc, E^* étant un G_δ, E^{**} est aussi un G_δ. De même on prouve que l'ensemble $\mathcal{E}^{**}$ est un G_δ.

La démonstration que les fonctions $q=f(p)$ et $p=\varphi(q)$ établissent une homéomorphie entre les ensembles E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$ n'offre pas de difficultés. Notre théorème est ainsi démontré [1]).

[1]) M. Sierpiński observe encore dans sa Note citée qu'on obtient ainsi la plus grande extension possible de l'homéomorphie entre deux ensembles donnés aux ensembles contenant ces ensembles et contenus respectivement dans leurs fermetures.

L'ensemble complémentaire d'un G_δ étant un F_σ, nous en déduisons le

Corollaire. *Si deux ensembles sont homéomorphes, les deux ensembles complémentaires le sont aussi, en négligeant peut-être deux ensembles F_σ.*

II. Applications aux ensembles mesurables (B).

Soit E un ensemble G_δ donné: nous avons donc $E = G_1 G_2 G_3 \ldots$, où $G_n (n=1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles ouverts. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble homéomorphe de E. Considérons conformément au théorème fondamental, les ensembles E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$. Posons $H_n = E^{**} . G_n$ (pour $n = 1, 2, \ldots$): ce seront des ensembles ouverts dans E^{**} [1]). Soit K_n l'ensemble homéomorphe de H_n (selon la correspondance entre les points des ensembles E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$): ce sera évidemment un ensemble ouvert dans $\mathcal{E}^{**}$, donc $K_n = \mathcal{E}^{**} . \Gamma_n$, où Γ_n est un ensemble ouvert. D'après $E \subset E^{**}$, nous avons $E = H_1 H_2 H_3 \ldots$, donc $\mathcal{E} = K_1 K_2 K_3 \ldots = \mathcal{E}^{**} \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \ldots$ Les ensembles Γ_n étant ouverts et l'ensemble $\mathcal{E}^{**}$ étant un G_δ, nous en concluons que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un G_δ. Nous avons ainsi démontré la proposition suivante (énoncée et prouvée pour la première fois en 1916 par M. Mazurkiewicz [2])):

Un ensemble homéomorphe d'un G_δ est toujours un G_δ.

Il en résulte tout de suite qu'un ensemble homéomorphe d'un $G_{\delta\sigma}$ est un $G_{\delta\sigma}$ (somme d'une infinité dénombrable d'ensembles G_δ). Or, soit E un ensemble $F_{\sigma\delta}$ donné (produit d'une infinité dénombrable d'ensembles F_σ), et soit $\mathcal{E}$ un ensèmble homéomorphe de E. Prenons, d'après le théorème fondamental, les ensembles E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$. L'ensemble E^{**} étant un G_δ et l'ensemble E étant un $F_{\sigma\delta}$, on voit sans peine que l'ensemble $E^{**} - E = E^{**} . CE$ est un $G_{\delta\sigma}$: son homéomorphe $H = \mathcal{E}^{**} - \mathcal{E}$ est donc aussi un $G_{\delta\sigma}$, et parsuite l'ensemble $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{**}\ CH$ est un $F_{\sigma\delta}$ (comme produit d'un G_δ par un $F_{\sigma\delta}$). Nous obtenons ainsi la proposition suivante, trouvée en 1920 par M. Mazurkiewicz [3]):

Un ensemble homéomorphe d'un $F_{\sigma\delta}$ est un $F_{\sigma\delta}$.

[1]) Un ensemble $Q \subset P$ est dit *ouvert dans P*, s'il ne contient aucun point d'accumulation de l'ensemble $P - Q$.

[2]) *Bull. Acad. Cracovie* 1916, p. 490—494.

[3]) *Fund. Math.* t. II, p. 104—111; aussi W. Sierpiński, ce volume, p. 24—28.

Nous dirons qu'une classe d'ensembles $\mathcal{H}$ est un *invariant topologique*, si tout ensemble homéomorphe d'un ensemble de la classe $\mathcal{H}$ et un ensemble de $\mathcal{H}$.

Théorème I. *Si la classe d'ensembles $\mathcal{H}$ est un invariant topologique, la classe de toutes les sommes d'infinités dénombrables d'ensembles de $\mathcal{H}$ est un invariant topologique.*

Théorème II. *Si la classe d'ensembles $\mathcal{H}$ est un invariant topologique et si tout produit d'un ensemble de $\mathcal{H}$ par un G_δ est un ensemble de $\mathcal{H}$, la classe de tous les produits d'infinités dénombrables d'ensembles de $\mathcal{H}$ est un invariant topologique.*

La démonstration du théorème I n'offre pas de difficulté. Soit maintenant $\mathcal{H}$ une classe d'ensembles, satisfaisant aux conditions du théorème II et soit $E=E_1E_2E_3\ldots$ un produit infini d'ensembles de $\mathcal{H}$, $\mathcal{E}$ — un ensemble homéomorphe de E. Prenons, d'après le théorème fondamental, les ensembles E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$. D'après la propriété de $\mathcal{H}$, les ensembles $E^{**}.E_n$ appartiennent à $\mathcal{H}$; leurs homéomorphes H_n appartiennent donc aussi à $\mathcal{H}$. Or, nous avons évidemment $\mathcal{E}=H_1H_2H_3\ldots$, ce qui prouve le théorème II.

Désignons, avec M. Hausdorff [1]), par P^1 les ensembles ouverts, par Q^1 les ensembles fermés, et définissons, pour $\alpha<\Omega$, par l'induction transfinie les ensembles P^α, resp. Q^α, comme sommes, resp. comme produits infinis (dénombrables) d'ensembles E_1, E_2, $E_3,\ldots$, où E_n est un Q^{ξ_n}, resp. un P^{ξ_n}, et où nous avons $\xi_n<\alpha$ (pour $n=1, 2, 3,\ldots$). On voit sans peine qu'un produit d'un ensemble $P^\alpha(\alpha\geqslant3)$, resp. $Q^\alpha(\alpha\geqslant3)$ par un G_δ est un P^α resp. Q^α. Les Q^3, comme coïncidant avec les $F_{\sigma\delta}$, ainsi que les P^3, comme coïncidant avec les $G_{\delta\sigma}$, étant des invariants topologiques, nous en concluons tous de suite, par l'induction transfinie, d'après les théorèmes I et II, que les $Q^\alpha(\alpha\geqslant3)$ ainsi que les $P^\alpha(\alpha\geqslant3)$ sont des invariants topologiques. Les ensembles P^2 (comme F_σ) ainsi que les ensembles Q^2 (comme G_δ) sont aussi des invariants topologiques. Donc:

Les classes P^α et Q^α de M. Hausdorff sont des invariants topologiques, pour $\alpha\geqslant2$.

Donc les classes $G_\delta, G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta},\ldots$ et $F_\sigma, F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}, F_{\sigma\delta\sigma\delta},\ldots$ sont des invariants topologiques [2]) (L'invariance topologique des ensem-

[1]) *Math. Zeitschrift* 5 (1919), p. 307.

[2]) L'invariance topologique des classes G_σ, $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta},\ldots$ a été démontré en 1920 par M. Sierpiński: *Comptes Rendus*, t. 171, p. 24.

bles ouverts est démontrée par M. Brouwer [1]); la démonstration de l'invariance topologique des ensembles fermés et *bornés* est immédiate).

On démontre sans peine que les ensembles F (resp. O) de classe α de M. Lebesgue sont des ensembles $Q^{\alpha+1}$ (resp. $P^{\alpha+1}$) qui ne sont des $Q^{\xi+1}$ (resp. $P^{\xi+1}$) pour aucun nombre ordinal $\xi<\alpha$. Donc

Un ensemble homéomorphe d'un ensemqle F (resp. O) de classe α de M. Lebesgue *est un ensemble F (resp. O) de même classe, pour tout nombre ordinal α, tel que* $1\leqslant\alpha<\Omega$.

Les ensembles qui sont à la fois F et O de classe $\leqslant\alpha$ sont appelés par M. de la Vallée Poussin *ambigus* de classe α. Donc

Un ensemble homéomorphe d'un ensemble ambigu de classe α est un ensemble ambigu de même classe (pour $1\leqslant\alpha<\Omega$).

Soit maintenant $\mathcal{K}$ une classe d'ensembles satisfaisant aux conditions du théorème II et soient E_1 et E_2 deux ensembles de $\mathcal{K}$. Posons $E=E_1-E_2$ et soit $\mathcal{E}$ un ensemble homéomorphe de E. Prenons, d'après le théorème fondamental, les ensembles E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$. A l'ensemble $E^{**}E_1$ correspond, dans $\mathcal{E}^{**}$, un ensemble homéomorphe H_1, et à l'ensemble $E^{**}.E_2$ — un ensemble homéomorphe H_2, et, d'après $E=E^{**}E_1-E^{**}E_2$, nous avons $\mathcal{E}=H_1-H_2$. Or, d'après la propriété de la classe $\mathcal{K}$, les ensembles $E^{**}E_1$, $E^{**}E_2$, H_1 et H_2 appartiennent à $\mathcal{K}$: donc l'ensemble $\mathcal{E}$ est une différence de deux ensembles de la classe $\mathcal{K}$. Nous avons ainsi démontré ce

Théorème III. *Si la classe d'ensembles $\mathcal{K}$ est un invariant topologique et si tout produit d'un ensemble de $\mathcal{K}$ par un G_δ est un ensemble de $\mathcal{K}$, la classe de toutes les différences de deux ensembles de $\mathcal{K}$ est un invariant topologique.*

On en déduit tout de suite que la classe de toutes les différences de deux ensembles Q^α (ou, ce qui revient au même, de deux ensembles P^α) est un invariant topologique, pour $2\leqslant\alpha<\Omega$. Donc, en particulier, un ensemble homéomorphe d'un $F_{\sigma\varrho}$ (c'est-à-dire d'une différence de deux F_σ) est un $F_{\sigma\varrho}$ [2]).

Observons encore que notre théorème fondamental peut être appliqué pour démontrer l'invariance topologique de classes d'ensembles plus étendues que la classe d'ensembles mesurables (B), p. e. de la classe des ensembles complémentaires aux ensembles (A) de M. Sou-

[1]) *Math. Ann.* t. 71 (1912).

[2]) Ce théorème est dû à M. Sierpiński: *Fund. Math.* t. III. p. 120.

slin. On sait, d'après la théorie générale des ensembles (A)[1]) que tout ensemble homéomorphe à un ensemble (A) est un ensemble (A)[2]). D'après le corollaire du théorème fondamental nous en déduisons la proposition suivante:

Tout ensemble homéomorphe d'un ensemble complémentaire d'un ensemble (A) est un ensemble complémentaire d'un ensemble (A)[3]).

III. Application à un problème de M. Sierpiński.

Dans le tome I de ce journal (p. 223) M. Sierpiński a posé le problème suivant:

Existe-il un ensemble linéaire non dénombrable E, tel que tout ensemble linéaire homéomorphe de E soit de mesure lebesguienne nulle? Peut-on démontrer l'existence d'un tel ensemble même en admettant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$?

Je donnerai ici une réponse affirmative à la seconde de ces questions, en démontrant le

Théorème. *Si $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe des ensembles linéaires non dénombrables, tels que tout ensemble linéaire homéomorphe de l'un de ces ensembles est de mesure lebesguienne nulle. La puissance de la classe de ces ensembles est $2^{\mathfrak{c}}$.*

Considérons tous les ensembles parfaits non denses situés sur le segment $(0, 1)$. On sait que la puissance de la classe de ces ensembles est $\mathfrak{c}$, donc, d'après l'hypothèse faite, les ensembles parfaits considérés peuvent être rangés dans une suite transfinie du type Ω, soit

$$(1) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots, P_\omega, P_{\omega+1}, \ldots, P_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega)$$

Or, soit

$$(2) \qquad p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_\omega, p_{\omega+1}, \ldots, p_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega)$$

une suite transfinie du type Ω, formée de tous les points de l'intervalle $(0, 1)$. Posons $q_1 = p_1$ et supposons que nous avons déjà défini tous les points q_ξ, où $\xi < \alpha$ (α étant un nombre ordinal donné $< \Omega$). Soit S_α la somme de tous les ensembles P_ξ pour $\xi < \alpha$: les ensembles P_ξ étant non denses et α étant un nombre ordinal

[1]) Notes de M. Souslin et N. Lusin, *Comptes Rendus* t. 164 (8 janvier 1917).

[2]) Plus généralement: tout ensemble qui est une image univoque et continue d'un ensemble (A), est un ensemble (A): voir p. e. W. Sierpiński, *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 165.

[3]) Cette proposition a été démontrée par M. Alexandroff, *Fund. Math.* t. V, p. 164.

$<\Omega$, S_α est un ensemble de première catégorie: son complémentaire dans $(0, 1)$ est donc non dénombrable et parsuite il contient des points distincts de chacun des points $q_\xi(\xi<\alpha)$: nous définirons q_α comme le premier point de la suite (2) contenu dans CS_α et $\neq p_\xi$ pour $\xi<\alpha$. Les points $q_\xi(\xi<\Omega)$ sont ainsi définis par l'induction transfinie. Désignons par E_0 l'ensemble de tous les points $q_\xi(\xi<\Omega)$: c'est donc un ensemble de puissance $\mathfrak{c}$.

Soit P un ensemble parfait non dense, contenu dans $(0, 1)$: c'est donc un terme de la suite (1), p. e. $P=P_\alpha$, où $\alpha<\Omega$. De la définition des points q_λ résulte que le point q_λ est contenu dans CS_λ: donc, pour $\lambda>\alpha$ le point q_λ n'appartient pas à P_α, puisque $P_\alpha \subset S_\lambda$ pour $\alpha<\lambda$. L'ensemble $P_\alpha E_0$ est donc au plus dénombrable. Donc *l'ensemble E_0 est de puissance du continu et tel que tout ensemble parfait non dense dans* $(0, 1)$ *contient au plus un ensemble dénombrable de points de E_0* [1]). Appelons *ensemble de Lusin* tout ensemble jouissant de ces propriétés. Il est évident que tout sous-ensemble de puissance du continu d'un ensemble de Lusin est un ensemble de Lusin. Il en résulte tout de suite que la classe de tous les ensembles de Lusin est de puissance $2^{\mathfrak{c}}$ (si $\mathfrak{c}=\aleph_1$).

Soit maintenant E un ensemble de Lusin. Nous allons démontrer que tout ensemble $\mathcal{E}$ homéomorphe de E est de mesure nulle. Construisons, d'après le théorème fondamental, deux ensembles homéomorphes E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$, où $E\subset E^{**}$ et $\mathcal{E}\subset\mathcal{E}^{**}$. L'ensemble $\mathcal{E}^{**}$ est mesurable (comme un G_δ): nous pouvons donc poser $\mathcal{E}^{**}=N+Q_1+$ $+Q_2+Q_3+\ldots$, où N est un ensemble de mesure nulle et $Q_n (n=1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles parfaits non denses. Je dis que tout ensemble Q_n contient au plus un ensemble dénombrable de points de $\mathcal{E}$. En effet, selon la correspondance entre les points des ensembles E^{**} et $\mathcal{E}^{**}$, à l'ensemble Q_n correspond un ensemble P_n. Tout ensemble homéomorphe d'un ensemble parfait non dense étant un ensemble parfait non dense, l'ensemble P_n est parfait et non dense, donc (E étant un ensemble de Lusin) l'ensemble EP_n est au plus dénombrable, de même que son homéomorphe $\mathcal{E}Q_n$. L'ensemble N étant de mesure nulle, on conclut de $\mathcal{E}=\mathcal{E}\mathcal{E}^{**}=\mathcal{E}N+\mathcal{E}Q_1+\mathcal{E}Q_2+\ldots$ que l'ensemble $\mathcal{E}$ est de mesure nulle, c. q. f. d. Notre théorème est ainsi démontré.

[1]) Cet ensemble a été (à l'aide de l'hypothèse $2^{\aleph_0}=\aleph_1$) en 1914 trouvé par M. Lusin: *Comptes Rendus* t. 158, p. 1258.

IV. Application aux ensembles parfaitement mesurables.

Dans le tome IV de ce journal (p. 368) M. Urysohn a posé le problème suivant:

Appellons l'ensemble (linéaire) E parfaitement mesurable, *si tout ensemble homéomorphe de E est mesurable au sens de M. Lebesgue. Quelle est la puissance de la classe des ensembles parfaitement mesurables? Un ensemble complémentaire à un ensemble parf. mesurable est-il toujours parf. mesurable?*

Le théorème fondamental me permet de résoudre ici par l'affirmative la seconde de ces questions; quant à la première, elle exige pour sa résolution l'hypothèse $\mathfrak{c} = \aleph_1$. Je fais de plus quelques remarques sur les opérations effectuées sur les ensembles parfaitement mesurables.

1. Sur la puissance de la classe des ensembles parfaitement mesurables. Chaque ensemble dont tout ensemble homéomorphe est de mesure nulle étant parfaitement mesurable, nous déduisons du théorème du § III le

Théorème. Si $\mathfrak{c} = \aleph_1$, *la puissance de la classe des ensembles parfaitement mesurables est* $2^{\mathfrak{c}}$

2. Théorèmes relatifs aux opérations sur les ensembles parfaitement mesurables.

Théorème I. *La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaitement mesurables est un ensemble parfaitement mesurable.*

La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables étant un ensemble mesurable, la démonstration est immédiate.

Lemme. *La partie commune d'un ensemble parfaitement mesurable et d'un ensemble G_δ est un ensemble parfaitement mesurable.*

En effet, soit E un ensemble parfaitement mesurable et soit E^* un ensemble G_δ. Supposons, par contre que l'ensemble $E_1 = E \,.\, E^*$ n'est pas parfaitement mesurable; donc il existe un ensemble $\mathcal{E}_1$ homéomorphe de E_1 qui n'est pas mesurable. Construisons, d'après le théorème fondamental, deux ensembles E_1^{**} et $\mathcal{E}_1^{**}$. Posons $E_1^* = E^* \,.\, E_1^{**}$; les ensembles E^* et E_1^{**} étant des ensembles G_δ, l'ensemble E_1^* est de même nature, donc à l'ensemble E_1^* correspond, d'après la correspondance entre les points des ensembles E_1^{**} et $\mathcal{E}_1^{**}$, un ensemble G_δ, soit $\mathcal{E}_1^*$. Nous avons $E_1^* \supset E_1$, donc $\mathcal{E}_1^* \supset \mathcal{E}_1$. L'ensemble $\mathcal{E}_1$ n'est pas mesurable, donc mes. $\mathcal{E}_1^* > 0$. D'après une propriété connue des ensembles mesurables, il existe une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses et bornés $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ contenus dans $\mathcal{E}_1^*$ et tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \text{mes } Q_n = \text{mes } \mathcal{E}_1^*$ [1]). L'ensemble $\mathcal{E}_1$ n'étant pas mesurable, parmi les ensembles Q_n il existe au moins un, soit Q_n, tel que l'ensemble $\mathcal{E}_1 . Q_n$ n'est pas mesurable. A l'ensemble Q_n correspond un ensemble parfait, non dense et borné, soit P_n; nous avons $P_n \subset E_1^*$.

Supprimons dans P_n toutes les portions qui ne contiennent que des points de E_1 dans P_n. Tous les points non supprimés dans P_n forment un ensemble fermé; désignons par P'_n le noyau parfait de cet ensemble. L'ensemble $P'_n . CE_1$ est dense sur P'_n. A l'ensemble parfait P'_n correspond un ensemble parfait, soit Q'_n. Je dis que l'ensemble $\mathcal{E}_1 . Q'_n$ n'est pas mesurable; en effet, à la réunion des portions supprimées de $E_1 . P_n$ correspond un ensemble mesurable, or l'ensemble complémentaire par rapport à Q_n n'est pas mesurable. Donc mes $Q'_n > 0$.

Soit D l'ensemble de tous les points de première espèce de l'ensemble P'_n. A l'ensemble dénombrable D contenu dans P'_n correspondra un ensemble dénombrable, soit $\mathfrak{D}$, contenu dans Q'_n. Nous avons mes $(Q'_n - \mathfrak{D}) = \text{mes } Q'_n$, donc il existe une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses sur Q'_n soit $Q''_1, Q''_2, \dots, Q''_k, \dots$, contenus dans $(Q'_n - \mathfrak{D})$ et tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \text{mes } Q''_k = \text{mes } Q'_n$. L'ensemble $\mathcal{E}_1 . Q'_n$ n'étant pas mesurable, parmi les ensembles Q''_k il existe au moins un, soit Q''_k, tel que l'ensemble $\mathcal{E}_1 . Q''_k$ n'est pas mesurable. A l'ensemble parfait non dense sur Q'_n correspond un ensemble parfait non dense sur P'_n, soit P''_k. D'après la construction de l'ensemble P''_n tout point de P''_k est un point de deuxième espèce pour l'ensemble P'_n.

Soient $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots$ les intervalles contigus à l'ensemble parfait P''_k et soit $\Pi_m = \delta'_m . P'_n \ (m = 1, 2, 3, \dots)$, où δ'_m est l'intervalle δ_m avec ses extrémités. L'ensemble CE_1 étant dense sur P'_n, l'ensemble CE est dense sur P'_n, donc, quel que soit m, il existe un ensemble parfait p_m contenu dans Π_m, ayant tous les points de première espèce sur CE et tel que les extrémités de cet ensemble

[1]) Si nous avons mes $\mathcal{E}_1^* = \infty$, les ensembles parfaits doivent être tels que la mesure de toute portion finie de $\mathcal{E}_1^*$ est égale à la somme des mesures des ensembles parfaits sur cette portion. Des raisonnements tout semblables démontrent alors la proposition.

coïncident avec les extrémités de l'intervalle δ_m. Désignons par P^* la réunion de l'ensemble P_k'' et des ensembles $p_m (m=1, 2, 3, \ldots)$. Nous avons $P_n' \supset P^* \supset P_k''$. Il est évident que l'ensemble P^* est parfait et que l'ensemble de tous les points de première espèce de P^* est contenu dans CE. A l'ensemble parfait P^* correspond un ensemble parfait, soit Q^*; nous avons $Q_n' \supset Q^* \supset Q_k''$. L'ensemble $\mathcal{E}_1 \cdot Q_k''$ n'étant pas mesurable, l'ensemble $\mathcal{E}_1$ Q^* n'est pas mesurable.

L'ensemble P^* étant situé sur l'axe des x, l'ensemble Q^* sur l'axe des y, soit $y=f(x)$ et $x=\varphi(y)$ la correspondance de l'homéomorphie entre ces ensembles. Soient

(1) $$(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_n, B_n), \ldots$$

et

(2) $$(a_1, b), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k), \ldots$$

les intervalles contigus respectivement aux ensembles P^* et Q^*. Soit λ_n un intervalle de longueur $\frac{1}{n}$ et de centre $y=f(B_n)$; soit (a_{k_n}, b_{k_n}) le premier intervalle de la suite (2) appartenant à λ_n, nous supposerons que $k_n > k_{n-1}$ pour $n>1$ et $k_1=1$.

Définissons sur l'axe de x une fonction $y=f^*(x)$ de la manière suivante: $f^*(x)=f(x)$ pour tous les points de P^*;

$$f^*(x)=\frac{b_{k_n}-a_{k_n}}{2(B_n-A_n)}(x-A_n)+a_{k_n}+\frac{b_{k_n}-a_{k_n}}{4}$$

pour tous les points d'intervalle (A_n, B_n), $n=1, 2, 3, \ldots$ et $f^*(x)=x$ pour tous les points d'intervalles infinis pour lesquels la fonction n'est pas encore définie.

Désignons par I l'ensemble complémentaire à l'ensemble des points de première espèce de l'ensemble P^*. Nous avons $I \supset E$. La fonction $f^*(x)$ est continue en tout point de I et elle ne prend pas la même valeur pour deux points différents quelconques. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des valeurs de $f^*(x)$ pour x contenu dans I et soit $x=\varphi^*(y)$ la fonction inverse de la fonction $y=f^*(x)$. La fonction $x=\varphi^*(y)$, étant définie sur $\mathcal{J}$, elle coïncide avec $\varphi(y)$ pour les points de Q^*. Je dis qu'elle est continue en tout point de $\mathcal{J}$. En effet, l'ensemble $\mathcal{J}$ étant formé par les intervalles

$$\left(a_{k_n}+\frac{b_{k_n}-a_{k_n}}{4},\ b_{k_n}-\frac{b_{k_n}-a_{k_n}}{4}\right)$$

et les points de Q^* correspondant aux points de deuxième espèce de P^*, la fonction $\varphi^*(y)$ est continue sur chacun des intervalles indiqués; soit y_0 un points de ϑ contenu dans Q^* et soit $x_0 = \varphi^*(y)$. Supposons que y_0 est un point de discontinuité de $\varphi^*(y)$, donc il existe un nombre h tel que quel que soit le nombre ε, dans l'intervalle $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ il existe des points y pour lesquels la valeur de $\varphi^*(y)$ n'appartient pas à l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$. En appliquant le principe de Bolzano-Weierstrass nous voyons qu'il existe un point $x_1 \neq x_0$ tel que quel que soit le nombre ε, il existe dans l'intervalle $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, des points y pour lesquels les valeurs de $\varphi^*(y)$ sont contenues dans l'intervalle $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$. Donc, quel que soit ε, il existe dans l'intervalle $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$ des points x pour lesquels les valeurs de $f^*(x)$ sont contenues dans l'intervalle $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Soit $y_1 = f^*(x_1)$, x_0 n'étant pas égal à x_1, nous avons $y_0 \neq y_1$; donc x_1 est un point de discontinuité de la fonction $y = f^*(x)$. D'après la définition de la fonction $f^*(x)$ les points de discontinuité de cette fonction sont des points de première espèce de P^*, soit donc $x_1 = A_n$; les valeurs de $f^*(x)$ sur l'intervalle (A_n, B_n) sont contenues dans l'intervalle $\left(a_{k_n} + \frac{b_{k_n} - a_{k_n}}{4}, \; b_{k_n} - \frac{b_{k_n} - a_{k_n}}{4}\right)$; d'autre part, d'après la construction même, $f^*(x)$ sur l'ensemble complémentaire à l'intervalle (A_n, B_n) est continue au point $a_n = x_1$. Donc, ε étant suffisamment petit, toutes les valeurs de $f^*(x)$ sur l'intervalle $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$ ne sont pas contenus dans l'intervalle $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Nous avons donc une contradiction, par suite la fonction $\varphi^*(y)$ est continue en tout point de ϑ.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des valeurs de $f^*(x)$ sur E. Les équations $y = f^*(x)$ et $x = \varphi^*(y)$ donnent la correspondance de homéomorphie entre les ensembles E de $\mathcal{E}$, d'autre part nous avons $\mathcal{E} . Q^* = \mathcal{E}_1 . Q^*$, donc, l'ensemble $\mathcal{E}_1 . Q^*$ n'étant pas mesurable, l'ensèmble $\mathcal{E}$ n'est par mesurable: il s'en suit que E n'est pas parfaitement mesurable. Nous arrivons donc à une contradiction en supposant que l'ensemble E_1 n'est pas parfaitement mesurable, ce qui prouve la proposition.

Le lemme précédent nous permet de démontrer le

Théorème II. *Un ensemble complémentaire à un ensemble parfaitement mesurable est un ensemble de même nature.*

En effet, soit E un ensemble parfaitement mesurable et soit CE l'ensemble complémentaire. Supposons que CE n'est pas parfaitement mesurable, il existe donc un ensemble $\mathcal{E}$ homéomorphe de CE, qui n'est pas mesurable. Construisons, d'après le théorème fondamental, deux ensembles $(CE)^{**}$ et $\mathcal{E}^{**}$, $(CE)^{**} \supset CE$ et $\mathcal{E}^{**} \supset \mathcal{E}$. D'après le lemme démontré, à l'ensemble $E.(CE)^{**}$ correspond un ensemble mesurable, soit $\mathcal{E}_1$. D'autre part il est clair que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un ensemble complémentaire à la réunion de $\mathcal{E}_1$ et de l'ensemble complémentaire à $\mathcal{E}^{**}$, donc, d'après les propriétés élémentaires des ensembles mesurables, l'ensemble $\mathcal{E}$ est mesurable: nous avons ainsi une contradiction, ce qui prouve la proposition.

Théorème III. *Le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaitement mesurables est un ensemble parfaitement mesurable.*

En effet, soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ des ensembles parfaitement mesurables et soit $E = E_1 . E_2 \ldots E_n \ldots$ Nous avons

$$E = C(CE_1 + CE_2 + \ldots + CE_n + \ldots),$$

donc, d'après les théorèmes I et II, l'ensemble E est parfaitement mesurable.

La question si l'opération (A) effectuée [1]) sur les ensembles parfaitement mesurables donne toujours un ensemble parfaitement mesurable, reste ouverte.

[1]) Sur la définition d'opération (A), *voir* un article de M. M. Lusin et Sierpiński: *Sur quelques propriétés des ensembles* (A), Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, série A, 1918, p. 48.