Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen.

Von

F. Hausdorff (Bonn).

Herr P. Alexandroff hat den interessanten Satz[1]) gefunden, dass die in vollständigen separablen Räumen liegenden Mengen G_δ topologisch nichts anderes als vollständige separable Räume selbst, d. h. mit ihnen homöomorph sind. Da der (loc. cit. nur skizzirte) Beweis nach der eigenen Angabe des Verfassers ziemlich schwierig zu sein scheint, so möchte ich hier einen kurzen und einfachen Beweis mittheilen, überdies ohne Einschränkung auf separable Räume. Der Satz lautet also:

Jede Menge G_δ in einem vollständigen Raum ist mit einem vollständigen Raum homöomorph.

Es sei E ein metrischer Raum, in dem also zwei Punkte x, y eine *Entfernung* xy haben, die den Forderungen genügt:

(α) $xy = yx > 0$ für $x \neq y$; $xx = 0$,

(β) $xy + yz \geqslant xz$ (Dreiecksungleichung).

Ist F irgend eine Menge in E, so sei[2])

$$(1) \qquad xF = \inf_{t \varepsilon F} xt, \quad xyF = \inf_{t \varepsilon F} (xt + yt),$$

xF also die (untere) Entfernung des Punktes x von der Menge F. Aus

$$xt + yt \geqslant xF + yF, \; xt + yt \leqslant 2 \,.\, xt + xy$$

folgt unmittelbar,

$$(2) \qquad xyF \geqslant xF + yF,$$

$$(3) \qquad xyF \leqslant 2 \,.\, xF + xy.$$

[1]) P. Alexandroff, *Sur les ensembles de la première classe et les ensembles abstraits*, Comptes Rendus 178 (1924), p. 185—187.

[2]) inf = Infimum = untere Grenze, sup = Supremum = obere Grenze.

Wenn F abgeschlossen ist und x, y nicht zu F gehören, ist $xF > 0$ und nach (2) $xyF > 0$. In diesem Falle sei

$$(4) \qquad \varphi(x, y) = \frac{xy}{xy + xyF} = \sup_{t \varepsilon F} \frac{xy}{xy + xt + yt}.$$

Diese Funktion hat Entfernungscharakter; sie erfüllt (α) und die Dreiecksungleichung

$$(5) \qquad \varphi(x, y) + \varphi(y, z) \geqslant \varphi(x, z).$$

Denn wegen $yt \leqslant yz + zt$, $yt \leqslant xy + xt$ ist für $t \varepsilon F$ (also $x, y, z \neq t$)

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) \geqslant \frac{xy}{xy + xt + yt} + \frac{yz}{yz + yt + zt} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{xy + yz}{xy + yz + xt + zt} \geqslant \frac{xz}{xz + xt + zt}.$$

Nunmehr sei A in E ein G_δ, $B = E - A$ ein F_σ,

$$B = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots, \quad F_n \quad \text{abgeschlossen.}$$

Wir wählen eine convergente Reihe Σc_n positiver Zahlen und definiren für $x \varepsilon A$, $y \varepsilon A$

$$(6) \qquad \overline{xy} = \sum c_n \frac{xy}{xy + xyF_n} = \sum c_n \varphi_n(x, y)$$

was also nach (5) den Charakter einer Entfernung hat; indem man die ursprünglichen Entfernungen durch diese ersetzt, geht aus A ein metrischer Raum $\overline{A}$ hervor. Diese beiden Räume sind homöomorph, d. h. (bei festem x): aus $xy \to 0$ folgt $\overline{xy} \to 0$ und umgekehrt. Denn nach (2) ist

$$\overline{xy} \leqslant \sum c_n \frac{xy}{xy + xF_n};$$

für $xy \to 0$ convergirt ($xF_n > 0$) jedes Glied der Reihe nach 0, also wegen der gleichmässigen Convergenz auch $\overline{xy} \to 0$. Nach (3) ist umgekehrt

$$(7) \qquad \overline{xy} \geqslant \frac{c_1}{2} \frac{xy}{xy + xF_1}$$

und mit $\overline{xy} \to 0$ zugleich $xy \to 0$.

Endlich sei

$$(8) \qquad \widetilde{xy} = \max [xy, \overline{xy}];$$

das ist wieder eine Entfernung und erzeugt einen dritten, mit A und $\bar{A}$ homöomorphen Raum $\widehat{A}$. Wir zeigen, dass *mit* E *zugleich auch* $\widehat{A}$ *vollständig ist*, was den Beweis unseres Satzes vollendet. Sei x_n eine Fundamentalfolge (Cauchysche Folge) in $\widehat{A}$; wegen $\widehat{xy} \geqq xy$ ist sie auch eine in A (ebenso in $\bar{A}$), hat also einen Limes in E. *Dieser kann nicht zu* B *gehören.* Denn für $x_n t \to 0$, $t \varepsilon B$ und etwa $t \varepsilon F_1$ hat man nach (7) für $m < n$

$$\overline{x_m x_n} \geqq \frac{c_1}{2} \frac{x_m x_n}{x_m x_n + x_n F_1},$$

also für $n \to \infty$ $(x_m x_n \to x_m t > 0,\ x_n F_1 \to 0)$

$$\liminf_n \overline{x_m x_n} \geqq \frac{c_1}{2},$$

und dann ist x_n in $\bar{A}$, also erst recht in $\widehat{A}$ keine Fundamentalfolge (in der ja die linke Seite der letzten Formel, sogar mit lim sup, für $m \to \infty$ nach 0 convergiren müsste). Also giebt es einen Punkt $x \varepsilon A$ mit $x_n x \to 0$, $\widehat{x_n x} \to 0$, jede Fundamentalfolge in $\widehat{A}$ ist convergent.