Sur les coupures irréductibles du plan.

Par

Casimir Kuratowski (Varsovie).

Un ensemble fermé E est dit une *coupure du plan*, s'il existe deux points (en dehors de E) qui ne peuvent être unis par aucun continu disjoint de E. Si, de plus, aucun (vrai) sous-ensemble fermé de E n'est une coupure, E sera dit une *coupure irréductible*.

La circonférence d'un cercle présente un simple exemple d'une coupure irréductible; deux circonférences tangentes forment une coupure réductible.

Dans le N. 2 je donne un théorème d'existence: *toute coupure qui coupe le plan en un nombre fini de régions contient une coupure irréductible*. Le même théorème serait en défaut si l'on omettait la condition que le nombre des régions soit fini; dans l'ouvrage de M. Knaster[1]) on trouvera un exemple d'une coupure qui coupe le plan en une infinité de régions et qui ne contient aucune coupure irréductible.

D'autre part, si l'on suppose que la coupure est un *continu de Jordan* (c. à. d. image continue d'un intervalle), elle contient toujours une coupure irréductible (quel que soit le nombre des régions) qui est, de plus. une courbe simple fermée. Les questions qui s'y rattachent sont traitées au N. 5.

A la notion de coupure irréductible on est amené aussi en considérant la frontière des régions en lesquelles une coupure décompose le plan. Si toutes ces régions ont une frontière commune, cette frontière est une coupure irréductible et seulement dans ce cas (v. N. 1).

Ainsi l'étude des coupures irréductibles coïncide avec l'étude des courbes qui sont *frontières communes des régions* déterminées par

[1]) A paraître dans ce volume.

elles sur le plan. Dans le cas le plus simple, où le nombre des régions est 2, cette notion était étudiée par M. Schönflies sous le nom de „geschlossene Kurve“. Mais M. Schönflies supposait qu'une coupure irréductible décompose le plan toujours en deux régions [1]; cependant, comme l'a prouvé M. Brouwer [2], il existe des coupures irréductibles, de nature bien plus compliquée, qui décomposent le plan en un nombre arbitraire de régions, fini ou dénombrable. Tous les exemples dont M. Brouwer s'est servi sont des continus indécomposables [3]) et c'est de là que provient le fait que leur structure ne pouvait être simple au point de vue géométrique.

Or, il est naturel de se demander: l'intervention des continus indécomposables dans la construction des coupures irréductibles qui coupent le plan en plus de deux régions est-elle essentielle? La réponse affirmative est fournie par le théorème (th. VI) suivant: *il n'y a que deux genres de coupures irréductibles qui coupent le plan en plus de deux régions; ces coupures sont ou bien des continus indécomposables ou bien des sommes de deux continus indécomposables.* Il existe des coupures de chacun de ces genres: M. Brouwer, comme nous l'avons déjà dit, a prouvé l'existence des coupures du premier genre, M. Knaster en a donné (dans l'ouvrage cité) un exemple du deuxième genre [4]).

[1]) *Die Entwickelung der Lehre von Punktmannigfaltigkeiten* II, Leipzig 1908, p. 124 (XIV).

[2]) Math. Ann. 68, 1910 et Proceed. Akad. Sc. v. XIV Amsterdam 1911. Cf. Denjoy *Continu et discontinu* Comptes Rendus t. 151 Paris 1910, où l'auteur signale aussi des exemples du même genre.

[3]) Un continu est dit indécomposable s'il n'est pas somme de deux continus différents de lui. Les premiers exemples des continus indécomposables étaient ceux de M. Brouwer. En les modifiant, Janiszewski est arrivé à un exemple plus simple (v. Journ. de l'Ec. Polytéchn. 1912, Thèse, chap. II); cet exemple fut transformé encore par M. Knaster en un qui est, on peut supposer, de la forme définitivement la plus simple (v. Fund. Math. III p. 210). A la considération des continus indécomposables on est conduit par des différentes notions de l'Analysis situs; outre la notion de coupure irréductible, citons celles de continu irréductible entre deux points, de continu de condensation, de continu saturé. Cf. Janiszewski et Kuratowski *Sur les continus indécomposables* Fund. Math. I. L'existence des continus indécomposables était connue aussi par les mathématiciens japonais. Cf. Yoneyama, Tohoku Math. Journ. 1917 p. 60.

[4]) M. Denjoy (l. c.) fait la remarque suivante sur les frontières communes de trois régions: „deux points quelconques pris sur l'une d'elles définissent, non

Dans le N. 6 j'étudie les *familles* composées de coupures disjointes. Je prouve qu'une telle famille, si elle est indénombrable, elle ne contient que tout au plus une infinité dénombrable de coupures réductibles, tandis que tout le reste (indénombrable) se compose des coupures irréductibles.

Les théorèmes des NN. 1, 2 et 6 peuvent être étendus à l'espace à n dimensions; ceux des NN. 3—5 ne subsistent que pour le plan.

Définitions et notations. $C(E)$ désigne le ***complémentaire*** de E, c. à. d. l'ensemble des points p qui n'appartiennent pas à E; en symboles p non εE. $\overline{E}$ est l'ensemble de points de E et de leurs points limites. E est dit ***ouvert*** si $C(E)$ est fermé, c. à. d. si $C(E)=\overline{C(E)}$. Un ensemble E est dit ***connexe***, s'il n'admet pas de décomposition $E=M+N$, $\overline{M}N+\overline{N}M=0$, $M\neq 0\neq N$. Un ensemble connexe fermé est un ***continu***. Un ensemble connexe ouvert est une ***région***. E étant ouvert, $F(E)=\overline{E}-E$ désigne la ***frontière*** de E. Un sous-ensemble de E qui n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de E est dit ***composante*** de E.

Un ensemble E est une ***coupure entre a et b***, si E est fermé, $a\varepsilon C(E)$, $b\varepsilon C(E)$ et tout continu K qui contient a et b satisfait à l'inégalité $K\cdot E\neq 0$. Si, de plus, aucun vrai sous-ensemble de E n'est une coupure entre a et b, E est dit coupure ***irréductible*** entre a et b. Si l'ensemble E est une coupure irréductible pour tout couple de points entre lesquels il coupe le plan, E est dit une coupure ***irréductible complète*** (ou tout court: coupure irréductible).

1. Nous aurons constamment récours dans ce N aux propriétés suivantes du plan [1]):

R étant une composante d'un ensemble ouvert E, on a

(α) R est une région, $\overline{R}$ un continu, tous deux points de R se laissent unir d'un continu dans R;

(β) $F(R)\subset F(E)$;

(γ) si $C(E)$ est un continu, $F(R)$ l'est également;

(δ) si $a\varepsilon E$ et $b\varepsilon C(\overline{E})$, $F(E)$ est une coupure entre a et b.

---

pas deux arcs différents, mais deux arcs dont l'un au moins coïncide avec toute la courbe". On pourrait conclure de là qu'une coupure irréductible qui coupe le plan en plus de deux régions est nécessairement indécomposable. Qu'il n'en est pas ainsi prouve M. Knaster à l'aide de l'exemple mentionné dans le texte.

[1]) Pour la démonstration de ces propriétés voir p. ex. Hausdorff *Grundzüge der Mengenlehre* Leipzig 1914. Pour l'extension de la propriété (γ), due à M. Brouwer, aux ensembles non-bornés voir Mazurkiewicz, Fund. Math. III, p. 20 et Knaster et Kuratowski, Fund. Math. V, p. 31 ss.

Rappelons quelques résultats sur les coupures entre deux points obtenus par M. Mazurkiewicz:

Théoreme I. *Si E est une coupure entre a et b, E contient une coupure irréductible entre ces points.*

M. Mazurkiewicz indiqua deux démonstrations de ce théorème. La première s'appuie sur le fait que la propriété d'être une coupure entre deux points fixes est inductive[1]; c. à. d., si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots E_n \supset \ldots$ est une suite descendante de coupures entre a et b, le produit $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ en est encore une. D'après un théorème général de M. Brouwer[2]) sur les propriétés inductives, il en résulte l'existence d'une coupure irréductible entre a et b qui est contenue dans E_1.

L'autre mode de raisonnement[3]) repose sur ce

Lemme. R étant une région et S une région composante de $C(\overline{R})$, la frontière $F(S)$ est une coupure irréductible entre tout couple tel que $a \varepsilon R$, $b \varepsilon S$.

(En effet

$$F(S) \subset F(R), \tag{1}$$

car selon (β): $F(S) \subset F(C(\overline{R})) = \overline{R} \,.\, \overline{C(\overline{R})} \subset \overline{R} \,.\, \overline{C(R)} = \overline{R} \,.\, C(R) = F(R)$. Or, si A est un vrai sous-ensemble fermé de $F(S)$, il existe un point $p \,\varepsilon\, [F(S) - A]$, dans le voisinage duquel il n'y a aucun point de A; mais dans ce voisinage il y a des points de S et de R, car, selon (1): $p \,\varepsilon\, F(R)$. On peut donc unir a et b sans traverser A).

Pour déduire le th. I de ce lemme désignons par E une coupure entre a et b, par R la région-composante de $C(E)$ qui contient a et par S celle de $C(\overline{R})$ qui contient b. D'après le lemme, $F(S)$ une coupure irréductible entre a et b et d'après (β) et (1) on a

$$F(S) \subset F(R) \subset F(C(E)) \subset E.$$

De plus, selon (γ) et (α), $F(S)$ est un continu. On a donc le

Théorème II. *Une coupure irréductible entre deux points est un continu. Il en est de même de coupure irréductible complète.*

La même lemme nous aidera à prouver le

Théorème III. *Pour qu'un ensemble fermé E soit une coupure*

[1]) Fund. Math. I, p. 68.

[2]) Proceed. Akad. Sc. Amsterdam 1911.

[3]) Mazurkiewicz. Fund. Math. V, p. 193.

irréductible entre a_1 et a_2 il faut et il suffit que a_1 et a_2 appartiennent à deux régions différentes R_1 et R_2 de $C(E)$ et que l'on ait

$$F(R_1) = E = F(R_2). \tag{2}$$

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, si $F(R_1) \neq E$, l'ensemble $F(R_1)$ est selon (β) un vrai sous-ensemble fermé de E qui coupe le plan, conformément à (δ), entre a_1 et a_2.

La condition est suffisante. Car supposons l'égalité (2) vérifiée et soit S la région-composante de $C(\overline{R_1})$ contenant a_2. Par suite $a_2 \varepsilon SR_2$. Je dis que $S = R_2$.

En effet, en vertu de (1): $F(S) \subset F(R_1) = F(R_2)$, donc tout point de R_2 peut être uni à a_2 par un continu disjoint de $F(S)$, ce qui entraîne $R_2 \subset S$. D'autre part, S étant région-composante de $C(\overline{R_1})$, on a $S . \overline{R_1} = 0$, d'où $S . F(R_1) = 0$, donc $S . F(R_2) = 0$, ce qui prouve que tout point de S peut être uni à a_2 par un continu disjoint de $F(R_2)$, d'où $S \subset R_2$.

L'égalité $S = R_2$ entraîne $F(S) = F(R_2) = E$. Donc, selon le lemme, E est une coupure irréductible entre a_1 et a_2.

Corollaire. *Pour qu'une coupure soit une coupure irréductible complète il faut et il suffit qu'elle soit la frontière commune de toutes les régions en lesquelles elle décompose le plan.*

2. Comme nous avons vu dans le N précédent, il subsiste un théorème d'existence concernant les coupures irréductibles entre deux points. Si l'on passe aux coupures irréductibles complètes, il faut faire des restrictions (voir introduction). Pour mettre en évidence la différence entre „coupure irréductible entre deux points" et „coupure irréductible complète" considérons le continu A composé de deux ensembles de points:

1°: de la circonférence $\varrho = 1$

2°: des points $y = \sin \dfrac{1}{\varrho - 1}$, $\varrho > 1$, qui forment deux lignes dont l'une approche la demi-circonférence située à droite de l'axe Y et l'autre celle qui en est située à gauche.

Le continu A est une coupure irréductible entre les points $y=2$ et $y = -2$ de l'axe Y, mais n'est pas une coupure irréductible complète, puisqu'elle contient une circonférence. (Le continu non-borné A peut être aisément transformé en un continu borné jouissant des mêmes propriétés).

Lemme. Soient A une coupure entre a_1 et a_2 et B un sous-ensemble fermé de A qui n'est pas une coupure entre a_1 et a_2. Si A ne contient aucun point intérieur et si A coupe le plan en n régions, B le coupe en $n-1$ au plus.

Démonstration. Soit $R_1, R_2, \dots R_n$ la suite des régions-composantes de $C(A)$, $a_1 \varepsilon R_1$, $a_2 \varepsilon R_2$. Soit $S_1, S_2, \dots S_m$ la suite des régions-composantes de $C(B)$. Il s'agit de prouver que $m < n$.

Or, l'ensemble A ne contenant aucune portion du plan, on a $S_i \,.\, C(A) \neq 0$ $(i = 1, 2, \dots m)$. Soit $S_i \,.\, R_k \neq 0$. Je dis que $R_k \subset S_i$. En effet, selon (β): $F(S_i) \subset F(C(B)) \subset B \subset A$, donc $F(S_i) \,.\, R_k = 0$, ce qui prouve que tout sous-continu de R_k est disjoint de $F(S_i)$; donc l'inégalité $S_i \,.\, R_k \neq 0$ entraîne $R_k \subset S$

Ainsi, chaque région $S_i (i = 1, 2, \dots m)$ contient une au moins des régions $R_1, R_2 \dots R_n$. De plus R_1 et R_2 sont, par hypothèse, situées dans la même région-composante de $C(B)$. Donc $m \leqslant n-1$.

Théorème IV. *Si une coupure coupe le plan en un nombre fini de régions, elle contient une coupure irréductible (complète).*

Démonstration. Supposons que l'ensemble fermé A coupe le plan en n régions. Soit $p_1, p_2, \dots p_n$ une suite de points extraits de ces régions.

D'après le th. I, A contient une coupure B irréductible entre a_1 et a_2. Si B n'est pas encore une coupure irréductible complète, elle contient une coupure $A_1 \neq B$. Mais B étant une coupure irréductible entre a_1 et a_2, A_1 n'est plus une coupure entre ces points. D'après le lemme, A_1 coupe le plan en $n-1$ régions au plus.

En opérant sur A_1, comme nous l'avons fait avec A, on arrive à l'aide d'un nombre fini d'opérations à une coupure irréductible entre deux points qui coupe le plan en, précisément, deux régions. D'après le lemme, c'est une coupure irréductible complète.

3. Dans l'analyse de la structure des coupures irréductibles la notion de *continu irréductible entre deux points*, introduite par M. Zoretti, est fort utile. On donne ce nom à tout continu qui contient deux points fixes mais dont aucun vrai sous-continu ne l'est contient simultanément. Nous nous servirons aussi d'une notion, due à Janiszewski: nous dirons qu'un sous-continu K de C est son *continu de condensation*, s'il contient deux points au moins et si $\overline{C - K} = C$.

Les théorèmes suivants sont surtout importants pour nos recherches:

(i) si B est un sous-ensemble fermé d'un ensemble fermé A, on a

$$\overline{A-\overline{A-\overline{A-B}}}=\overline{A-B}\ ^{1)}$$

(ii) A_1 et A_2 étant deux ensembles fermés et bornés dont aucun n'est une coupure entre p et q et $A_1 . A_2$ étant un continu, A_1+A_2 ne coupe nonplus le plan entre ces points [2]);

(iii) si A_1 et A_2 sont deux continus bornés et $A_1 . A_2$ n'est pas continu, A_1+A_2 est une coupure du plan.

Lemme 1. *K étant un sous-continu d'une coupure bornée A irréductible entre p et q, l'ensemble $A-K$ est connexe.*

Démonstration. On peut évidemment poser

$$(1) \qquad 0 \neq K \neq A.$$

Dans un ouvrage de M. Knaster et de moi [3]) ce théorème est établi: si K est un sous-continu d'un continu A tel que $A-K$ n'est pas connexe, alors A se décompose en deux continus A_1 et A_2 tels que

$$(2) \qquad A=A_1+A_2,\quad A_1 . A_2=K,$$

$$(3) \qquad A_1 \neq A \neq A_2.$$

Or, l'hypothèse que A est une coupure irréductible entre p et q entraîne en vertu de (3) que ni A_1 ni A_2 n'est une coupure entre ces points. Ceci implique selon (ii) que A_1+A_2 n'est nonplus une coupure entre p et q; mais $A=A_1+A_2$. Cette contradiction prouve que $A-K$ est connexe.

Lemme 2. Si *A est une coupure irréductible (complète) bornée et K un vrai sous-continu de A qui contient plus d'un point et n'est pas un continu de condensation, alors $K . \overline{A-K}$ n'est pas un continu et $\overline{A-K}$ est un continu irréductible entre tous deux points appartenant à deux composantes différentes de l'ensemble $K . \overline{A-K}$.*

[1]) Voir ma note *Sur l'opération $\overline{A}$...*, Fund. Math. III, p. 183 (6).

[2]) Les théorèmes (ii) et (iii) sont dûs à Janiszewski (Prace Mat.-Fiz. Varsovie 1913) Cf. Straszewicz, Fund. Math IV p. 130.

[3]) Fund. Math. II, p. 210.

Démonstration. Si X est connexe, $\overline{X}$ est un continu [1]). Donc, en raison du lemme précédent $\overline{A-K}$ est un continu. Comme, par hypothèse: $\overline{A-K} \neq A \neq K$ et $K + \overline{A-K} = A$, le produit $K \cdot \overline{A-K}$ n'est pas un continu (selon ii).

Or, soient a et b deux points appartenant à deux composantes différentes de l'ensemble $K \cdot \overline{A-K}$. Nous allons prouver que $\overline{A-K}$ est un continu irréductible entre a et b. Il s'agit donc de prouver que, si un continu L satisfait aux conditions

(4) $$a \varepsilon L, \; b \varepsilon L,$$

(5) $$L \subset \overline{A-K},$$

on a

(6) $$L = \overline{A-K}.$$

Remarquons d'abord que $L \cdot K$ n'est pas un continu, car autrement les points a et b seraient en raison de (4) et (5) situés sur une seule composante de l'ensemble $K \cdot \overline{A-K}$. L'ensemble $L \cdot K$ n'étant pas un continu, on conclut de (iii) que $L + K$ est une coupure du plan. A étant une coupure irréductible, on a donc $L + K = A$, d'où $A - K \subset L$ et $\overline{A-K} \subset L$, ce qui, rapproché de (5), donne l'identité (6).

Theorème V. *Une coupure irréductible bornée est ou bien un continu indécomposable ou bien somme de deux continus irréductibles entre le même couple de points.*

Plus précisément: on a (dans le second cas) $A = L + M$, où l'ensemble $L \cdot M$ contient deux composantes au moins et les continus L et M sont irréductibles entre chaque couple de points appartenant à deux composantes différentes de $L \cdot M$.

Démonstration. Supposons que la coupure irréductible A ne soit pas un continu indécomposable. Chaque continu décomposable contenant un vrai sous-continu (ayant plus d'un point) qui n'en est pas un continu de condensation [2]). A contient un sous-continu K tel que

(7) $$0 \neq \overline{A-K} \neq A.$$

Posons $L = \overline{A-K}$ et $M = \overline{A-L}$, donc

[1]) Hausdorff op. cit p. 246.

[2]) Janiszewski et Kuratowski, l. c., théorème II.

$$\overline{A-M} = \overline{A - \overline{A - \overline{A - K}}},$$

d'où selon (i):

$$\overline{A-M} = \overline{A-K} = L. \tag{8}$$

D'après le lemme 2, L est un continu. De plus, selon (7) on a $0 \neq L \neq A$ et L n'est pas un continu de condensation de A, car on aurait $A = \overline{A-L} = M$ et suivant (8) on arriverait à l'identité $L = 0$.

En remplaçant dans le lemme 2 K par L, et puis par M, on en conclut que $L \cdot M$ n'est pas un continu et que L et M sont deux continus irréductibles entre tous deux points appartenant à des composantes différentes de l'ensemble $L \cdot M$.

4. Les résultats du N. 3 nous permettent de caractériser les coupures irréductibles dans le cas le plus intéressant: lorsqu'on a une décomposition du plan en plus de deux régions ayant une frontière commune. Nous allons invoquer les théorèmes suivants:

(a) si A_1 et A_2 sont deux ensembles fermés et bornés dont aucun ne coupe le plan et si $A_1 + A_2$ coupe le plan en plus de deux régions, le produit $A_1 \cdot A_2$ contient trois composantes au moins [1]);

(b) si le continu C est irréductible à la fois entre p et q, q et r, p et r, C est indécomposable [2]).

En outre, pour pouvoir étendre nos résultats aux ensembles non-bornés, nous nous servirons de la méthode d'inversion [3]). Citons en deux théorèmes:

(c) si A est une coupure irréductible non-bornée et si le centre d'inversion $v \varepsilon C(A)$, alors $A^* + v$ est une coupure irréductible bornée et le nombre des régions en lesquelles A et $A^* + v$ coupent le plan est le même [4]);

(d) si A est un continu indécomposable borné, A^* est un continu indécomposable [5]).

Théorème VI. *Toute coupure irréductible qui coupe le plan en plus de deux régions est ou bien un continu indécomposable ou bien somme de deux continus indécomposables.*

[1]) Straszewicz, l. c., p. 128.

[2]) Janiszewski et Kuratowski, l. c., théorème IV.

[3]) Cf. ma note *Sur la méthode d'inversion*, Fund. Math. IV.

[4]) Knaster et Kuratowski *Sur les continus non-bornés*, Fund. Math. V, p. 31.

[5]) Ibid. théorème du N. 11.

D é m o n s t r a t i o n. Nous établirons d'abord ce théorème dans l'hypothèse que la coupure A est bornée.

D'après le théorème V, si A n'est pas indécomposable, A se décompose en deux continus:

$$A = L + M, \quad L \neq A \neq M \tag{1}$$

qui sont tous les deux irréductibles entre tout couple de points appartenant à des composantes différentes de $L \cdot M$.

Selon (1), ni L ni M n'est une coupure. On en conclut, en vertu de (a) que l'ensemble $L \cdot M$ contient au moins trois composantes. Soient p, q, r trois points appartenant à trois composantes de $L \cdot M$. Donc chacun des continus L et M est irréductible à la fois entre p et q, q et r, p et r, ce qui entraîne, en vertu de (b), que ces continus sont indécomposables, c. q. f. d.

Passons au cas où A est non-borné. Soit $v \varepsilon C(A)$. D'après (c) $A^* + v$ est une coupure irréductible bornée qui coupe le plan en plus de deux régions. On peut donc appliquer à $(A^* + v)$ le théor. VI.

Or, si $A^* + v$ est indécomposable, le continu $A = (A^* + v)^*$ est selon (d) aussi indécomposable. De même, si $A^* + v$ se décompose en deux continus indécomposables L et M, les continus L^* et M^* sont indécomposables et on a: $A = (A^* + v)^* = L^* + M^*$.

5. Théorème VII. *Si une coupure irréductible* (*bornée*) *entre a et b est un continu de Jordan* (c.-à.-d. une image continue d'un intervalle), *elle est une courbe simple fermée* (c.-à.-d. image bicontinue d'une circonférence).

D é m o n s t r a t i o n. Je déduis ce théorème des deux propositions suivantes:

(1)[1] si aucun sous-continu d'un continu borné A ne coupe A, A est une courbe simple fermée;

(2)[2] Si K est un sous-continu d'un continu de Jordan A et si R désigne l'ensemble de points que l'on peut unir à un point fixe par un sous-continu de $A - K$, alors les ensembles $A - R$ et $R + K$ sont des continus.

Ainsi, pour établir notre théorème, il suffit conformément à (1) de prouver que, A étant une coupure irréductible de Jordan et K en étant un sous-continu, K ne coupe pas A.

[1] V. ma note des Fund. Math. V, p. 119, théor. du § 3.

[2] Ibid. p. 113 (II).

Or. supposons par contre que K coupe A. En employant R dans le même sens que dans (2), on a donc $R \mp K - A$, d'où

(8) $$R + K \mp A \mp A - R.$$

Il résulte de (3) que ni $R + K$ ni $A - R$ ne sont des coupures entre a et b. Le produit de ces ensembles est un continu, car

$$(A - R) . (R + K) = (A - R) . K = K.$$

donc selon (2) et le théor. (ii) du N. 3, leur somme n'est nonplus une coupure entre a et b. Mais

$$(A - R) + (R + K) = A - R + R = A.$$

Donc K ne coupe pas A, c. q f. d.

Il résulte du théor. VII que la condition suffisante et nécessaire pour qu'un ensemble plan soit une courbe simple fermée est, qu'il soit un continu de Jordan (borné) et une coupure irréductible entre deux points Car la nécessité de cette condition suit immédiatement du théorème connu de Jordan.

Le théorème VII permet de préciser les théorèmes I et IV pour le cas de coupure qui est un continu de Jordan. En effet, si A est un continu borné de Jordan et R une région-composante de $C(A)$, la frontière $F(R)$ est également un continu de Jordan [1]). Or, si A coupe entre a et b, l'une des deux régions-composantes de $C(A)$ déterminées par a ou b est bornée. Soit donc R cette région et $a \varepsilon R$. La frontière $F(R)$ étant un continu de Jordan, l'ensemble $\bar{R} = R + F(R)$ est un continu de Jordan borné [2]). Par conséquent, si S est la région-composante de $C(\bar{R})$ contenant b, $F(S)$ est un continu de Jordan. En même temps, $F(S)$ est selon le lemme du N. 1 une coupure irréductible entre a et b. D'après le théor. VII, $F(S)$ est donc une courbe simple fermée.

Nous avons ainsi le:

Corollaire [3]). *A étant un continu de Jordan (borné) qui coupe*

[1]) Cf. Mazurkiewicz, Fund. Math. V, p. 137 et Torhorst Math. Zeitschr. IX.

[2]) C'est une conséquence immédiate de la „connexité locale" des continus de Jordan. Voir: remarque I.

[3]) Cf. R. L. Moore Math. Zeitschrift 1922, p. 260. La démonstration de M. Moore me semble insuffisante. Car désignons par R une région bornée ayant pour frontière deux circonférences tangentes et soient $a \varepsilon R$, $b =$ le centre de la circonférence intérieure. Le „outer boundary" (= la circonf. extérieure) ne coupe pas entre a et b, contrairement à l'assertion de M. Moore.

le plan entre a et b, A contient une courbe simple fermée qui coupe le plan entre les mêmes points. Notamment: si R désigne une région-composante de $C(A)$, chaque région-composante de $C(\overline{R})$ a pour frontière une courbe simple fermée.

Remarques: I En se servant de la notion de „connexité locale" (due à MM. Mazurkiewicz et Hahn) on peut étendre plusieurs théorèmes sur les lignes de Jordan aux continus non-bornés qui sont localement connexes en chaque point, c.-à.-d. aux „continus de Jordan non-bornés". On dit qu'un continu C est localement connexe au point p, si chaque cercle R de centre p contient un continu K tel que p est un point intérieur de K relativement à C; en symboles

(4) $$K \subset R \cdot C, \quad p \varepsilon (C - \overline{C - K}).$$

En appliquant la méthode d'inversion au théor. VII, on en déduit que: *si une coupure irréductible entre deux points est un continu de Jordan non-borné, elle est une courbe simple ouverte* (image bicontinue d'une droite [1])).

II Sur les continus irréductibles entre deux points la notion de connexité locale au point p coïncide avec la propriété du point p d'être situé sur un continu de condensation. Cela résulte de ces deux théorèmes:

(5) si C n'est pas localement connexe au point p (appartenant à C), p est situé sur un continu de condensation de C [2]);

(6) p étant situé sur un continu de condensation d'un continu C irréductible entre deux points, C n'est pas localement connexe au point p [3]).

Nous établirons à présent ce théorème:

C étant une coupure irréductible du plan, la condition nécessaire et suffisante, pour qu'un point p de C soit situé sur un continu de condensation de C, est que C ne soit pas localement connexe au point p.

Démonstration. D'après (5) la condition est suffisante. Pour prouver qu'elle est nécessaire nous n'allons considérer que le cas de coupure *bornée*, car celui de coupure non-bornée se ramène à celui-ci par inversion.

Supposons que Q soit un continu de condensation contenant p, malgré que C soit localement connexe au point p. Donc $C = \overline{C - Q}$ et la formule (4) est réalisée, R étant un cercle tel que $C - R \neq 0$. Posons

(7) $$L = \overline{C - K}, \quad M = \overline{C - L} = \overline{C - \overline{C - K}}$$

donc, selon (i) N. 3:

(8) $$\overline{C - M} = L.$$

[1]) Dans une note publiée dans les Trans. of the Amer. Math. Soc. XXI, 1920, M. J. R. Kline démontre ce théorème, ainsi que le théor. VII, pour le cas où la coupure coupe le plan en précisément deux régions. Comme on voit, cette restriction peut être omise.

[2]) Théorème de M. Mazurkiewicz, Fund. Math. I p. 176.

[3]) Mazurkiewicz, ibid p. 205 et Kuratowski Fund. Math. III p. 221.

K n'étant pas un continu de condensation, puisque $p \varepsilon C - \overline{C-K} \neq 0$, on a $C \neq L \neq 0$, ce qui implique d'après le lemme 2 du N. 3 que le continu M est irréductible entre deux points.

Comme p n'est pas un point d'accumulation de $C-K$ (en vertu de (4)), on peut l'entourer d'un cercle R_1 (contenu dans R) disjoint de $\overline{C-K}$. Donc

(9) $$CR_1 \subset C - \overline{C-K} \subset M.$$

Or, selon un théorème de **Janiszewski**[1]), si un continu contient le centre d'un cercle, il contient aussi un continu (ayant plus d'un point) situé entièrement dans ce cercle et contenant son centre. Le continu Q contient donc un sous-continu Q_1 tel que

(10) $$p \varepsilon Q_1 \subset QR_1.$$

Je dis que Q_1 est un continu de condensation de M. En effet, en raison de (9) et (10) on a: $Q_1 \subset C - \overline{C-K} = C - L$, d'où

(11) $$Q_1 . L = 0.$$

Or, Q_1 étant un continu de condensation de C, la décomposition évidente:

$$C - Q_1 = (M - Q_1) + (C - M) - Q_1$$

donne

(12) $$C = \overline{C - Q_1} = \overline{M - Q_1} + \overline{(C-M) - Q_1}.$$

Mais, en vertu de la formule: $\overline{X} \supset \overline{X-Y} \supset \overline{X} - \overline{Y}$[2]), on a:

$$\overline{C-M} \supset \overline{(C-M) - Q_1} \supset \overline{C-M} - Q_1$$

et d'après (8) et (11): $\overline{(C-M) - Q_1} = L$. Ainsi $\overline{(C-M) - Q_1} = L$ et, selon (12): $C = \overline{M - Q_1} + L$, donc $C - L \subset \overline{M - Q_1}$, d'où $\overline{C-L} \subset \overline{M - Q_1} \subset M$, ce qui donne d'après (7): $\overline{M - Q_1} = M$.

Il est ainsi établi que Q_1 est un continu de condensation de M. D'après (6) M n'est donc pas localement connexe au point p. Il en est de même de C, car les points de C situés dans le voisinage de p appartiennent à M (formule ((9)).

III. Nous allons prouver un théorème qui entre dans le même ordre d'idées que le théor. VII. Il nous faudra à cet effet étendre la notion de „couper le plan“ aux ensembles non-fermés: nous omettons la restriction que la coupure soit fermée. C'est ce théorème:

Si A est un ensemble fermé et borné qui coupe la plan entre a et b et si aucun (vrai) sous-ensemble connexe de A ne coupe le plan entre ces points, A est une courbe simple fermée.

Démonstration. Selon les théor. I et II, A est un continu. Je vais m'appuyer dans la suite sur le théorème suivant, qui provient de M. **Schönflies**[3]), mais

[1]) Thèse, théor. IV, Chap. 1.

[2]) *Sur l'opération* $\overline{A}$, l. c. théor. 3, p. 183.

[3]) L. cit. Chap. V.

qui dans sa forme générale a été établi par M. Zarankiewicz[1]): soit A un continu borné qui coupe le plan entre a et b; soient R_a et R_b les régions-composantes de $C(A)$ qui contiennent a et b resp. Si tout point de A est accessible de R_a et de R_b, A est une courbe simple fermée. (La proposition: „le point p est accessible de R" veut dire: il existe un continu K tel que $p \varepsilon K$ et $0 \neq K - p \subset R$).

Ainsi pour prouver notre théorème, il suffit de prouver que chaque point p de A est accessible de R_a et de R_b. Or, le lemme 1 du N. 3 entraîne que $A - p$ est connexe; il existe donc, par hypothèse, un continu K tel que: $a, b \varepsilon K$ et $K . A = p$. Si l'on pose $K_1 = K . R_a$, on a donc $p \varepsilon K_1$ et $a \varepsilon K_1 - p \subset R_a$. Il ne reste donc qu'à prouver que K_1 est un continu.

Or, si K_1 n'était pas un continu, on aurait une décomposition de K_1 en deux ensembles formés (non vides) M et N de sorte que

$$K_1 = M + N, \quad M . \quad = 0, \quad p \varepsilon N, \quad \text{d'où} \quad M \subset R_a.$$

Mais alors

$$K = K_1 + (K - R_a) = M + [N + (K - R_a)]$$

où $M . [N + (K - R_a)] = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que K soit un continu.

6. Lemme 1. *$\mathcal{F}$ étant une famille de continus disjoints dont chacun coupe le plan en plus de deux régions, $\mathcal{F}$ est finie ou dénombrable.*

Démonstration. A chaque continu K de $\mathcal{F}$ on peut attacher un système de trois points p_K, q_K, r_K tels que 1°: K coupe le plan entre tous ces points, 2°: les coordonnés de ces points sont rationnels. Je dis que le même système de trois points ne peut correspondre à deux continus K et L différents et appartenant à $\mathcal{F}$.

Supposons, par contre, que $p_K = p_L$, $q_K = q_L$, $r_K = r_L$. Comme $K \neq L$ on a $K . L = 0$ d'où on conclut qu'il existe une région-composante R de $C(L)$ telle que

(1) $$K \subset R \quad \text{donc} \quad K . C(R) = 0.$$

L étant une coupure entre p_L, q_L et r_L, il existe parmi ces points au moins deux, soient p_L et q_L, qui n'appartiennent pas à R. Donc

(2) $$p_L \varepsilon C(R), \quad q_L \varepsilon C(R).$$

Or, L étant un continu et R une région-composante de son complémentaire, l'ensemble $C(R)$ est un continu[2]). Ce continu unit, en vertu de (1) et (2), les points p_L et q_L sans recontrer K, contrairement à l'hypothèse que K coupe le plan entre ces points.

[1]) Thèse, à paraître.

[2]) C'est un théorème dû à M. Brouwer. Cf. N. 1 (γ).

Il est ainsi établi qu'à chaque continu K correspond un autre système de trois points. L'ensemble de tous ces systèmes étant tout au plus dénombrable, il en est de même de la famille $\mathcal{F}$.

Lemme 2. *$\mathcal{F}$ étant une famille de continus disjoints et bornés qui sont des coupures réductibles, $\mathcal{F}$ est finie ou dénombrable.*

Démonstration. En vertu du lemme précédent on peut supposer que chaque élément K de $\mathcal{F}$ coupe le plan en *deux* régions $I(K)$ et $E(K)$. K étant une coupure réductible, on conclut du théor. III que K n'est pas la frontière soit de $I(K)$ soit de $E(K)$ Par raison de symétrie, on peut supposer que, $G(K)$ désignant la frontière de $I(K)$, il existe un point $p(K)$ tel que

$$(3) \qquad p(K)\,\varepsilon\,|K - G(K)|.$$

Soit $\varrho(K)$ la distance de $p(K)$ à $G(K)$. On peut supposer qu'il existe un nombre naturel k tel que

$$(4) \qquad \varrho(K) > \frac{1}{k}$$

quel que soit K. Car, si pour chaque k particulier la famille de tous les K assujettis à l'inégalité (4) est finie ou dénombrable, $\mathcal{F}$ est tout au plus dénombrable.

Choisissons de chaque région $I(K)$ un point à coordonnés rationnels. L'ensemble de tous les points à coordonnés rationnels étant dénombrable, notre lemme se ramène au cas où le même point appartient à toutes les régions $I(K)$. Soit donc

$$(5) \qquad r\,\varepsilon\,I(K), \text{ quel que soit } K.$$

Soit

$$(6) \qquad R_1, R_2, \dots R_n, \dots$$

la suite de tous les cercles dont le rayon et les coordonnés du centre sont rationnels. Envisageons les ensembles formés par la réunion d'un nombre fini de ces cercles, c.-à.-d. les ensembles de la forme $R_{i_1}+R_{i_2}+\dots+R_{i_l}$. On peut ranger tous ces ensembles en une suite

$$(7) \qquad S_1, S_2, \dots S_n, \dots$$

Les continus K étant bornés, on peut faire correspondre, en vertu du théor. de Borel, à chaque K un nombre $n(K)$ tel que:

(8) $$K \subset S_{n(K)}$$

(9) si $x \varepsilon S_{n(K)}$ il existe un point $y \varepsilon K$ distant de x moins que $\frac{1}{k}$.

Pour prouver notre lemme il suffit de prouver que l'inégalité $K_1 \neq K_2$ entraîne $n(K_1) \neq n(K_2)$.

Or, l'inégalité $K_1 \neq K_2$ entraîne, par hypothèse, $K_1 K_2 = 0$, d'où $I(K_1) \neq I(K_2)$, car autrement on aurait $G(K_1) = G(K_2) \subset K_1 \cdot K_2$. Soit donc

(10) $$s \varepsilon I(K_1) - I(K_2).$$

Selon (5) on peut unir r à s par un continu situé dans $I(K_1)$; comme $r \varepsilon I(K_2)$ et s non $\varepsilon I(K_2)$, ce continu rencontre la frontière de $I(K_2)$ donc le continu K_2. Ainsi $K_2 \cdot I(K_1) \neq 0$ et comme $K_1 \cdot K_2 = 0$, on en tire:

(11) $$K_2 \subset I(K_1)$$

d'où, selon (3):

(12) $$p(K_2) \varepsilon I(K_1).$$

Supposons maintenant que $n(K_1) = n(K_2)$, c.-à.-d. que $S_{n(K_1)} = S_{n(K_2)} = S$.

D'après (3) et (8): $p(K_1) \varepsilon S$. Il existe donc, en raison de (9) un point $q \varepsilon K_2$ tel que, L désignant le segment à extrémités $p(K_1)$ et q, la longueur de L est $< \frac{1}{k}$. Ce segment traverse la frontière de $I(K_1)$, car, d'après (11) et (3), $q \varepsilon I(K_1)$ et $p(K_1)$ non $\varepsilon I(K_1)$ Soit donc $g \varepsilon L \cdot G(K_1)$. La longueur du segment L étant $< \frac{1}{k}$, la distance de $p(K_1)$ à g est de même $< \frac{1}{k}$, mais ceci contredit la formule (4).

Il est ainsi établi que $n(K_1) \neq n(K_2)$ c. q. f. d.

Les deux lemmes entraînent le

Théorème VIII. *Etant donnée une famille non-dénombrable $\mathcal{F}$ de continus disjoints et bornés dont chacun est une coupure du plan, $\mathcal{F}$ se décompose en une famille non-dénombrable de coupures irréductibles qui coupent le plan en deux régions et d'une famille au plus dénombrable d'autres coupures.*

Il est enfin à remarquer que la famille $\mathcal{F}$, tout en étant non-dénombrable, peut ne contenir aucune courbe simple fermée.
