Sur l'équation fonctionnelle $f(x)+f(x+y)=\varphi(y)f\left(x+\frac{y}{2}\right)$.

Par

St. Kaczmarz (Cracovie).

§ 1. Le but de ce travail est l'étude de l'équation fonctionnelle

$$f(x)+f(x+y)=\varphi(y)f\left(x+\frac{y}{2}\right), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est regardée comme une fonction donnée, et $f(x)$ comme l'inconnue.

En y remplaçant x par $x-y$, ét y par $2y$, on en déduit l'équation

$$f(x+y)+f(x-y)=\varphi(2y)f(x), \tag{1bis}$$

qui est équivalente à (1).

Je prouverai, que toute fonction mesurable $f(x)$ satisfaisant à l'équation (1) est continue et, en particulier, qu'elle est de la forme: $C_1\cos kx+C_2\sin kx$, ou bien de la forme: $C_1 \cos\operatorname{hyp} kx+$ $+C_2\sin\operatorname{hyp} kx$, où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires et k un nombre dépendant de la fonction $\varphi(x)$ [1].

[1] C'est M. Banach qui a posé le problème de trouver les fonctions d'une variable, possédant des propriétés analogues aux fonctions harmoniques $V(x, y)$:

$$V(a, b)=\frac{1}{2r\pi}\int\limits_{(\varphi)}V(x, y)\,ds$$

r étant rayon du cercle φ et (a, b) son centre.

Plusieurs simplifications de mes raisonnements sont dues à M. S. Saks.

§ 2. Nous prouverons d'abord que l'équation (1) admettant des solutions $f(x)$ non identiquement nulles, $\varphi(x)$ qui figure dans (1), doit, de sa part, satisfaire à l'équation suivante:

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y)=\varphi(x)\varphi(y). \tag{2}$$

En effet, soit $f(x)$ une fonction vérifiant (1) et ne s'annulant pas pour $x=a$. On a, d'après (1^{bis}):

$$f\left(a+\frac{x+y}{2}\right)+f\left(a-\frac{x+y}{2}\right)=\varphi(x+y)f(a).$$

$$f\left(a-\frac{x+y}{2}\right)+f\left(a-\frac{x-y}{2}\right)=\varphi(x-y)f(a).$$

$$f\left(a+\frac{x+y}{2}\right)+f\left(a+\frac{x-y}{2}\right)=\varphi(y)f\left(a+\frac{x}{2}\right)$$

$$f\left(a-\frac{x+y}{2}\right)+f\left(a-\frac{x-y}{2}\right)=\varphi(y)f\left(a-\frac{x}{2}\right)$$

$$f\left(a+\frac{x}{2}\right)+f\left(a-\frac{x}{2}\right)=\varphi(x)f(a).$$

L'addition des deux premières de ces équations nous fournit, en vertu des trois autres:

$$f(a)\varphi(x)\varphi(y)=f(a)[\varphi(x+y)+\varphi(x-y)],$$

ce qui donne la relation (2), car a n'annule pas $f(x)$.

§ 3. On vérifie de même que, l'équation (1) admettant des solutions mesurables et non identiquement nulles, la fonction $\varphi(x)$ est mesurable aussi. Car, en supposant $f(a)\neq 0$, on obtient de (1^{bis}): $\varphi(2y)=\dfrac{f(a+y)+f(a-y)}{f(a)}$, ce qui montre que, $f(x)$ étant mesurable, $\varphi(x)$ l'est aussi.

§ 4. Remarquons ensuite que, $\varphi_1(x)$ étant une solution de (2), elle l'est aussi par rapport à (1), lorsqu'on y pose $\varphi(x)=\varphi_1\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

En effet, en remplaçant dans (1^{bis}) f par φ_1 et $\varphi(x)$ par $\varphi_1\left(\dfrac{x}{2}\right)$, on obtient la relation

$$\varphi_1(x+y)+\varphi_1(x-y)=\varphi_1(y)\varphi_1(x),$$

qui est vérifiée, φ_1 étant, par hypothèse, une solution de (2).

On voit aussi que toute solution de l'équation (2) peut être regardée comme celle de (1), lorsqu'on y choisit la fonction $\varphi(x)$ d'une manière convenable.

§ 5. **Lemme 1.** Une solution $\varphi(x)$ de l'équation (2) s'annulant en presque tout point x, est nulle identiquement.

Transformons pour le montrer, l'équation (2) de façon suivante:

$$\varphi(x)+\varphi(x+2y)=\varphi(x+y)\,\varphi(y). \tag{2^{bis}}$$

Soit x_1 une valeur quelconque de x. Chacune de deux fonctions $\varphi(x_1+2y)$, $\varphi(x_1+y)$ s'annule pour presque toutes les valeurs de y. Par conséquent, il existe des valeurs $y=y_1$ telles que simultanément: $\varphi(x_1+2y_1)=\varphi(x_1+y_1)=0$ Donc, en raison de (2^{bis}): $\varphi(x_1)=0$, et x_1 étant un nombre quelconque, on s'assure que $\varphi(x)\equiv 0$ identiquement.

Lemme 2. Toute solution $f(x)$ de (1) qui est mesurable, est bornée dans tout l'intervalle fini.

Soit $f(x)$ une solution mesurable de (1). Le théorème étant évident dans le cas où $f(x)$ est nulle identiquement, on peut supposer qu'elle ne le soit pas. Par suite, la fonction $\varphi(x)$ qui figure dans (1) fournit (§§ 2, 3) une solution mesurable et non nulle identiquement de l'équation (2). D'après le lemme précédent, elle ne s'annule pas même presque partout, et on peut assigner un intervalle $(-a, a)$ et un nombre positif δ tels que l'ensemble

$$E=E[|\varphi(2x)|>\delta; -a\leqslant x\leqslant a]$$

c.-à.-d. l'ensemble des points x de l'intervalle $(-a, a)$ où $|\varphi(2x)|>\delta$, soit de mesure supérieure à δ.

Ceci étant, supposons, par impossible, que $f(x)$ est non-bornée dans un intervalle fini, et par suite, qu'elle l'est dans tout entourage d'un point x_1. Donc, ε étant un nombre positif quelconque, et n un nombre naturel, il existe un nombre h, tel que

$$|h|<\varepsilon, \tag{3}$$

et

$$|f(x_1+h)|>n. \tag{4}$$

D'après (1^{bis}):

$$f(x_1+h+y)+f(x_1+h-y)=\varphi(2y)f(x_1+h). \tag{5}$$

Supposons $y\varepsilon E$. On a donc, d'après la définition même de E: $|\varphi(2y)|>\delta$, et par suite, en vertu de (4) et (5):

$$|f(x+h+y)+f(x+h-y)|>\delta\,.\,n.$$

Donc, (toujours pour $y \varepsilon E$), l'une au moins des deux inégalités suivantes doit être vérifiée:

$$(6) \qquad |f(x_1+h+y)| > \frac{\delta \cdot n}{2}, \text{ ou bien: } |f(x_1+h-y)| > \frac{\delta \cdot n}{2}.$$

Posons, pour $y \varepsilon E$: $\xi = x_1 + h + y$, et désignons par $\bar{\xi}$ le symétrique de ξ par rapport au point $x_1 + h$. On voit aisément que la mesure de l'ensemble des points ξ contenus dans l'intervalle $(x_1 - a, x_1 + a)$ est égale, ou supérieure, à $m(E) - |h| > \delta - |h|$. D'autre part, en raison de (6), on a pour tout ξ: ou $|f(\xi)| > \frac{\delta \cdot n}{2}$, ou bien: $|f(\bar{\xi})| > \frac{\delta \cdot n}{2}$. En désignant donc par H_n l'ensemble des points x de l'intervalle $(x_1 - a, x_1 + a)$, où $|f(x)| > \frac{\delta \cdot n}{2}$, on obtient, d'après ce qui précède, et en vertu de (3):

$$m(H_n) > \delta - |h| > \delta - \varepsilon.$$

Donc, ε étant un nombre positif quelconque, on en tire:

$$(7) \qquad m(H_n) \geqslant \delta > 0,$$

pour tout n.

Or, on a: $H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots$ et $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = 0$. Donc aussi: $\lim\limits_{n\to\infty} m(H_n) = 0$, ce qui est incompactible avec (7). Nous sommes ainsi aboutis à une contradiction qui justifie notre assertion.

Théorème. *Toute solution mesurable $f(x)$ de l'équation* (1) *est continue.*

L'énoncé est évident lorsque $f(x)$ est identiquement nulle. On peut donc supposer qu'elle ne le soit pas. D'après (1), $\varphi(x)$ ne peut pas aussi s'annuler identiquement. Ensuite, en vertu du lemme 2, $f(x)$ et, (en tenant compte des §§ 3, 4), $\varphi(x)$ aussi, sont bornées, donc à plus forte raison, sommables.

Envisageons l'intégrale $\int\limits_0^u \varphi(2y)dy$ variable avec u. On voit qu'elle ne peut pas s'annuler identiquement; en effet, lorsqu'elle soit identiquement nulle, il en aurait de même presque partout de la fonction $\varphi(2y)$, ce qui est en contradiction, en vertu du lemme 1, avec l'hypothèse faite plus haut.

Il existe, par conséquent, une valeur $u = u_1$, telle que:

$$\int_0^{u_1} \varphi(2y)\,dy \neq 0. \tag{7}$$

En intégrant (1^{bis}) par rapport à y, on obtient

$$\int_0^{u_1} f(x+y)\,dy + \int_0^{u_1} f(x-y)\,dy = f(y) \int_0^{u_1} \varphi(2x)\,dy,$$

ou bien:

$$\int_x^{x+u_1} f(t)\,dt + \int_{x-u_1}^{x} f(t)\,dt = f(x) \cdot \int_0^{u_1} \varphi(2t)\,dt. \tag{8}$$

En tenant compte de (7), on tire immédiatement de (8) que $f(x)$ est une fonction continue.

§ 6. La continuité des solutions mesurables établie, on y peut donner l'expression générale et simple. Remarquons d'abord que la relation (8) montre non seulement que $f(x)$ est continue, mais aussi qu'elle est dérivable, et même un nombre quelconque des fois. En effet, en dérivant (8), on obtient:

$$f(x+u_1) - f(x-u_1) = A\ f'(x). \tag{9}$$

où $A = \int_0^{u_1} \varphi(2t)\,dt$ est un facteur constant et non nul [1]). En dérivant (9), on voit de même, par l'induction, que $f(x)$ admet des dérivées de tous les ordres.

Cela posé, on obtient de (1^{bis}):

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) = [\varphi(2y) - \varphi(0)] f(x).$$

en divisant les deux membres de cette égalité par y^2 et en faisant y tendre à 0, on obtient, d'après les règles élémentaires du calcul différentiel:

$$f''(x) = k \cdot f(x), \quad \text{où:} \quad k = 2\varphi''(0). \tag{10}$$

Les solutions de (10) sont bien connues. Elles sont de l'une des trois formes:

$$f(x) = C_1 \cos\sqrt{k}x + C_2 \sin\sqrt{k}x, \quad \text{pour } k > 0, \tag{11*}$$

[1]) nous n'envisageons que le cas où $f(x)$ n'est pas nulle identiquement.

$$(11^{**})\qquad f(x) = C_1 \cos \operatorname{hyp} \sqrt{|k|}\, x + C_2 \sin \operatorname{hyp} \sqrt{|k|}\, x, \quad \text{pour } k > 0,$$

$$(11^{***})\qquad f(x) = C_1 + C_2\, x \quad \text{pour } k = 2\varphi''(0) = 0.$$

Par conséquent, d'après § 4, pour que (1) admette des solutions mesurables et non nulles, il faut que $\varphi(x)$ soit aussi d'une des formes (11) lorsqu'on y remplace k par $k/4$. Or, cette condition n'est que nécessaire. Pour en obtenir celle qui soit nécessaire et suffisante, substituons les expressions ainsi obtenues pour $\varphi(x)$ dans l'équation (2) que $\varphi(x)$ doit vérifier. On s'assure que $C_1 = 2$, $C = 0$, ce qui donne les expressions suivantes pour $\varphi(x)$:

$$(12^{*})\qquad \varphi(x) = 2 \cos \tfrac{1}{2}\sqrt{k}\,.\, x, \quad \text{pour } k > 0$$

$$(12^{**})\qquad \varphi(x) = 2 \cos \operatorname{hyp} \sqrt{|k|}\, x, \quad \text{pour } k < 0$$

$$(12^{***})\qquad \varphi(x) = 2, \quad \text{pour } k = 0$$ [1].

On vérifie aisément, par le calcul direct, que réciproquement. $\varphi(x)$ étant de l'une des trois formes (12), les formules (11) fournissent l'expression générale des solutions mesurables $f(x)$ de (1), C_1, C_2 y désignant des constantes arbitraires.

§ 7. Nous avons supposé dans l'énoncé du théorème du § 5 que la solution $f(x)$ de l'équation (1) est mesurable dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Mais, pour que ce théorème subsiste, il suffit de supposer que $f(x)$ soit mesurable dans un intervalle (a, b) arbitrairement choisi. Pour le montrer, il suffit de prouver que $f(x)$ étant mesurable dans un intervalle fini, elle l'est aussi dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Nous procédons ainsi:

L e m m e 1. $\varphi(x)$ étant une solution de (2) et mesurable dans un intervalle $(0, a)$, elle l'est aussi dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

En effet, d'après (2), en y posant $x = y$, on trouve $\varphi(2x) = [\varphi(x)]^2 - \varphi(0)$. On en conclut, par l'induction, que $\varphi(x)$ étant mesurable dans $(0, a)$, elle l'est aussi dans tout intervalle $(0, \pm 2^n a)$, et par suite dans $(-\infty, +\infty)$.

L e m m e 2 $f(x)$ étant une solution de (1), nulle dans un intervalle (a, b) elle l'est identiquement.

[1]) On voit donc que le cas particulier (pour $k=0$) de notre équation est l'équation bien connue: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$ qui équivaut, au fond, à celle de M. H a m e l (Cf. S i e r p i ń s k i. *Fund. Math.* t. 1, p. 129).

Posons: $b = a + k$. D'après (1):

$$f(a+y) = \varphi(y) f\left(a + \frac{y}{2}\right) - f(a);$$

donc, par l'induction, on voit que, $f(x)$ étant nulle dans $(a, a+k)$, elle l'est aussi dans tout intervalle $(a, a+2^n k)$, donc dans $(a, +\infty)$. En substituant dans (1) $x = b$ on obtient de même que $f(x)$ s'annule dans tout l'intervalle $(-\infty, b)$. Parsuite elle est nulle identiquement.

Théorème. *$f(x)$ étant une solution de (1) et mesurable dans un intervalle $(a, a+k)$, elle l'est dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, et parsuite (§ 5), elle est continue.*

Le théorème est évident lorsque $f(x)$ est nulle identiquement. Supposons donc qu'elle ne le soit pas. Donc, d'après le lemme précédent, elle ne peut s'annuler dans tous les points intérieurs à l'intervalle $(a, a+k)$ et parsuite, il y existe un point intérieur x_1 et un nombre positif h de façon que: $f(x_1) \neq 0$ et que les fonctions $f(x_1+y)$, $f(x_1-y)$ sont mesurables dans l'intervalle (x_1-h, x_1+h) de la variable y. Par conséquent, (*voir*: (1^{bis})), la fonction $\varphi(2y) = \dfrac{f(x_1+y)+f(x_1-y)}{f(x_1)}$ y est mesurable aussi, et en raison du lemme 1. elle est mesurable dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

On tire, d'autre part, de (1):

$$f(a) + f(a+y) = \varphi(y) f\left(a + \frac{y}{2}\right);$$

or, la fonction $\varphi(y)$ étant mesurable dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, et $f(x)$ l'étant dans $(a, a+k)$, on en conclut, par l'induction, que $f(x)$ est mesurable dans tout intervalle $(a, a+2^n k)$, et parsuite, dans $(a, +\infty)$. En substituant dans (1) $x = a+k$, on prouve de même, que $f(x)$ est mesurable dans $(-\infty, a+k)$ et par conséquent, dans $(-\infty, +\infty)$.

§ 8. Nous nous sommes occupés dans ce travail des solutions mesurables de l'équation (1). Or, on peut donner aisément des exemples des fonctions non-mesurables $f(x)$, $\varphi(x)$ vérifiant (1). Remarquons dans ce but que, *$h(x)$ étant une solution de l'équation bien connue de* Hamel:

$$h(x+y) = h(x) + h(y), \tag{17}$$

et $f(x)$, $\varphi(x)$ satisfaisant à (1), les fonctions $F(x) = f[h(x)]$, $\Phi(x) = \varphi[h(x)]$ y satisfont aussi.

Ceci posé, soit pour fixer l'idée, $f(x) = \cos x$, $\varphi(x) = 2\cos\frac{x}{2}$, (ces fonctions vérifiant, d'après § 6, l'équation (1)), et soit $h(x)$ une solution non-mesurable de (17). D'après le précédent, les fonctions $F(x) = \cos h(x)$, $\Phi(x) = 2\cos\frac{h(x)}{2}$ nous fournissent un exemple d'une solution non mesurable de (1). Ce même exemple montre qu'il en existe des solutions non mesurables qui sont en même temps bornées.

Il n'en est plus de même, lorsqu'on suppose, dans (1), $\varphi(x)$ mesurable. On prouve qu'alors, toute solution $f(x)$ de (1), qui est bornée, ou même qui peut être majorée par une fonction mesurable, est aussi mesurable [1]).

Remarquons encore, que $G(x)$ étant une solution commune des équations

$$G(x) + G(y) = G(x+y), \quad G(x) \,.\, G(y) = G(xy),$$

les fonctions

$$F(x) = G[f(x)], \quad \Phi(x) = G[\varphi(x)]$$

satisfont à (1) [2])

[1]) Cette remarque est due à M. Saks.

[2]) C'est M. Ruziewicz qui a voulu bien me communiquer cette remarque.