Sur les faisceaux des tangentes à une courbe.

Par

S. Saks et A. Zygmund (Varsovie).

1. Un ensemble plan C sera dit une *courbe*, lorsque une correspondance *univoque*

$$(1) \qquad p = p(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

sera établie entre les points d'un intervalle (a, b) et ceux de l'ensemble C. Une courbe peut d'ailleurs admettre des points *multiples*, la correspondance (1) étant, par définition, univoque, mais pas nécessairement *biunivoque*.

Nous dirons que la courbe C admet en un point $p = p(t)$ une *tangente à droit* (resp. *à gauche*), si la droite passant par les points $p = p(t)$ et $p = p(t+h)$ tend vers une position déterminée, lorsque h tend vers 0 par les valeurs positives (resp. négatives); la droite limite, (losqu'elle existe) sera dite, par definition, une *tangente à droite* (resp. *à gauche*[1])).

2. Pour la commodité du lecteur, nous allons citer deux énoncés qui sont dus à M. Lusin[2]) et dont nous ferons l'usage plus loin:

(L_1) $f_E(x)$[3]) étant une fonction quelconque possédant ses quatre nombres dérivés de Dini finis dans un ensemble $E_1 \subset E$ de mesure nulle, l'ensemble de valeurs admises par la fonction aux points de E_1 est de mesure nulle.

(L_2) $f_E(x)$ étant une fonction quelconque admettant en tous les points d'un ensemble $F_1 \subset E$ la dérivée unique égale à 0, l'ensemble-

[1]) par conséquent, lorsque (1) fait correspondre à tous les points d'un intervalle $(t, t+h)$ $(h>0)$ un seul point $p \varepsilon C$, toute droite passant par ce point doit être régardée comme une tangente à droit.

[2]) N. Lusin. *L'intégrale et la série trigonométrique* (en russe). Moscou, 1914. pp. 104—109; cf. aussi: *Fund. Math.* t. VI p. 111.

[3]) E étant un ensemble $f_E(x)$ désigne une fonction qui (ainsi que ses nombres dérivés) n'est envisagée qu'aux points de E.

ble des valeurs admises par la fonction aux points de E_1 est de mesure nulle.

3. **Théorème.** *Une courbe C étant donnée dans le plan, tout faisceau F des droites tangentes (de l'un ou des deux côtés) à cette courbe est de mesure nulle*[1], *sauf, peut-être, le cas où le sommet du faisceau se trouve sur la courbe envisagée*[2]).

Démonstration: soit, pour fixer l'idée, donné dans le plan un faisceau F des droites tangentes à droite à la courbe C et dont le sommet se trouve hors de C. On peut supposer, sans restreindre la généralité de l'énoncé, que les droites appartenant à F soient parallèles; car, dans le cas contraire, le sommet de F peut être rejeté à l'infini par une transformation homographique, transformant, comme on sait, les ensembles de mesure nulle en ceux de même mesure.

Ceci étant, on peut établir dans le plan le système des coordonnées de façon que la direction de l'axe de x coïncide avec celle du faisceau F. Soient $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ les équations de la courbe C par rapport à ce système. Désignons par P l'ensemble des points de C où une tangente à droite existe et est parallèle à l'axe de x; par X, resp. Y, nous désignons l'ensemble des abscisses, resp. des ordonnées, des points de P. Il suffit, pour que notre énoncé soit justifié, de montrer que l'ensemble Y est de mesure nulle.

Soit T l'ensemble des valeurs de t correspondant aux points de P. On a donc, pour tout $t \varepsilon T$:

$$\text{(2)} \qquad \lim \frac{y(t+h) - y(t)}{x(t+h) - x(t)} = 0, \text{ lorsque } h \to +0.$$

Désignons par T_n (n étant un nombre naturel quelconque) l'ensemble des valeurs $t \varepsilon T$ où, pour chaque t',

$$\text{(3)} \qquad \text{la relation } \; 0 < t' - t < \frac{b-a}{n}$$

entraîne: $$|y(t') - y(t)| \leqslant |x(t') - x(t)|.$$

[1]) nous entendons par là que l'ensemble somme des droites appartenant au faisceau est de mesure plane nulle, ou, ce qui équivaut, que l'ensemble des points d'intersection des droites du faisceau avec une droite quelconque ne passant pas par le centre du faisceau, est de mesure *linéaire* nulle.

[2]) Ce cas exceptionnel peut être d'ailleurs précisé de la façon suivante: le centre O de F se trouvant sur C, pour que l'énoncé du texte reste valable, il faut et il suffit que la famille des droites tangentes à C au point O soit de mesure nulle.

Nous désignerons ensuite par P_n, X_n, Y_n des sous-ensembles de P, X, Y resp., qui correspondent à T_n.

Divisons l'intervalle (a, b) en n sous-intervalles égaux et n'empiétant pas: $l_1, l_2, \ldots, l_n$ et posons: $T_{nm} = T_n \times l_m (m = 1, 2, \ldots, n)$. Comme précédemment, on désignera par P_{nm}, X_{nm}, Y_{nm} des sous-ensembles de P_n, X_n, Y_n homologues de T_{nm}.

Envisageons l'un quelconque des ensembles T_{nm}. D'après (3):

(4) $t', t'' \varepsilon T_{nm}$ entraîne: $|y(t'') - y(t')| \leqslant |x(t') - y(t'')|$.

Donc, en particulier: $x(t') = x(t'')$ implique l'égalité analogue: $y(t') = y(t'')$. Par conséquent, à tout point $x \varepsilon X_{nm}$ correspond un seul point $y \varepsilon Y_{nm}$ (bien que, le point x puisse correspondre à plusieurs valeurs de $t \varepsilon T$); donc, l'ensemble P_{nm} peut être regardé comme l'image d'une fonction $y = f_{X_{nm}}(x)$ déterminée aux points de l'ensemble X_{nm}.

De plus, on conclut de (4), que la fonction $y = f_{X_{nm}}(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz, et que, parsuite, d'après le théorème bien connu de M. Lebesgue, elle est dérivable presque partout dans X_{nm}.

Désignons par X'_{nm} l'ensemble des points $x \varepsilon X_{nm}$ où la dérivée unique $f'_{X_{nm}}(x)$ existe, et soit $X''_{nm} = X_{nm} - X'_{nm}$. Par Y'_{nm}, Y''_{nm} nous désignerons resp. les ensembles des points $y = f_{X_{nm}}(x)$ correspondant.

D'après ce qui précède: $|X''_{nm}| = 0$ [2]), et parsuite, en vertu du théorème (L_1) de M. Lusin, on a aussi:

(5) $$|Y''_{nm}| = 0,$$

la fonction $f_{X_{nm}}(x)$ vérifiant la condition de Lipschitz, donc admettant tous ses nombres dérivés finis.

Envisageons, à son tour, les ensembles X'_{nm}, Y'_{nm}. Nous prouverons que, à un ensemble dénombrable des points près, la dérivée $f'_{X_{nm}}(x)$ s'annule aux points de X'_{nm}.

Faisons à ce but, correspondre à chaque point $x \varepsilon X'_{nm}$ une valeur $t = t_x \varepsilon T_{nm}$ telle que $x = x(t_x)$ [1]). Nous dirons, pour simplifier

[1]) Nous y faisons recours à l'axiome de M. Zermelo. On en pourrait bien se débarasser dans ce point de la demonstration, par la modification convenable du raisonnement Mais, on n'éviterait pas entièrement des choix arbitraires qui interviennent essentiellement dans toute la théorie de la mesure et, par conséquent, dans notre démonstration. On peut trouver l'analyse détaillée de ces questions, très délicates, dans le Mémoire de M. Sierpiński: *L'axiome de M. Zermelo*, (Bull. Acad. Cracovie 1918).

[2]) E étant un ensemble, $|E|$ désigne sa mesure extérieure.

le langage, que le point $x \varepsilon X_{nm}$ satisfait à la condition (A), lorsque δ désignant un nombre positif quelconque, il existe des points $x' \varepsilon X'_{nm}$, tels que

$$(6) \qquad \begin{cases} 0 < |x' - x| < \delta \quad \text{et} \\ 0 < t_{x'} - t_x < \delta \end{cases}$$

Nous désignons par $\overline{X'_{nm}}$ l'ensemble des points de X'_{nm} vérifiant la condition (A) et par $\overline{\overline{X'_{nm}}}$ l'ensemble des autres points de X_{nm}. Les symboles $\overline{Y'_{nm}}$, Y'_{nm} resp. désigneront les ensembles de $y = f_{x_{nm}}(x)$ correspondants.

Nous affirmons que $\overline{\overline{X'_{nm}}}$ est au plus, dénombrable.

En effet, envisageons l'ensemble H des couples (x, t_x), où x parcourt les points de X'_{nm}. En regardant tout couple (x, t_x) comme celui de coordonnées d'un point situé dans le plan, et tenant compte de la correspondance biunivoque établie entre les $x \varepsilon X'_{nm}$ et les t_x, on voit aisément qu'un point x ne vérifiant pas la condition (A), le point y correspondant $(x, t_x) \varepsilon H$ est isolé supérieurement dans H, c.-à.-d. qu'il est isolé par rapport à la partie de H qui est contenue dans le demi-plan $t \geqslant t_x$. Or, on sait, d'après les théorème connu [1]) de la Théorie d'Ensembles, que l'ensemble de tels points de H, est, au plus, dénombrable. Cela revient à dire que l'ensemble $\overline{\overline{X'_{nm}}}$ et, en même temps Y'_{nm}, sont au plus denombrables. Donc, à plus forte raison

$$(7) \qquad |\overline{\overline{Y'_{nm}}}| = 0.$$

Il reste à examiner les ensembles $\overline{X'_{nm}}$, $\overline{Y'_{nm}}$. Chaque point $x \varepsilon \overline{X'_{nm}}$ satisfaisant, par définition, à la condition (A), on voit aisément, d'après (6) et (2), que la fonction $y = f_{x_{nm}}(x)$ y admet un nombre dérivé médian égal à 0. On sait, d'autre part, qu'en chaque point $x \varepsilon X'_{nm} \supset \overline{X'_{nm}}$ la fonction envisagée possède la dérivée unique. Par conséquent, cette dérivée est, elle-même, aussi égale à 0.

Ceci étant, on conclut, d'après le théorème (L_2) [2]), que l'ensemble des valeurs admises par la fonction $y = f_{x_{nm}}(x)$ aux points de X'_{nm} est de mesure nulle, c.-à.-d. que

$$(8) \qquad |Y'_{nm}| = 0.$$

Or, on a:

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} Y_{nm},$$

[1]) Voir: W. H. and G. C. Young. *Proc. Lond. Math. Soc.* Ser. 2, Vol. 16, p. 5.

[2]) v. § 2.

et

$$Y_{nm} = Y'_{nm} + Y''_{nm} = Y'_{nm} + \overline{Y'_{nm}} + \overline{Y''_{nm}},$$

donc, en tenant compte de (5), (7), (8), on revient à l'égalité:

$$|Y| = 0$$

qui justifie notre théorème.

4. Le théorème du § précédent démontré, on en peut déduire tout de suite la solution du problème suivant posé par M. Ruziewicz [1]): *une fonction $f(x)$ quelconque (mesurable, ou non) étant donnée, quelle est la mesure de l'ensemble de tous les points x tels que*

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \infty? \tag{9}$$

On prouve que l'ensemble en question est de mesure nulle.

En effet, en regardant l'image de la fonction $y = f(x)$ comme la courbe $x = t$, $y = f(t)$, on voit qu'en tout point où l'égalité (9) subsiste, la tangente à la courbe existe et est parallèle à l'axe de y. Par conséquent, en vertu du théorème du § 3, le faisceau de ces tangentes est de mesure nulle, ce qui équivaut à dire que l'ensemble des valeurs de x correspondant est aussi de mesure nulle.

5. On voit aisément que le raisonnement du § 4 reste valable, même lorsqu'on suppose que la relation (9) ne soit vérifiée que d'un seul côté de x (p. ex. du côté droit, c.-à.-d. pour h tendant vers 0 par des valeurs positives). Par conséquent, notre théorème (§ 3) peut être regardé comme une généralisation géométrique du théorème connu d'après lequel *l'ensemble des points x, où une fonction $f(x)$ quelconque admet deux nombres dérivés de Dini d'un côté égaux et infinis, est de mesure nulle* [2]).

[1]) *Fund. Math.* 1924. t. V. p. 338.

[2]) Cette proposition a été prouvée d'abord par MM. Lusin et Denjoy, pour les fonctions continues, et puis, généralisée par Mme G. C. Young (C. R. 1916) aux fonctions mesurables. C'est ensuite M. Banach qui a donné à ce théorème une démonstration valable pour toutes les fonctions, même non-mesurables (C. R. 1921, t. 163).