Sur un théorème de M. Lusin.

Par

S. Saks (Varsovie).

1. M. N. Lusin a démontré en 1915 [1]) que *l'ensemble des valeurs admises par une fonction aux points où la dérivée unique existe et est égale à 0, est de mesure nulle.* Le but de cette Note est de prouver qu'on peut remplacer dans l'énoncé cité le mot „la dérivée unique", par „un nombre dérivé quelconque de Dini".

Je vais préciser d'abord les notations.

E étant un ensemble des points, je désigne par $f_E(x)$ une fonction qui n'est considérée que dans les points de l'ensemble E. $f^+_E(x)$, $f^-_E(x)$, $f_{\underset{E}{+}}(x)$, $f_{\underset{E}{-}}(x)$ denotent les quatre nombres de Dini de la fonction $f_E(x)$, considérés relativement à l'ensemble E.

$|E|$ désigne (conformément à la notation due à M. Banach) la mesure extérieure de l'ensemble E.

2. Lemme. Une fonction $\overset{*}{x} = f_E(x)$, étant déterminée dans un ensemble E des points x et possédant en tout point d'un ensemble $A \subset E$ un des nombres dérivés de Dini inférieur en valeur absolue à un nombre fini N, l'ensemble $\overset{*}{A}$ des valeurs qu'elle admet aux points de l'ensemble A est de mesure extérieure au plus égale à $7N.|A|$.

Démonstration: Supposons, pour fixer l'idée, que c'est le nombre dérivé $f_+(x)$ [2]) qui satisfait à la condition de notre énoncé,

[1]) N. Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique* (en russe) 1915. p. 105.

[2]) nous supprimons, pour simplifier l'écriture, l'indice E dans la notation $f_{\underset{E}{+}}(x)$, la fonction $f(x)$ n'étant pas dans notre raisonnement envisagée qu'aux points de E,

c.-à.-d. que

(1) $x \varepsilon A$ entraîne: $|f_+(x)| < N$, donc $f_+(x) > -N$.

Soit A_n l'ensemble des points $x \varepsilon A$, tels que

(2) $$x' \varepsilon E \text{ et } 0 < x' - x < \frac{|l|}{n},$$

où l désigne l'intervalle [1] contenant E, impliquent:

(3) $$f(x') - f(x) > -N(x'-x).$$

En vertu de (1), on a:

(4) $$\begin{cases} A_n \subset A_{n+1}, \text{ pour toute valeur de l'indice } n, \text{ et} \\ \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A. \end{cases}$$

Convenons ensuite d'appeler, en général, par $\overset{*}{a}$ la valeur de $f(x)$ admise au point $x = \overset{*}{a}$, et, de même, par $\overset{*}{H}$ l'ensemble des valeurs de $\overset{*}{x}$ que la fonction $\overset{*}{x} = f(x)$ fait correspondre à un ensemble $H \subset E$ des points x.

Cela posé, soit ε un nombre positif quelconque; partageons l'intervalle l en n sous-intervalles égaux et n'empiétant pas, $l_1, l_2, \ldots, l_n$, et posons: $A_{nm} = A_n \times l_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$. On peut faire correspondre à chaque A_{nm} un ensemble ouvert D_m tel que $D_m \supset A_{nm}$ et

(5) $$|D_m| < |A_{nm}| + \frac{\varepsilon}{14N \cdot n}$$

On peut encore, en vertu de (1), assigner à tout $x \varepsilon A_{nm}$ une suite des intervalles $(x, a_k(x))$ contenus dans D_m et assujettis aux conditions suivantes:

(6) $$\begin{cases} 1^0 \quad a_k(x) > x, \qquad 2^0 \quad a_k(x) \,\varepsilon\, E \times l_m, \qquad 3^0 \quad \lim\limits_{k\to\infty} a_k(x) = x, \\ \qquad 4^0 \quad |\overset{*}{a}_k(x) - \overset{*}{x}| < N[a_k(x) - x]. \end{cases}$$

Il s'ensuit de 3° et 4° que pour x fixe, $|\overset{*}{a}_k(x) - \overset{*}{x}|$ tend vers 0 avec $1/k$. Donc, en vertu du théorème bien connu de M Vitali [2])

[1]) il est permis évidemment de supposer que cet intervalle est fini.

[2]) *voir* p. ex.: Carathéodory. *Vorl. ueber reelle Functionen.* 1918. p. 304. Banach: *Fund. Math.* t. V. p. 130.

On peut aussi appliquer, dans notre raisonnement, au lieu du théorème de M. Vitali, le *lemme métrique* de M. Sierpiński (*Fund. Math.* t. IV. p. 201).

il existe un système fini $\{(\overset{*}{x}_i, \overset{*}{a}_{k_i}(x_i))\}(i=1,2,\ldots,p)$ des intervalles n'empiétant pas et satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(7)\quad \begin{cases} 1^\circ & \overset{*}{x}_i \varepsilon \overset{*}{A}_{nm}, \\ 2^\circ & |\overset{*}{A}_{nm}| - \dfrac{\varepsilon}{2n} \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{p} |\overset{*}{b}_i - \overset{*}{x}_i|, \\ 3^\circ & |\overset{*}{b}_i - \overset{*}{x}_i| < N(b_i - x_i), \end{cases}$$

où nous avons posé pour simplifier l'écriture: $b_i = a_{k_i}(x_i)$, $\overset{*}{b}_i = \overset{*}{a}_{k_i}(x_i)$; l'inégalité ($3^0$) est assurée par ($5$; 4^0).

Soit maintenant (x_h, b_h), (x_k, b_k) [1]) deux intervalles quelconques de ceux envisagés par nous; désignons par $s(h,k)$ le plus grand de deux nombres $|b_h - x_h|$, $|b_k - x_k|$, et par $d(h,k)$ la distance des intervalles correspondant $(\overset{*}{x}_h, \overset{*}{b}_h)$, $(\overset{*}{x}_k, \overset{*}{b}_k)$. Je dis que lorsque les intervalles (x_h, b_h), (x_k, b_k) empiètent l'un sur l'autre, on a:

$$(8)\qquad d(h,k) \leqslant 2N \cdot s(h,k).$$

Pour le montrer, supposons que l'intervalle $(\overset{*}{x}_h, \overset{*}{b}_h)$ précède $(\overset{*}{x}_k, \overset{*}{h}_k)$. On a donc, ces intervalles n'empiétant pas:

$$(9)\qquad \overset{*}{b}_h \leqslant \overset{*}{x}_k, \text{ donc: } \overset{*}{b}_h - \overset{*}{x}_k \leqslant 0.$$

D'autre part, lorsque les intervalles (x_h, b_h), (x_k, b_k) empiètent l'un sur l'autre, on a:

$$(10)\qquad x_k < b_h$$

et

$$(11)\qquad 2s(h,k) > b_h - x_k.$$

Or, $x_h \varepsilon A_{nm} \subset A$ et les points x_k, b_h étant contenus, tous deux, dans l'intervalle l_{nm}, dont la longueur est égale à $|l|/n$, on a, en vertu de (10), (2) et (3)

$$\overset{*}{b}_h - \overset{*}{x}_k > -N(b_h - x_k),$$

donc, en tenant compte de (9) et (11):

[1]) il est à remarquer qu'on ne sait rien sur l'ordre des points $(\overset{*}{x}_k, \overset{*}{b}_k)$, bien qu'on sache que $x_k < b_k$.

$$d(h, k) \leqslant |\overset{*}{b}_h - \overset{*}{x}_k| < N.(b_h - x_k) < 2s(h, k),$$

ce qui prouve notre assertion.

La formule (8) ainsi établie, nous allons déterminer une suite finie des intervalles $\{\delta_i\}$; soit notamment δ_1 le plus grand des intervalles (x_i, b_i) [1]; les intervalles $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ déterminés, δ_{k+1} soit, par définition, le plus grand des intervalles (x_i, b_i) différant de δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_k$ et n'y empiètant pas; lorsqu'il n'y a pas de tels intervalles (x_i, b_i), δ_k est regardé comme le dernier terme de la suite $\{\delta_i\}$. On voit aisément que, le système de tous les intervalles étant fini, il en est de même, à plus forte raison, de la suite $\{\delta_k\}$; l'indice k parcourt donc un nombre fini des valeurs, soit $k=1, 2, \ldots, r$.

Faisons correspondre à chaque δ_k un système des intervalles Δ_k d'après la loi suivante: pour $k=1$ on forme $\Delta_k=\Delta_1$ par la réunion de l'intervalle δ_1 et de tous ceux des intervalles (x_i, b_i) qui y empiètent; $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ $(k<r)$ supposés déterminés, on forme Δ_{k+1} par la réunion de δ_{k+1} et de tous les intervalles (x_i, b_i) qui n'appartiennent à $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_k$ et qui empiètent sur δ_{k+1}. Les familles des intervalles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ sont ainsi déterminées par l'induction et on voit facilement qu'elles contiennent ensemble tous les intervalles (x_i, b_i).

Désignons maintenant par $\overset{*}{\Delta}_k$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ l'ensemble de tous les intervalles $(\overset{*}{x}_i, \overset{*}{b}_i)$ qui correspondent à ceux de Δ_k. δ_k étant le plus grand des intervalles de Δ_k, il s'ensuit de (7; 3°) que tout intervalle de $\overset{*}{\Delta}_k$ est de longueur inférieure à $N.|\delta_k|$, et de (8) que la distance d'un tel intervalle à $\overset{*}{\delta}_k$ [2] est au plus égale à $2N.|\delta_k|$. On en conclut aisément qu'on peut placer tout le système $\overset{*}{\Delta}_k$ dans un segment de longueur $7N\ |\delta_k|$, donc, à plus forte raison:

$$(12) \qquad |\overset{*}{\Delta}_k| \leqslant 7N.|\delta_k| \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Les intervalles δ_k étant, d'après leur définition, sans points intérieurs communs, et contenus, ainsi que tous les (x_i, b_i), dans D_m, on déduit de (12), en vertu de (7; 2°) et (5):

[1] il peut se présenter d'ailleurs qu'il en existe plusieurs qui sont, parsuite, égaux; on peut alors choisir un intervalle quelconque.

[2] $\overset{*}{\delta}_k$ signifie intervalle $(\overset{*}{x}_i, \overset{*}{b}_i)$ correspondant à δ_k.

$$|\overset{*}{A}_{nm}| - \frac{\varepsilon}{2n} \leqslant \sum_{i=1}^{p} |\overset{*}{b}_i - \overset{*}{x}_i| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |\overset{*}{\Delta}_k| \leqslant 7N \sum_{k=1} |\delta_k| \leqslant$$

$$\leqslant 7N . |D_m| \leqslant 7N . |A_{nm}| + \frac{\varepsilon}{2n},$$

donc

$$|\overset{*}{A}_{mn}| \leqslant 7N . |A_{mn}| + \frac{\varepsilon}{n},$$

d'où:

$$|\overset{*}{A}_n| \leqslant \sum_{m=1}^{n} |\overset{*}{A}_{nm}| \leqslant N . \sum_{m=1}^{n} |A_{nm}| + \varepsilon = 7N . |A_n| + \varepsilon.$$

En tenant compte de (4), on en tire de suite, par le passage à la limite pour $n \to \infty$:

$$|\overset{*}{A}| \leqslant 7N \; |A| + \varepsilon.$$

ε étant un nombre positif quelconque, on en conclut:

$$|\overset{*}{A}| \leqslant 7N \; |A|,$$

ce qui achève notre démonstration.

3. On déduit aussitôt du lemme du § précédent les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. *Une fonction $\overset{*}{x} = f_E(x)$ admettant en tout point d'un ensemble $A \subset E$ un des quatre nombres dérivés de Dini égal à 0, l'ensemble des valeurs correspondantes de $f_E(x)$ est de mesure nulle.*

D é m o n s t r a t i o n: on peut évidemment supposer qu'en tout point $x \varepsilon A$ un dérivé de côté et de rang fixe p. ex. $f_+(x)$, s'annule; on a alors pour tout nombre naturel n $|f_+(x)| < 1/n$, donc. d'après notre lemme,

$$|\overset{*}{A}| \leqslant 7/n |\overset{*}{A}|, \text{ d'où: } |A| = 0. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 2. *Une fonction $\overset{*}{x} = f_E(x)$ possédant en tout point d'un ensemble $A \subset E$ de mesure nulle un nombre dérivé de Dini fini, l'ensemble des valeurs correspondantes de $f_E(x)$ est aussi de mesure nulle.*

D é m o n s t r a t i o n: on peut supposer, comme plus haut, que c'est un nombre dérivé bien déterminé, p. ex. $f_+(x)$, qui est fini en tout point de A. Désignons par A_n l'ensemble des points $x \varepsilon A$

8*

où $|f_+(x)| < n$. Soit enfin, $\overset{*}{A}$, $\overset{*}{A}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ les ensembles des valeurs de la fonction considérée correspondant à A, A_n respectivement. On a:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \overset{*}{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{*}{A}_n, \quad |A_n| = 0;$$

donc, d'après notre lemme:

$$|\overset{*}{A}| = \sum_{n=1}^{\infty} |\overset{*}{A}_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 7n \,.\, |A_n| = 0,$$

ce qui prouve notre théorème.

4. Remarquons encore que le lemme du § 2, peut être précisé de la manière suivante:

une fonction mesurable $f(x)$ admettant en tout point d'un ensemble mesurable A un des nombres de Dini, de côté et de rang inconnus et variables soit $\lambda(x)$, fini, on a:

$$|\overset{*}{A}| \leqslant \int_A |\lambda(x)|$$ [1],

où A désigne, comme précédemment, l'ensemble des valeurs de $f(x)$ pour $x \varepsilon A$.

Nous omettons la démonstration de ce théorème qui engendre simultanément les deux énoncés du § précédent (pour le prouver, on peut faire recours aux théorèmes bien connus de Mme G. C. Young et de M. Denjoy[2]) sur les relations qui subsistent entre les nombres dérivés des fonctions).

[1]) cette intégrale peut être d'ailleurs infinie positive.

[2]) cf. p. ex. *Fund. Math.* t. V. p. 98.