Une définition topologique des ensembles G_δ.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

On appelle, d'après M. Hausdorff, G_δ les ensembles qui sont produits d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts (ce sont les ensembles F de classe $\leqslant 1$ de M. Lebesgue). En 1916 M. Mazurkiewicz a démontré [1]) que tout ensemble homéomorphe d'un G_δ est un G_δ, et ce résultat a imposé le problème de caractériser les ensembles G_δ d'une façon intrinsèque (c'est-à-dire ne faisant aucun usage de la partie restante de l'espace), problème qui est résolu seulement récemment par M. Alexandroff [2]). Dans le même ordre d'idées nous démontrerons ici le théorème suivant:

Théorème. *Pour qu'un ensemble E, situé dans un espace à m dimensions, soit un G_δ, il faut et il suffit qu'il existe une famille dénombrable $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles de E, ouverts dans E* [3]) *et tels que*

1) *tout point p de E est un produit d'une suite descendente* [4]) *et convergente vers p* [5]) *d'ensembles de la famille $\mathfrak{F}$.*

2) *toute suite descendente d'ensembles distincts de la famille $\mathfrak{F}$ converge vers un point de E.*

Démonstration. Soit E un ensemble satisfaisant aux condi-

[1]) S. Mazurkiewicz: *Über Borelsche Mengen*, Bull. Acad. Cracovie 1916, p. 490—494.

[2]) P. Alexandroff: *Comptes Rendus* t. 178, p. 185 (note du 7 janvier 1924).

[3]) Un sous-ensemble E_1 de E est dit *ouvert dans* E, s'il ne contient aucun point d'accumulation de l'ensemble $E-E_1$.

[4]) Une suite d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \dots$ est dite descendente, si l'on a $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$

[5]) On dit qu'une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \dots$ de sous-ensembles de E converge vers un point p de E, si tout ensemble ouvert dans E et contenant p contient tous les E_n, sauf peut être un nombre fini d'eux.

tions de notre théorème. Soit p un point de E, n un nombre naturel donné. D'après 1) il existe un ensemble $E_n(p)$ de la famille $\mathfrak{F}$, tel que

$$p \varepsilon E_n(p) \quad \text{et} \quad \delta(E_n(p)) < \frac{1}{n}, \tag{1}$$

$\delta(E_n)$ désignant le diamètre de l'ensemble E_n.

L'ensemble $E_n(p)$ étant ouvert dans E, il existe, d'après $p \varepsilon E_n(p)$ une sphère ouverte $S_n(p)$, ayant p pour centre, de rayon $< 1/n$, et telle que

$$E \, . \, S_n(p) \subset E_n(p). \tag{2}$$

Posons

$$G_n = \sum_{p \varepsilon E} S_n(p), \tag{3}$$

la sommation s'étendant à tous les points p de E; les ensembles G_n $(n=1, 2, \ldots)$ seront évidemment ouverts. Je dis que

$$E = G_1 G_2 G_3 \ldots \tag{4}$$

Il s'ensuit immédiatement de la définition des ensembles G_n que $E \subset G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, donc $E \subset G_1 G_2 G_3 \ldots$: il suffira donc de prouver que

$$E \supset G_1 G_2 G_3 \ldots \tag{5}$$

Soit donc q un point de l'ensemble $G_1 G_2 G_3 \ldots$, Nous avons donc $q \varepsilon G_1$ et il existe, d'après (3), un point p_1 de E, tel que $q \varepsilon S_1(p)$. Le point q est intérieur à la spère $S_1(p_1)$: soit δ_1 sa distance de la surface de cette sphère, et soit n_2 un indice, tel que $\frac{2}{n_2} < \delta_1$. D'après $q \varepsilon G_{n_2}$ et (3), il existe un point p_2 de E, tel que $q \varepsilon S_{n_2}(p_2)$. Le point p_2 étant centre de la sphère $S_{n_2}(p_2)$ dont le rayon est $< \frac{1}{n_2}$, nous en trouvons $\varrho(q, p_2) < \frac{1}{n_2}$; or, d'après (1), $p \varepsilon E_{n_2}(p_2)$ et $\delta(E_{n_2}(p_2)) < \frac{1}{n_2}$. Soit p un point de $E_{n_2}(p_2)$: nous aurons donc $\varrho(p, p_2) < \frac{1}{n_2}$ et parsuite

$$\varrho(p, q) \leqslant \varrho(p, p_2) + \varrho(q, p_2) < \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{n_2} < \delta_1,$$

ce qui prouve que p est intérieur à la sphère $S_1(p_1)$. Par conséquent $E_{n_2}(p_2) \subset S_1(p_1)$; or, $E_{n_2}(p_2)$ étant un ensemble de la famille $\mathcal{F}$, nous avons $E_{n_2}(p_2) \subset E$, et d'après (2), $E \cdot S_1(p_1) \subset E_1(p_1)$: il en résulte que $E_{n_2}(p_1) \subset E_1(p_1)$.

Le point q est intérieur à la sphère $S_{n_2}(p_2)$: soit δ_2 sa distance de la surface de cette sphère et soit n_3 un indice $> n_2$, tel que $\frac{2}{n_2} < \delta_2$. Comme plus haut, nous trouverons $q \varepsilon S_{n_3}(p_3)$, où $p_3 \varepsilon E$, $\varrho(q, p_3) < \frac{1}{n_3}$ et $E_{n_3}(p_3) \subset E_{n_2}(p_2)$. En raisonnant ainsi de suite, nous arrivons à une suite infinie d'ensembles

$$(6) \qquad E_{n_2}(p_2), E_{n_3}(p_3), \ldots, \quad (n_1 < n_2 < \ldots)$$

tels que

$$E_{n_2}(p_2) \supset E_{n_3}(p_3) \supset \ldots$$

$$(7) \qquad p_s \varepsilon E_{n_s}(p_s) \quad \text{et} \quad \varrho(q, p_s) < \frac{1}{n_s} \qquad (s = 2, 3, \ldots).$$

D'après (1), les diamètres des ensembles (6) tendent vers 0: il y en a donc entre eux une infinité qui sont distincts: d'après la propriété 2), la suite d'ensembles (6) converge donc vers un point p de E, et il résulte de (7) que $q = p$, donc $q \varepsilon E$. La formule (5), et parsuite aussi la formule (4) est ainsi établie.

L'ensemble E est donc un G_δ, ce qui prouve que les conditions de notre théorème sont suffisantes.

Nous allons maintenant à démontrer que les conditions de notre théorème sont nécessaires. Pour abréger l'écriture nous donnerons la démonstration pour le cas du plan: la démonstration pour l'espace à un nombre quelconque de dimensions serait tout à fait analogue.

Soit n un nombre naturel donné. Les droites $x = \frac{k}{2^n}$ et $y = \frac{l}{2^n}$ (k, l entiers) décomposent le plan en carrés de côtés $\frac{1}{2^n}$: désignons par $\mathcal{A}_n$ l'ensemble de ces carrés. Pareillement désignons par $\mathcal{B}_n$ l'ensemble de carrés qu'on obtient en décomposant le plan par les droites $x = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{3}$, $y = \frac{l}{2^n}$ (k, l entiers), par $\mathcal{C}_n$ l'ensemble de carrés qu'on obtient en considérant les droites $x = \frac{k}{2^n}$, $y = \frac{l}{2^k} + \frac{1}{3}$, et par

$\mathcal{D}_n$ l'ensemble de carrés déterminés par les droites $x=\frac{k}{2^n}+\frac{1}{3}$, $y=\frac{l}{2^n}+\frac{1}{3}$. On voit sans peine que, pour tout n naturel donné, tout point du plan est intérieur à au moins un carré de la famille $\mathcal{K}_n=\mathcal{A}_n+\mathcal{B}_n+\mathcal{C}_n+\mathcal{D}_n$.

Posons encore $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\dots$, définissons d'une façon analogue les familles $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, et posons $\mathcal{K}=\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{C}+\mathcal{D}$: ce sera évidemment une famille dénombrable de carrés. On voit sans peine que si $K_1, K_2, K_3, \dots$ est une suite infinie descendente de carrés distincts de la famille $\mathcal{K}$, les diamètres des carrés $K_p\,(p=1,2,\dots)$ tendent vers 0 pour $p=\infty$.

Soit maintenant E un ensemble G_δ donné: nous pouvons donc écrire $E=G_1G_2G_3\dots$, où $G_n\,(n=1,2,\dots)$ est une suite descendente d'ensembles ouverts. L'indice n étant donné, désignons par $\mathcal{M}_n$ l'ensemble de tous les carrés de $\mathcal{A}$ dont les côtés sont $<1/2^n$, qui sont, avec ses frontières, contenus dans G_n et qui ne sont contenus dans aucun autre carré de $\mathcal{A}$ de côtés $<1/2^n$ et contenu avec sa frontière dans G_n. D'une façon analogue définissons les familles des carrés $\mathcal{N}_n$, $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{Q}_n$. en substituant resp. les familles $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ au lieu de $\mathcal{A}$, et posons $\mathcal{L}_n=\mathcal{M}_n+\mathcal{N}_n+\mathcal{P}_n+\mathcal{Q}_n$. On voit sans peine que la somme des intérieurs des carrés constituant $\mathcal{L}_n$ est l'ensemble G_n.

La famille $\mathcal{L}_n$ est évidemment au plus dénombrable: désignons par $K_n^1, K_n^2, K_n^3, \dots$ les intérieurs des carrés appartenant à $\mathcal{L}_n$ et soit $\mathcal{F}$ la famille de tous les ensembles K_n^mE, où m et n sont naturels. D'après $K_n^m\varepsilon\mathcal{L}_n$ et d'après la définition de $\mathcal{L}_n$ nous avons $\delta(K_n^m)<1/2^n$ (pour $m=1,2,\dots$). Or, K_n^m étant ouverts, les ensembles K_n^mE sont ouverts dans E. D'après $K_n^1+K_n^2+\dots=G_n$ et $EG_n=E$, nous trouvons $K_n^1E+K_n^2E+\dots=E$. Donc, pour tout point p de E et tout n naturel il existe un indice m_n, tel que $p\varepsilon K_n^{m_n}E$. Les ensembles K_n^mE étant ouverts dans E et $\delta(K_n^{m_n}E)<1/2^n$, on en déduit qu'on peut extraire de la suite d'ensembles $K_n^{m_n}\,(n=1,2,\dots)$ une suite descendente. La propriété 1) est ainsi établie.

Or, soit $E_1, E_2, E_3, \dots$ une suite decendente d'ensembles distincts de $\mathcal{F}$. p. e. $E_k=K_{n_k}^{m_k}E\,(k=1,2,\dots)$: les carrés $K_{n_k}^{m_k}\,(k=1,2,\dots)$ sont donc distincts et ils appartiennent à la famille $\mathcal{K}=\mathcal{A}+\mathcal{B}+$ $+\mathcal{C}+\mathcal{D}$. On peut donc extraire de la suite E_n une autre telle — désignons la encore par E_k — que tous les carrés $K_{n_k}^{m_k}$ appartiennent à la même des familles $\mathcal{A}$. $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. $\mathcal{D}$. La suite E_k étant descendente, nous avons $E_k \supset E_{k+1}$, donc $K_{n_k}^{m_k} E \supset K_{n_{k+1}}^{m_{k+1}} E$, ce qui entraîne $K_{n_k}^{m_k} \supset K_{n_{k+1}}^{m_{k+1}}$, puisque deux carrés ouverts de la famille $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$) qui ont un point commun, sont contenus l'un dans l'autre (et puisque il ne peut être $K_{n_{k+1}}^{m_{k+1}} \supset K_{n_k}^{m_k}$, l'ensemble E_{k+1} étant contenu dans E_k et distinct de E_k). La suite de carrés $K_{n_k}^{m_k}$ $(k=1, 2,...)$ est donc descendente. D'après la remarque faite plus haut sur une suite descendente des carrés distincts de la famille $\mathcal{K}$, nous avons $\lim_{k=\infty} \delta(K_{n_k}^{m_k}) = 0$; le produit $\prod_{k=1}^{\infty} \overline{K_{n_k}^{m_k}}$ [1]) se réduit donc à un point p. Or, les carrés $K_{n_k}^{m_k}$ $(k=1, 2, \ldots)$ étant tous distincts et formant une suite descendente, les indices n_k $(k=1, 2, \ldots)$ sont tous différents, puisque d'après la définition de la famille $\mathfrak{L}_n$, les carrés (ouverts) K_n^1, $K_n^2, \ldots$ appartenant à la même de quatre familles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, sont, pour n fixe, sans point commun deux à deux: on a donc $\lim_{k=\infty} n_k = \infty$. Or, d'après la définition de $\mathfrak{L}_n$, $K_n^m \subset G_n$ (pour $m=1, 2, \ldots$): donc $p \varepsilon G_{n_1} G_{n_2} G_{n_3} \ldots = E$, puisque $\lim_{k=\infty} n_k = \infty$ et $G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ Donc $p \varepsilon E$ et $p = \lim_{k=\infty} K_{n_k}^{m_k}$, donc, à plus forte raison, $p = \lim_{k=\infty} K_{n_k}^{m_k} E$, ce qui prouve la propriété 2). Les conditions de notre théorème sont donc nécessaires.

Notre théorème est ainsi démontré.

[1]) $\overline{K}$ désigne, comme d'habitude, l'ensemble $K + K'$.