Sur une opération sur les suites infinies d'ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

$E_1, E_2, E_3, \ldots$ étant une suite infinie donnée d'ensembles, il est naturel d'envisager les *suites descendentes* d'ensembles tirées de la suite donnée, c'est-à-dire des suites infinies d'ensembles

$$E_{n_1}, E_{n_2}, E_{n_3}, \ldots,$$

telles que

$$E_{n_1} \supset E_{n_2} \supset E_{n_3} \supset \ldots \tag{1}$$

et

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

Désignons par $A(E_1, E_2, E_3, \ldots)$ la somme de tous les produits

$$E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots,$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies descendentes d'ensembles, tirées de la suite $E_1, E_2, E_3, \ldots$

On voit sans peine que l'ensemble $A(E_1, E_2, E_3, \ldots)$ ainsi défini est indépendant de l'ordre de termes de la suite $E_1, E_2, E_3, \ldots$.

Supposons, en particulier, que $E_1, E_2, \ldots$ sont des ensembles linéaires fermés: nous prouverons que *les ensembles* $A(E_1, E_2, E_3, \ldots)$ *coïncident avec les ensembles* (A) *de* M. Souslin [1]).

Soit $E = A(E_1, E_2, E_3, \ldots)$, où $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ sont des ensembles fermés linéaires donnés. Posons $E_0 = 0$. Les indices $n \geqslant 0$ et $k > 0$

[1]) M. Souslin: *Comptes Rendus*, note du 8 janvier 1917. Cf. aussi *Fund. Math.* t. V, p. 155.

étant donnés. désignons par $E_{\varphi(n, k)}$ le k-ième terme de le suite

(2) $$E_{n+1}, E_{n+2}, \dots$$

qui est un ensemble contenu dans E_n. et posons $\varphi(n, k)=0$, si la suite (2) contient moins que k termes qui sont des ensembles $\subset E_n$.

A tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \dots, n_k$ nous ferons maintenant correspondre un indice $\psi(n_1, n_2, \dots, n_k)$ comme il suit. Posons $\psi(n)=n$ pour $n=1, 2, \dots$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres $\psi(n_1, n_2, \dots, n_k)$, où $n_1, n_2, \dots, n_k$ est un système quelconque de k nombres naturels. $n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}$ étant un système donné quelconque de $k+1$ nombres naturels, nous poserons

(3) $$\psi(n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}) = \varphi(\psi(n_1, n_1, \dots, n_k), n_{k+1}).$$

Les nombres $\psi(n_1, n_2, \dots, n_k)$ sont ainsi définis par l'induction pour tous les systèmes finis de nombres naturels $n_1, n_2, \dots, n_k$. Posons

(4) $$F_{n_1, n_2, \dots, n_k} = E_{\psi(n_1, n_2, \dots, n_k)}$$

et désignons par N le *noyau* du système déterminant $\{F_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ [1]): je dis que $E=N$.

Soit p un point de E. D'après la définition de l'ensemble $E= =A(E_1, E_2, \dots)$, il existe donc une suite infinie d'indices $n_1 < n_2 < < n_3 < \dots$, telle qu'on a les formules (1) et que

(5) $$p \varepsilon E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \dots$$

n et $q > n$ étant deux indices, tels que $E_n \supset E_q$, il existe, d'après la définition de la fonction $\varphi(n, k)$, un indice unique k, tel que $\varphi(n, k)=q$: désignons-le par $\partial(n, q)$: la fonction $\partial(n, q)$ est ainsi définie pour tous les couples de deux nombres naturels (n, q), où $q > n$, et nous aurons

(6) $$\varphi(n, \partial(n, q)) = q \quad \text{pour} \quad n < q.$$

Nous avons $n_s < n_{s+1}$ pour $s=1, 2, \dots$: posons

(7) $$k_1 = n_1 \quad \text{et} \quad k_{s+1} = \partial(n_s, n_{s+1}) \quad \text{pour} \quad s=1, 2, \dots$$

Je dis que

(8) $$\psi(k_1, k_2, \dots, k_s) = n_s \quad \text{pour} \quad s=1, 2, \dots$$

[1]) c'est-à-dire la somme de tous les produits $F_{n_1} F_{n_1, n_2} F_{n_1, n_2, n_3} \dots$, la sommation s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \dots$

D'après la définition de la fonction $\psi(n)$, nous avons $\psi(k_1)=k_1=n_1$: la formule (8) est donc vraie pour $s=1$. Supposons-la vraie pour un indice s donné. Nous avons, d'après (3) et (8):

(9) $$\psi(k_1, k_2, \ldots, k_s, k_{s+1}) = \varphi(\psi(k_1, k_2, \ldots, k_s), k_{s+1}) = \varphi(n_s, k_{s+1}).$$

Or, d'après (7) et (6):

$$\varphi(n_s, k_{s+1}) = \varphi(n_s, \partial(n_s, n_{s+1})) = n_{s+1},$$

et la formule (8) donne

$$\psi(k_1, k_2, \ldots, k_s, k_{s+1}) = n_{s+1},$$

ce qui prouve que la formule (8) est vraie pour $s+1$.

La formule (8) est ainsi démontrée par l'induction pour tout s naturel.

D'après (4) et (8) nous trouvons

$$F_{k_1, k_2, \ldots, k_s} = E_{n_s} \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, \ldots,$$

donc, d'après (5):

$$p \,\varepsilon\, F_{k_1} F_{k_1, k_2} F_{k_1, k_2, k_3} \ldots,$$

ce qui prouve que $p \,\varepsilon\, N$.

Or, soit p un point de N. Il existe donc une suite infinie d'indices $k_1, k_2, k_3, \ldots$, telle que

(10) $$p \,\varepsilon\, F_{k_1} F_{k_1, k_2} F_{k_1, k_2, k_3} \ldots$$

Posons

(11) $$n_s = \psi(k_1, k_2, \ldots, k_s) \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, \ldots:$$

d'après (4) nous aurons

$$F_{k_1, k_2, \ldots, k_s} = E_{n_s} \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, \ldots,$$

donc, d'après (10):

(12) $$p \,\varepsilon\, E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots$$

Or, de (11), (12) et (3) résulte, d'après la définition de la fonction $\varphi(n, k)$:

$$n_{s+1} = \psi(k_1, k_2, \ldots, k_s, k_{s+1}) = \varphi(n_s, k_{s+1}) > n_s,$$

ce qui prouve que $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$: la formule (12) prouve donc que $p \,\varepsilon\, E$.

Nous avons ainsi démontré que $E = N$: donc E est un ensemble (A).

Soit maintenant E un ensemble (A) linéaire donné: nous prouverons qu'il existe une suite infinie d'ensembles fermés $E_1, E_2, E_3, \ldots$, telle que

$$E = A(E_1, E_2, E_3, \ldots). \tag{13}$$

Notre proposition est vraie lorsque E est fermé, puisqu'il suffit alors de poser $E_n = E$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Nous pouvons donc supposer que E n'est pas fermé, et parsuite contient deux points différents. a et $b > a$. Soit $\{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ le système déterminant d'intervalles (fermés) dont le noyau est E: nous pouvons supposer, comme on sait, que les longueurs des intervalles $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sont $< \varrho(a, b)$, $\varrho(a, b)$ désignant la distance entre a et b, et qu'on a

$$\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \supset \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}} \tag{14}$$

pour tout système fini d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}$.

Désignons par q_k le k-ième nombre premier, et par $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ l'ensemble fermé, formé du nombre 0 et de tous les nombres de la forme

$$\frac{1}{m\, q_{n_1} q_{n_1+n_2} \cdots q_{n_1+n_2+\cdots+n_k}} \qquad (m = 1, 2, 3 \ldots)$$

Nous dirons que le système d'indices $m_1, m_2, \ldots, m_k$ est un *segment* du système $n_1, n_2, \ldots, n_l$. lorsqu'on a $l \geqslant k$ et $m_i = n_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$.

On voit sans peine que la relation

$$P_{m_1, m_2, \ldots m_k} \supset P_{n_1, n_2, \ldots, n_l}$$

subsiste pour deux systèmes $m_1, m_2, \ldots, m_k$ et $n_1, n_2, \ldots, n_l$ non identiques d'indices dans ce et seulement dans ce cas, lorsque le système $m_1, m_2, \ldots, m_k$ est un segment du système $n_1, n_2, \ldots, n_l$.

Or, on voit sans peine que le produit infini

$$P_{n_1} P_{n_1, n_2} P_{n_1, n_2, n_3} \cdots$$

se réduit au point 0 pour toute suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$

Désignons maintenant par $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, resp. par $B_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ l'ensemble formé de tous les points de la forme $a - x$, resp. $b + x$, où x est un nombre de l'ensemble $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. La longueur de l'intervalle $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ étant $< \varrho(a, b)$, on reconnait sans peine qu'un au moins des ensembles $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et $B_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ est sans points communs avec

$\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Il en résulte d'après (14) et d'après la propriété des ensembles $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ qu'en posant

$$(15) \qquad F_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k} + A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} + B_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

nous aurons pour deux systèmes différents d'indices $m_1, m_2, \ldots, m_k$ et $n_1, n_2, \ldots, n_l$ la formule

$$(16) \qquad F_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \supset F_{n_1, n_2, \ldots, n_l}$$

dans ce et seulement dans ce cas, lorsque le système $m_1, m_2, \ldots, m_k$ est un segment du système $n_1, n_2, \ldots, n_l$. Or, on voit sans peine qu'on a pour toute suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ la formule

$$(17) \qquad F_{n_1} F_{n_1, n_2} F_{n_1, n_2, n_3} \ldots = Q + \delta_{n_1} \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_1, n_2, n_3} \ldots,$$

Q désignant l'ensemble formé de deux points a et b.

s étant un nombre naturel donné, désignons par

$$s = 2^{n_1 - 1} + 2^{n_1 + n_2 - 1} + \ldots + 2^{n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1}$$

son développement dyadique et posons

$$(18) \qquad E_s = F_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

— ce seront évidemment des ensembles fermés. Je dis que

$$(19) \qquad E = A(E_1, E_2, E_3, \ldots).$$

Soit p un point de E. Il existe donc une suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$, telle que

$$p \,\varepsilon\, \delta_{n_1} \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_1, n_2, n_3} \ldots :$$

d'après (15) et la propriété des ensembles $F_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ nous avons donc

$$p \,\varepsilon\, F_{n_1} F_{n_1, n_2} F_{n_1, n_2, n_3} \ldots$$

et

$$F_{n_1} \supset F_{n_1, n_2} \supset F_{n_1, n_2, n_3} \supset \ldots,$$

et on en déduit, d'après (18), qu'il existe une suite infinie d'indices $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$, telle que

$$(20) \qquad E_{s_1} \supset E_{s_2} \supset E_{s_3} \supset \ldots$$

et

$$(21) \qquad p \,\varepsilon\, E_{s_1} E_{s_2} E_{s_3} \ldots,$$

ce qui prouve que $p \,\varepsilon\, A(E_1, E_2, E_3, \ldots)$.

Or, soit p un point de $A(E_1, E_2, \ldots)$: il existe donc une suite infinie d'indices $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots$, telle qu'on a les formules (20) et (21). Soient $m_1, m_2, \ldots, m_k$ et $n_1, n_2, \ldots, n_l$ deux systèmes d'indices, tels que

$$s_1 = 2^{m_1-1} + 2^{m_1+m_2-1} + \ldots + 2^{m_1+\ldots+m_k-1} \quad \text{et} \quad s_2 = 2^{n_1-1} + \ldots + 2^{n_1+\ldots+n_l-1}:$$

nous aurons donc, d'après (18):

$$E_{s_1} = F_{m_1, m_2, \ldots, m_k} \quad \text{et} \quad E_{s_2} = F_{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$

donc, d'après $E_{s_1} \supset E_{s_2}$ nous aurons la formule (16) qui entraîne, comme nous savons, que le système $m_1, m_2, \ldots, m_k$ est un segment du système $n_1, n_2, \ldots, n_l$. On en déduit tout de suite de (20) qu'il existe une suite infinie d'indices n_1, n_2, $n_3, \ldots$, et une autre $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, telles que

$$E_{s_r} = F_{n_1, n_2, \ldots, n_{k_r}} \quad \text{pour} \quad r = 1, 2, 3, \ldots$$

La formule (21) donne donc

$$p \varepsilon F_{n_1, n_2, \ldots, n_{k_1}} \cdot F_{n_1, n_2, \ldots, n_{k_2}} \cdot F_{n_1, n_2, \ldots, n_{k_3}} \ldots,$$

d'où résulte, d'après (17) et (14), que

$$p \varepsilon (Q + \delta_{n_1} \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_1, n_2, n_3} \ldots),$$

donc toutefois $p \varepsilon E$.

La formule (19) est ainsi établie.

Nous avons ainsi démontré que notre opération $A(E_1, E_2, E_3, \ldots)$, effectuée sur les ensembles linéaires fermés, donne tous les ensembles (A) linéaires et seulement de tels ensembles. Observons encore qu'on pourrait démontrer que l'opération $A(E_1, E_2, \ldots)$ effectuée sur les ensembles (A) donne toujours des ensembles (A).