Sur le théorème de Schoenflies.

Par

Henri Lebesgue (Paris)

1. Je me suis déjà occupé[1]) de la propriété d'Analysis Situs connue sous le nom de théorème de Schoenflies, propriété qu'on peut énoncer ainsi (§ 12):

si l'on a une correspondance, univoque et continue dans les deux sens, entre les points de deux ensembles fermés de deux éspaces à n dimensions,

les points intérieurs des deux ensembles se correspondent,

les points frontières, limites des points intérieurs, se correspondent, ainsi que les points frontières, non limites de points intérieurs.

M. Fréchet vient de me faire observer que ma démonstration est insuffisante; par une singulière étourderie, en effet, j'ai admis presque entièrement la propriété à démontrer à un moment de mon raisonnement. Pourtant, il suffit d'ajouter quelques lignes au § 12 pour le compléter. Mais, comme il résulte de ma correspondance avec M. Fréchet que tout ce paragraphe n'est pas clair, je vais le reprendre entièrement.

2. Admettons qu'entre deux ensembles e et E, fermés et appartenant à deux espaces à n dimensions, il existe une correspondance ponctuelle biunivoque et continue, et partageons e en l'ensemble d de ceux de ses points qui sont limites de points intérieurs et l'ensemble $f = e - d$. Partageons de même E en D et F.

La troisième partie du théorème de Schoenflies affirme que f et F se correspondent; c'est ce que j'ai prouvé au § 11, je n'y reviens pas et je ne m'occupe plus que de la correspondance entre d

[1]) *Fund. Math.* t. II. *Sur les correspondances entre les points de deux espaces.* Les indications de paragraphe qu'on trouvera plus loin sont relatives à ce Mémoire.

et D. Pour légitimer les deux premières parties de l'énoncé, il suffit de prouver qu'il est impossible qu'un point p, frontière de d, ait pour homologue un point P, intérieur à D.

Si cela avait lieu, et si h était pris assez petit, les points dont les coordonnées vérifient les inégalités

$$\xi_i - h \leqslant x_i \leqslant \xi_i + h,$$

dans lesquelles $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sont les coordonnées de P, seraient tous intérieurs à D. Ces points forment un intervalle I, de centre P, et cet intervalle aurait pour homologue un ensemble i dont p serait point frontière. Il faut prouver que ces hypothèses sont contradictoires.

3. J'utilise pour cela le théorème fondamental énoncé au § 2 de mon Mémoire:

si chaque point d'un domaine D à n dimensions appartient à l'un au moins des ensembles fermés $E_1, E_2, \ldots, E_p$ en nombre fini, et si ces ensembles sont suffisamment petits, il y a des points communs au moins à $n+1$ de ces ensembles.

Cette proposition a été démontrée aux §§ 3 à 7 de mon travail; il a fallu pour cela préciser le degré de petitesse des E_i au § 3 La précision que j'ai donnée là est une condition de petitesse suffisante pour l'exactitude du théorème et la validité de sa démonstration, mais non nécessaire pour elles. Ce qui est nécessaire à la démonstration, c'est que l'on puisse construire les ensembles que j'ai appelés $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Cette remarque va nous permettre d'utiliser un cas, très particulier mais précis, du théorème fondamental:

si l'on a couvert I à l'aide des ensembles fermés $E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$ il y a au moins un point commun à tous ces ensembles, pourvu que

E_i ne contienne aucun point de $x_i = \xi_i + h$, et que

$E_1 + E_2 + \ldots + E_i$ contienne tous les points de I situés dans $x_i = \xi_i - h$.

Cet énoncé est légitimé par le raisonnement des §§ 3 à 7.

4. Je définis tout d'abord les E_ν comme étant formés de ceux des points de I qui vérifient les inégalités suivantes:

pour E_1: $x_1 \leqslant \xi_1$

pour E_ν $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$: $x_1 \geqslant \xi_1, x_2 \geqslant \xi_2, \ldots, x_{\nu-1} \geqslant \xi_{\nu-1}, x_\nu \leqslant \xi_\nu$.

pour E_{n+1}: $x_1 \geqslant \xi_1, x_2 \geqslant \xi_2, \ldots, x_n \geqslant \xi_n$.

Les ensembles fermés E_ν ont alors en commun un seul point P.

V étant un voisinage extrêmement restreint de P, je ne modifie pas les E_ν à l'extérieur de V, mais je les modifie dans V et cela de manière à obtenir, à la place des E_ν, des ensembles E'_ν fermés et couvrant encore tout I. D'après le cas particulier énoncé du théorème fondamental, les E'_ν ont au moins tous en commun un point; point qui ne peut être que dans V.

Aux ensembles E_ν et E'_ν correspondent deux familles d'ensembles fermés e_ν et e'_ν; chacune de ces familles couvre tout i. Chaque e'_ν diffère du e_ν de même indice seulement dans un voisinage v de p et nous pouvons choisir v et les e'_ν dans v, V et les E'_ν en résulteront. Or, on va voir que l'on peut choisir les e'_ν de façon qu'ils soient fermés, qu'ils couvrent tout i et qu'ils n'y ait aucun point qui leur soit commun à tous, donc les E'_ν n'auraient tous en commun aucun point, ce qui est contradictoire.

Je prends pour v un intervalle de centre p.

Les e_ν n'ayant tous en commun que p, il n'y a pas de point de la frontière φ de v qui soit commun à plus de n des e_ν. Soit p' un point intérieur à v et non situé sur i; un tel point existe bien car p est point frontière de i. Si un point q de φ appartient à e_{ν_1}, $e_{\nu_2}, \ldots, e_{\nu_s}$, convenons que tous les points de i situés sur le segment $p'q$ appartiendront à $e'_{\nu_1}, e'_{\nu_2}, \ldots, e'_{\nu_s}$. Les e'_ν sont ainsi définis à l'intérieur de v et sur φ; à l'extérieur de v, e'_ν est identique à e_ν. Il est clair que, si tout φ appartient à i, les e'_ν sont fermés, couvrent tout i et n'ont aucun point commun à tous. La démonstration est achevée pour ce cas.

5. Je viens d'exposer à nouveau ce que contenait le § 12 de mon Mémoire; seulement, l'hypothèse que φ appartenait toute entière à i n'y était pas faite explicitement. C'est M. Fréchet qui m'a fait remarquer que j'avais fait cette hypothèse, évidemment très voisine de celle-ci: p est point intérieur à i. Il faut donc examiner le cas où φ n'appartiendrait pas toute entière à i.

Tout point de φ appartient à n au plus des ensembles e_ν, donc puisque ces ensembles sont fermés, on peut déterminer un nombre l tel que, dans tout morceau de φ de diamètre moindre que l, ne se trouvent que des points appartenant à n au plus des e_ν. Cette remarque va nous permettre, avant de déduire les e'_ν des e_ν, de faire subir aux e_ν des accroissements tels, qu'après eux, tout point de φ appartienne à un au moins des e_ν et à n au plus. Ces modifications des e_ν ne porteront que sur les points de φ.

Divisons φ en un nombre fini d'ensembles fermés $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$, dont les diamètres sont tous inférieurs à $\frac{l}{2}$, et cela de façon qu'aucun point de φ n'appartienne à plus de n des morceaux φ_ρ. Pour cela il suffit d'opérer, sur chacune des variétés linéaires à $n-1$ dimensions constituant φ, comme il a été dit au § 10. Ceci étant, si l'ensemble φ_a contient un point au moins n'appartenant pas à i, nous adjoignons φ_a à l'un des e_ν par l'une ou l'autre des deux conventions suivantes:

α) si aucun des e_ν ne contient de points de φ_a, φ_a est adjoint à e_1.

β) si $e_1, e_2, \ldots, e_{\rho-1}$ ne contiennent pas de points de φ_a et que e_ρ en contienne, φ_a est adjoint à φ_ρ.

Les e_ν ainsi modifiés sont fermés et tout point q de φ appartient à l'un au moins d'entre eux; je dis qu'il appartient à n au plus. En effet:

α) si q n'appartient pas à i, il n'appartient primitivement à aucun e_ν, donc il appartient à n au plus des e_ν modifiés, puisqu'il n'appartient pas à plus de n des φ_a.

β) si q appartient à i, tous les φ_a qui contiennent q contiennent des points de i; tous les e_ν modifiés qui contiennent q contenaient avant leur modification des points de l'ensemble $\Sigma\varphi_a$ formé par ceux des φ_a qui contiennent q. Or, $\Sigma\varphi_a$ a un diamètre moindre que l et ne contient donc que des points appartenant à n au plus des e_ν non modifiés.

A partir des e_ν modifiés on opèrera comme précédemment, la démonstration est complétée.