Sur une propriété des ensembles ambigus.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

D'après M. de la Vallée Poussin un ensemble de points E est *ambigu* ou *A de classe α*, s'il est à la fois F et O (de M. Lebesgue) de classe $\leqslant \alpha$ [1]). Le but de cette Note est de démontrer le suivant

Théorème: *Si G est un ensemble O de classe $\leqslant \alpha (\alpha > 0)$ et H un ensemble F de classe $\leqslant \alpha$, et si $G \supset H$, il existe un ensemble E qui est A de classe α, et tel que $G \supset E \supset H$.*

Ce théorème est analogue à un théorème de M. Hahn sur les fonctions semi-continues, généralisé par M. Hausdorff (Einschiebungssatz) [2]), et c'est une analyse de la belle démonstration de M. Hausdorff qui m'a conduit à une identité pour les ensembles, sur laquelle est fondée la démonstration de notre théorème.

Il nous sera plus commode d'introduire au lieu des ensembles O et F de M. Lebesgue les ensembles P^α et Q^α de M. Hausdorff [3]). On peut définir ces ensembles par l'induction transfinie comme il suit. P^1 sont les ensembles ouverts, Q^1 sont les ensembles fermés. Soit maintenant α un nombre ordinal donné > 1 (et $< \Omega$), et supposons déjà définis les ensembles P^ξ et Q^ξ pour $\xi < \alpha$: nous définirons les ensembles P^α comme les sommes $E_1 + E_2 + \ldots$, où E_n est un Q^{ξ_n}, et $\xi_n < \alpha$, pour $n = 1, 2, \ldots$, et les ensembles Q^α comme les complémentaires des ensembles P^α.

[1]) C. de la Vallée Poussin: *Integrales de Lebesgue etc.*, Paris 1916, p. 135.

[2]) V. F. Hausdorff: *Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung*. Math. Zeitschrift 5 (1919) p. 295 et p. 309.

[3]) l. c., p. 307.

On voit sans peine que les ensembles O de classe $\leqslant \alpha$ de M. Lebesgue coïncident avec les ensembles $P^{\alpha+1}$, et les ensembles F de classe $\leqslant \alpha$ avec les ensemble $Q^{\alpha+1}$. Notre théorème sera donc démontré, si nous prouverons, pour tout nombre ordinal α, la proposition suivante:

Si G est un P^α et H un Q^α, et si $G \supset H$, il existe un ensemble E qui est à la fois P^α et Q^α, et tel que $G \supset E \supset H$ [1]).

Lemme: *Si G_n et H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont deux suites infinies d'ensembles, tels que*

(1) $$G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \ldots, \quad H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \ldots$$

et

(2) $$G_1 + G_2 + G_3 + \ldots \supset H_1 H_2 H_3 \ldots,$$

on a

(3) $$G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + \ldots = H_1 (G_1 + H_2)(G_2 + H_3)(G_3 + H_4) \ldots$$

Démonstration. Soient G_n et H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ deux suites infinies d'ensembles satisfaisant aux conditions (1) et (2), et posons

(4) $$P = G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + \ldots,$$

(5) $$Q = H_1 (G_1 + H_2)(G_2 + H_3)(G_3 + H_4) \ldots$$

Soit p un élément de P. D'après (4), il existe un indice n, tel que $p \varepsilon G_n H_n$, d'où résulte, d'après (1):

$$p \varepsilon G_k, \text{ pour } k \geqslant n, \text{ et } p \varepsilon H_k, \text{ pour } k \leqslant n,$$

ce qui donne tout de suite:

$$p \varepsilon H_1, \text{ et } p \varepsilon (G_k + H_{k+1}), \text{ pour } k = 1, 2, 3, \ldots,$$

donc, d'après (5), $p \varepsilon Q$. Nous avons ainsi démontré que $P \subset Q$.

Or, soit q un élément de Q. Posons

(6) $$H = H_1 H_2 H_3 \ldots$$

et distinguons deux cas:

1) $q \varepsilon H$. D'après (2) il existe donc un indice n, tel que $q \varepsilon G_n$, et puisque, d'après (6) et $q \varepsilon H$, nous avons $q \varepsilon H_n$, il est $q \varepsilon G_n H_n$, donc, d'après (4), $q \varepsilon P$.

[1]) Cette proposition est d'ailleurs un peu plus générale que le théorème énoncé plus haut (α pouvant être un nombre ordinal de seconde espèce).

2) q non εH. D'après (6) il existe donc un indice k, tel que q non εH_k: soit m le plus petit parmi ces indices. Il ne peut être $m=1$, puisque, d'après $q \varepsilon Q$ et (5), nous avons $q \varepsilon H_1$. Nous avons donc $m=n+1$, où n est un nombre naturel, et il résulte de la définition du nombre m que q appartient à l'ensemble $H_{m-1}=H_n$ Or, de $q \varepsilon Q$ et de la formule (5) résulte que $q \varepsilon (G_n+H_{n+1})$, ce qui donne, d'après $q \varepsilon H_m = H_{n+1}$, $q \varepsilon G_n$. Nous avons donc $q \varepsilon G_n H_n$, donc d'après (4), $q \varepsilon P$.

Nous avons ainsi démontré que $Q \subset P$, et puisque nous avons prouvé plus haut que $P \subset Q$, il est $P=Q$ et la formule (3) est établie.

Soit maintenant G un ensemble $P^{\alpha}(\alpha>0)$, H un ensemble Q^{α}, et supposons que $G \supset H$.

L'ensemble G étant un P^{α}, nous pouvons poser

(7) $$G=G_1+G_2+G_3+\ldots,$$

où G_n est un Q^{ξ_n} et $\xi_n<\alpha$, pour $n=1, 2, 3,\ldots,$ et nous pouvons encore supposer que

(8) $$G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \ldots$$

Pareillement, H étant un Q^{α} nous pouvons poser

(9) $$H=H_1 H_2 H_3 \ldots,$$

où H_n est un P^{η_n} et $\eta_n<\alpha$, et nous pouvons supposer

(10) $$H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \ldots$$

Posons

(11) $$E=G_1H_1+G_2H_2+G_3H_3+\ldots$$

D'après (8), (10), (7), (9) et d'après $G \supset H$, les ensembles G_n et $H_n (n=1, 2\ldots)$ satisfont aux conditions de notre lemme: nous avons donc l'égalité (3) qui donne, d'après (11):

(12) $$E=H_1(G_1+H_2)(G_2+H_3)(G_3+H_4)\ldots$$

Les formules (11) et (7) donnent tout de suite $E \subset G$, et les formules (12) et (9) donnent: $E \supset H$. Nous avons donc $G \supset E \supset H$.

Un ensemble Q^{ξ} où $\xi<\alpha$, étant, comme on sait, un P^{α}, et le produit de deux ensembles P^{α} étant encore un P^{α}, nous concluons sans peine que les ensembles $G_n H_n (n=1, 2,\ldots)$ sont des P^{α} Une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles P^α étant un P^α, il en résulte de la formule (11) que E est un P^α. Or, un ensemble P^ξ, où $\xi < \alpha$ étant un Q^α et la somme de deux ensembles Q^α étant encore un Q^α, nous concluons que les facteurs du produit (12) sont des Q^α. Un produit d'une infinité dénombrable d'ensembles Q^α étant un Q^α, il en résulte de la formule (12) que E est un Q^α.

L'ensemble E est donc à la fois P^α et Q^α: il satisfait donc aux conditions de notre proposition, qui est ainsi établie.

Voici une application du théorème démontré. Soit $f(x)$ une fonction de classe $\leqslant \alpha$ de M. **Baire**, ε un nombre positif donné. Posons

$$(13) \quad H_k = \mathrm{E}[f(x) \leqslant k\varepsilon], \quad G_k = \mathrm{E}[f(x) < (k+1)\varepsilon], \text{ pour } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$f(x)$ étant une fonction de classe $\leqslant \alpha$, les ensembles H_k seront, comme on sait, des ensembles F de classes $\leqslant \alpha$ et les ensembles G_k des ensembles O de classes $\leqslant \alpha$. Il existe donc, d'après notre théorème (pour tout entier k donné), un ensemble E_k qui est à la fois F et O de classe $\leqslant \alpha$, et tel que

$$(14) \qquad G_k \supset E_k \supset H_k.$$

Posons

$$(15) \qquad F(x) = k\varepsilon \text{ pour } x \varepsilon E_k - E_{k-1} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

on voit sans peine que la fonction $F(x)$ sera ainsi définie pour tout x réel. De (13) et (14) résulte sans peine que $(k-1)\varepsilon < f(x) < (k+1)\varepsilon$ pour $x \varepsilon E_k - E_{k-1}$, donc, d'après (13)

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon$$

pour tout x réel.

Or, soit A un nombre réel donné, k l'entier le plus grand, tel que $k\varepsilon < A$, l l'entier le plus grand, tel que $l\varepsilon \leqslant A$. De (15) résulte sans peine que

$$(16) \quad \mathrm{E}[F(x) < A] = \mathrm{E}[F(x) \leqslant k\varepsilon] = E_k, \text{ et } \mathrm{E}[F(x) > A] = \mathrm{E}[F(x) > l\varepsilon] = CE_l;$$

les ensembles E_k étant à la fois F et O de classes $\leqslant \alpha$, les ensembles E_k et CE_l sont O de classes $\leqslant \alpha$. Il en résulte, d'après (6), que $F(x)$ est une fonction de classe $\leqslant \alpha$. Nous arrivons ainsi au

Théorème: *$f(x)$ étant une fonction de classe $\leqslant \alpha$, et ε un nombre positif donné, il existe toujours une fonction de classe $\leqslant \alpha$ qui ne prend que les valeurs multiples de ε et qui est égale à $f(x)$ à moins de ε près.*

C'est une généralisation du théorème, démontré par M. **Kempisty** pour les fonctions de classe 1 [1]).

On peut démontrer que toute fonction de classe $\leqslant \alpha$ qui ne prend que les valeurs multiples de ε est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement de classe $\leqslant \alpha$ (c'est-à-dire de deux fonctions qui sont limites de suites

[1]) *Fund. Math.* t. II. p. 135.

non croissantes de fonctions de classes $< \alpha$).[1]). On obtient ainsi ce théorème qui est une généralisation du théorème de M. Mazurkiewicz[2]) aux fonctions de classe quelconque:

Théorème[3]): *$f(x)$ étant une fonction de classe $\leqslant \alpha$, et ε un nombre positif donné, il existe toujours une fonction $F(x)$ qui est une différence de deux fonctions semi-continues supérieurement de classe $\leqslant \alpha$ et qui est égale à $f(x)$ à moins de ε près.*

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. II, p. 38.

[2]) *Fund. Math.* t. II, p. 32 et 134.

[3]) Ce théorème été démontré par M. S. Kempisty par une voie différente: voir *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* t. I, (1922), p. 73 (Th. III).