icm©

Einige Bemerkungen über den Raum der abgeschlossenen Mengen

von

Harry Poppe (Greifswald)

X sei ein topologischer Raum; mit $\mathfrak{F}(X)$ ($\mathfrak{F}_0(X)$) bezeichnen wir das System aller abgeschlossenen (nichtleeren abgeschlossenen) Mengen von X. Wir verwenden im folgenden der Einfachkeit halber nur $\mathfrak{F}_0(X)$, obwohl die Ergebnisse auch für $\mathfrak{F}(X)$ gelten. Die Arbeit besteht aus zwei Teilen, die von einander unabhängig sind. Im ersten Teil untersuchen wir im Anschluß an die Arbeit [9] die Regularität einer bestimmten Klasse von Topologien für $\mathfrak{F}_0(X)$; in zweiten Teil wird der (Hausdorffsche) abgeschlossene Limes betrachtet. Insbesondere zeigen wir für einen metrischen Raum X: Stimmen in $\mathfrak{F}_0(X)$ die metrische Konvergenz nach Hausdorff bzw. nach Busemann (für Fréchet-Folgen) mit der abgeschlossenen Konvergenz überein, so muß X kompakt bzw. finit kompakt sein.

1. In [9] haben wir Topologien $\tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l$ für $\mathfrak{F}_0(X)$ betrachtet, wobei $\mathfrak{S}$ ein additives (d.h. endlich vereinigungsabgeschlossenes) System von Teilmengen von X ist und die Topologien $\tau_{\mathfrak{S}}$ und τ_l wie folgt definiert sind: $\tau_{\mathfrak{S}}$ durch die Basis

$$\{\langle S\rangle\colon\ S \in \mathfrak{S}\} \cup \{\emptyset, \mathfrak{F}_0(X)\} \quad \text{mit} \quad \langle S\rangle = \{A \in \mathfrak{F}_0(\mathrm{X})\colon\ A \cap S = \emptyset\}$$

und τ_l durch die Subbasis

$$\{[G]\colon\ G \text{ offen in } X\} \quad \text{mit} \quad [G] = \{A \in \mathfrak{F}_0(X)\colon\ A \cap G \neq \emptyset\}.$$

Dann gilt:

(1) *X sei ein beliebiger topologischer Raum, $\mathfrak{S}$ sei additiv. Dann genügt $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ genau dann dem T_1-Axiom, wenn $\mathfrak{S}$ folgende Bedingung erfüllt: Zu jedem Paar A, B aus $\mathfrak{F}_0(X)$ mit $A \subset B$ und $A \neq B$ existiert ein $S \in \mathfrak{S}$ mit $S \cap A = \emptyset$ und $B \cap S \neq \emptyset$.*

(2) *X sei ein T_1-Raum, $\mathfrak{S}$ sei additiv. $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ ist dann und nur dann Hausdorffsch, wenn X "$\mathfrak{S}$-lokal" ist, d.h. wenn zu jeder Umgebung U eines Punktes $x \in X$ eine Umgebung V von x mit $V \subset U$ und $V \in \mathfrak{S}$ existiert.*

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall, daß $\mathfrak{S}$ ein additives System offener bzw. abgeschlossener Mengen ist und untersuchen die Regularität von $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$. (Einen topologischen Raum nennen wir *regulär*, wenn er das T_1-Axiom und das Tietzesche Trennungsaxiom erfüllt.)

$\mathfrak{S}$ bestehe nun zunächst aus offenen Mengen. Dann können wir sofort notieren:

(3) *X sei ein T_1-Raum, $\mathfrak{S}$ sei additiv und es sei $\bigcup\{S\colon S \in \mathfrak{S}\} = X$. $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ genügt genau dann dem T_1-Axiom, wenn $\mathfrak{S}$ eine Basis der offenen Mengen von X ist.*

Beweis. Sei G offen, $G \neq X$, $x \in G$, dann ist $X - G \subsetneqq (X-G) \cup \{x\}$, also existiert nach (1) ein $H \in \mathfrak{S}$ mit $(X-G) \cap H = \emptyset$ und $\big((X-G) \cup \{x\}\big) \cap H \neq 0$; folglich ist $x \in H \subset G$. Seien umgekehrt $A, B \in \mathfrak{F}_0(X)$ und $A \subsetneqq B$: sei $x \in B$ und $x \notin A$, da $\mathfrak{S}$ Basis ist, gibt es ein $H \in \mathfrak{S}$ mit $x \in H \subset X - A$, woraus $H \cap A = \emptyset$ und $H \cap B \neq \emptyset$ folgt.

Wir nehmen also jetzt an, daß $\mathfrak{S}$ eine additive Basis der offenen Mengen von X ist. In diesem Falle ist dann aber $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ stets regulär, denn es gilt sogar:

(4) *X sei ein beliebiger topologischer Raum, $\mathfrak{S}$ sei eine additive Basis der offenen Mengen. Dann ist $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ nulldimensional (im Sinne der kleinen induktiven Dimension).* [1]

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß das System

$$\{\langle S\rangle \cap [H_{i_1}] \cap \ldots \cap [H_{i_n}]\colon S \in \mathfrak{S},\ H_{i_j} \in \mathfrak{S}\}$$

bereits eine Basis für $\tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l$ bildet: $\langle S\rangle \cap [H_1] \cap \ldots \cap [H_n]$, $S \in \mathfrak{S}$, H_k offen, sei ein beliebiges Basiselement von $\tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l$; es ist $H_k = \bigcup\{G_{i_k}^k\colon i_k \in I_k\}$ mit $G_{i_k}^k \in \mathfrak{S}$, $k = 1, \ldots, n$; offenbar gilt $[H_k] = \bigcup\{[G_{i_k}^k]\colon i_k \in I_k\}$, also ist

$$\langle S\rangle \cap [H_1] \cap \ldots \cap [H_n] = \langle S\rangle \cap \bigcup\{[G_{i_1}^1]\colon i_1 \in I_1\} \cap \ldots \cap \bigcup\{[G_{i_n}^n]\colon i_n \in I_n\}$$
$$= \bigcup\{\langle S\rangle \cap [G_{i_1}^1] \cap \ldots \cap [G_{i_n}^n]\colon (i_1, \ldots, i_n) \in I_1 \times \ldots \times I_n\}.$$

Weiterhin gilt nun

$$\overline{\langle S\rangle \cap [H_1] \ldots \cap [H_n]}^{\tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l} = \langle S\rangle \cap [H_1] \cap \ldots \cap [H_n]$$

für $S \in \mathfrak{S}$ und $H_i \in \mathfrak{S}$: sei $A \in \overline{\langle S\rangle \cap \bigcap [H_i]}^{\tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l}$ und $A \notin \langle S\rangle \cap \bigcap [H_i]$, dann gilt $A \cap S \neq \emptyset$ oder $A \cap H_j = \emptyset$ für (wenigstens) ein j, im ersten Falle ist $A \in [S] \in \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l$, also gilt $[S] \cap (\langle S\rangle \cap \bigcap [H_i]) \neq \emptyset$ und damit $[S] \cap \langle S\rangle \neq \emptyset$, was nicht möglich ist; im zweiten Falle ist $A \in \langle H_j\rangle$, woraus sich analog wegen $\langle H_j\rangle \cap [H_j] \neq \emptyset$ ein Widerspruch ergibt.

Damit haben wir also eine Basis aus offen-abgeschlossenen Mengen für $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ erhalten.

[1] Nach [9] ist $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ andererseits im T_0-Raum.

Nun betrachten wir den Fall, daß $\mathfrak{S}$ ein (additives) System abgeschlossener Teilmengen von X ist. Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz. Sind $P, Q_1, \ldots, Q_n$ Teilmengen von X, so bezeichnen wir mit $(P; Q_1, \ldots, Q_n)$ die Menge $\{A \in \mathfrak{F}_0(X)\colon A \subset P \text{ und } A \cap Q_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$.

(5) Hilfssatz. *X sei ein T_1-Raum, $\mathfrak{S}$ sei ein additives System von Teilmengen von X; $H_1, \ldots, H_n$ seien offene Mengen*

(a) *Ist S beliebig, so gilt:*

$$\langle S\rangle \cap \bigcap [H_i] = (X - S;\ H_1 - S, \ldots, H_n - S).$$

(b) *Besteht $\mathfrak{S}$ aus abgeschlossenen Mengen und ist $S \in \mathfrak{S}$, so gilt*

$$(\overline{X-S}, \overline{H_1 - S}, \ldots, \overline{H_n - S}) \subset \overline{\langle S\rangle \cap \bigcap [H_i]}^{\tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l}.$$

Beweis. (a) ist klar.

Zu (b): Es sei $A \in \mathfrak{F}_0(X)$, $A \in (\overline{X-S}, \overline{H_1 - S_1}, \ldots, \overline{H_n - S})$ und $\langle S_1\rangle \cap [G_1] \cap \ldots \cap [G_m]$ sei eine beliebige Umgebung von A; wir haben dann $A \subset \overline{X-S}$, $A \cap \overline{H_i - S} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$ und $A \subset X - S_1$, $A \cap G_k \neq \emptyset$, $k = 1, \ldots, m$; ist also $a_i \in A \cap \overline{H_i - S}$, so ist $a_i \in X - S_1$ und, da $X - S_1$ offen ist, gibt es ein $y_i \in (X - S_1) \cap (H_i - S)$, $i = 1, \ldots, n$; da $A \cap (G_k - S_1) \neq \emptyset$ und $G_k - S_1$ offen ist $(k = 1, \ldots, m)$ gibt es ein $z_k \in (X - S) \cap (G_k - S_1)$; dann ist aber $\{y_i\colon i = 1, \ldots, n\} \cup \{z_k\colon k = 1, \ldots, m\} \in (\langle S\rangle \cap \bigcap [H_i]) \cap (\langle S_1\rangle \cap \bigcap [G_k])$. Nun können wir folgenden Satz beweisen:

(6) Satz. *X sei ein T_1-Raum, $\mathfrak{S}$ ein additives System abgeschlossener Teilmengen von X. Dann gilt: $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ ist dann und nur dann regulär, wenn $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ das T_1-Axiom erfüllt und wenn $\mathfrak{S}$ der folgenden Bedingung genügt:*

(N) *Ist $A \in \mathfrak{F}_0(X)$, $S \in \mathfrak{S}$ und $A \subset X - S$, so existiert ein $S_1 \in \mathfrak{S}$ mit $A \subset X - S_1 \subset \overline{X - S_1} \subset X - S$.*

Bemerkung. (N) ist die Normalitätsbedingung für einen topologischen Raum, eingeschränkt auf diejenigen offenen Mengen, die Komplemente von $\mathfrak{S}$-Mengen sind.

Beweis. $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ sei regulär: Es sei $A \in \mathfrak{F}_0(X)$, $S \in \mathfrak{S}$ und $A \subset X - S$; dann ist $A \in \langle S\rangle$ und folglich gibt es ein $S_1 \in \mathfrak{S}$ und offene Mengen $H_1, \ldots, H_n$, so daß $A \in \langle S_1\rangle \cap \bigcap [H_i] \subset \overline{\langle S_1\rangle \cap \bigcap [H_i]}^{\tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l} \subset \langle S\rangle$ gilt. Nach (5) erhält man

$$\overline{X - S_1} \in (\overline{X - S_1};\ \overline{H_1 - S_1}, \ldots, \overline{H_n - S_1}) \subset \overline{\langle S_1\rangle \cap \bigcap [H_i]}^{\tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l},$$

also $\overline{X - S_1} \in \langle S\rangle$; insgesamt gilt also $A \subset X - S_1 \subset \overline{X - S_1} \subset X - S$, d.h. die Bedingung (N). Ferner erfüllt ein regulärer Raum das T_1-Axiom.

$\mathfrak{S}$ erfülle die Bedingung (N) und für $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ gelte das T_1-Axiom.

Es sei $A \in \mathfrak{F}_0(X)$ und $\langle S\rangle \cap [H_1] \cap \ldots \cap [H_n]$ sei ein beliebiges Basiselement von $\tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l$, das A enthält (wir können $X \neq H_i$ annehmen); es gilt also $A \subset X-S$ und $A \cap H_i \neq \emptyset$ für $i=1,\ldots,n$: sei $a_i \in A \cap H_i$; wegen $X-H_i \subsetneqq X-H_i \cup \{a_i\}$ gibt es nach (1) ein $S_1 \in \mathfrak{S}$ mit $a_i \in S_1$ und $X-H_i \subset X-S_1$; nach (N) gibt es dann $T_i \in \mathfrak{S}$ mit $X-H_i \subset X-T_i \subset \overline{X-T_i} \subset X-S_1$, $i=1,\ldots,n$, woraus $(a_i \in)$ $S_1 \subset V_i = X-\overline{X-T_i} \subset T_i \subset H_i$ folgt und V_i ist offen [2].

Wegen $A \subset X-S$ gibt es nach (N) ein $S_2 \in \mathfrak{S}$ mit $A \subset X-S_2 \subset \overline{X-S_2} \subset X-S$; es ist dann $A \in \langle S_2\rangle \cap \bigcap [V_i]$ und wir zeigen:

$$\overline{\langle S_2\rangle \cap \bigcap [V_i]}^{\tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l} \subset (\overline{X-S_2}, T_1, \ldots, T_n) \subset \langle S\rangle \cap \bigcap [H_i];$$

es sei $B \in \overline{\langle S_2\rangle \cap \bigcap [V_i]}$ und $B \notin (\overline{X-S_2}; T_1, \ldots, T_n)$, es gilt also $B \not\subset \overline{X-S_2}$ oder $B \cap T_j = \emptyset$ für ein $j \in \{1,\ldots,n\}$; im ersten Falle ist dann $[X-\overline{X-S_2}]$, im zweiten Falle $\langle T_j\rangle$ eine Umgebung von B, woraus ein Widerspruch zu $B \in \overline{\langle S_2\rangle \cap \bigcap [V_i]}$ folgt. Die zweite Inklusion ergibt sich unmittelbar.

FOLGERUNGEN.

(a) *Es sei $\mathfrak{S}_{\bar{k}} = \{K \subset X\colon K$ abgeschlossen und kompakt$\}$. X sei ein T_1-Raum; dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(α) *$(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}_{\bar{k}}} \vee \tau_l)$ ist Hausdorffsch.*

(β) *Jede Umgebung eines Punktes $x \in X$ enthält eine abgeschlossene und kompakte Umgebung.*

(γ) *$(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}_{\bar{k}}} \vee \tau_l)$ ist regulär.*

Beweis. (α) ⇒ (β) gilt nach (2); wir zeigen noch (β) ⇒ (γ): $\mathfrak{S}_{\bar{k}}$ enthält alle einpunktigen Teilmengen von X und daraus folgt nach (1) leicht, daß $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}_{\bar{k}}} \vee \tau_l)$ ein T_1-Raum ist; wir müssen also noch die Bedigung (N) nachweisen: es sei $S \in \mathfrak{S}_{\bar{k}}$, $A \in \mathfrak{F}_0(X)$ und $A \subset X-S$; $X-A$ ist offen, also existiert nach (β) zu jedem $x \in S$ eine offene Menge V_x und ein $T_x \in \mathfrak{S}_{\bar{k}}$ mit $x \in V_x \subset T_x$ und $T_x \cap A = \emptyset$; es ist $S \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n} \subset T_{x_1} \cup \ldots \cup T_{x_n} = S_1 \in \mathfrak{S}_{\bar{k}}$ und $A \cap S_1 = \emptyset$; nun gilt $\overline{X-S_1} \subset X-S$: ist $y \in S$, so existiert ein $j \in \{1,\ldots,n\}$ mit $y \in V_{x_j}$ und es ist $V_{x_j} \cap (X-S_1) = \emptyset$, folglich ist $y \notin \overline{X-S_1}$; insgesamt gilt also $A \subset X-S_1 \subset \overline{X-S_1} \subset X-S$, d.h. die Bedingung (N).

Bemerkung. Es sei $\mathfrak{S}_k = \{K \subset X\colon K$ kompakt$\}$; offenbar gilt dann für $\mathfrak{F}_0(X)$ (und für $\mathfrak{F}(X)$) $\tau_{\mathfrak{S}_{\bar{k}}} \vee \tau_l \subset \tau_{\mathfrak{S}_k} \vee \tau_l$. Ist nun $(\mathfrak{F}(X), \tau_{\mathfrak{S}_{\bar{k}}} \vee \tau_l)$ Hausdorffsch, so gilt sogar $\tau_{\mathfrak{S}_{\bar{k}}} \vee \tau_l = \tau_{\mathfrak{S}_k} \vee \tau_l$, denn nach [4] (Satz 3.8a) ist (sogar für einen beliebigen Raum X) $(\mathfrak{F}(X), \tau_{\mathfrak{S}_k} \vee \tau_l)$ kompakt. Diese Schlußweise gilt aber im allgemeinen nicht für $\mathfrak{F}_0(X)$.

(2) Diese Schlußweise zeigt, daß aus dem T_1-Axiom und aus (N) das T_2-Axiom (für $\tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau$) folgt.

(b) *X sei ein T_1-Raum, $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}(X)$. Dann ist $(\mathfrak{F}_0(X), \tau_{\mathfrak{S}} \vee \tau_l)$ genau dann regulär, wenn X normal ist.*

Dieser Satz wurde von Michael [8] bewiesen.

2. X sei ein topologischer Raum. Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Moore-Smith-Folge in $\mathfrak{F}_0(X)$ (bzw. in $\mathfrak{P}(X)$), so definiert man bekanntlich:

$$\liminf A_i = \{x \in X\colon \text{zu jeder Umgebung } U \text{ von } x \text{ gibt es ein Ende } I_U \text{ von } I \text{ mit } A_i \cap U \neq \emptyset \text{ für } i \in I_U\},$$

$$\limsup A_i = \{x \in X\colon \text{zu jeder Umgebung } U \text{ von } x \text{ gibt es eine konfinale Teilmenge } I_U \text{ von } I \text{ mit } A_i \cap U \neq \emptyset \text{ für } i \in I_U\}.$$

Gilt $\liminf A_i = \limsup A_i = A$, so heißt (A_i) "abgeschlossen konvergent" gegen A und A der "abgeschlossene Limes" von (A_i); wir schreiben $A_i \xrightarrow{a} A$.

Bemerkungen:

a) Da bekanntlich konfinale Teilfamilien von Moore-Smith-Folgen nicht für alle Belange ausreichend sind [3], könnte man es für zweckmäßiger halten, $\limsup A_i$ zu ersetzen durch

$$\limsup{}^* A_i = \{x \in X\colon \text{zu jeder Umgebung } U \text{ von } x \text{ gibt es eine Moore-Smith-Teilfolge } (B_k)_{k\in K_U} \text{ von } (A_i) \text{ mit } B_k \cap U \neq \emptyset \text{ für } k \in K_U\}.$$

Offenbar gilt $\limsup A_i \subset \limsup{}^* A_i$; wir werden jedoch gleich sehen, daß beide Mengen sogar gleich sind.

Es sei $F = \{0, 1\}$ das zusammenhängende Punktepaar, d.h. offene Mengen seien $\emptyset$, $\{0\}$, F. Ist $C(X, F)$ die Menge der stetigen Abbildungen von X in F und bezeichnet χ_A die charakteristische Funktion der Menge $A \subset X$, so kann man $\mathfrak{F}(X)$ mit $C(X,F)$ mittels der Abbildung $\mathfrak{F}(X) \ni A \to \chi_A \in C(X,F)$ identifizieren (entsprechend $\mathfrak{F}_0(X)$ mit $C(X,F)-\{\chi_\emptyset\}$) [4].

Wir benötigen nun noch den Begriff der "stetigen Konvergenz" für Abbildungen zwischen zwei topologischen Räumen:

(7) *X, Y seien topologische Räume, $(f_i)_{i\in I}$ sei eine Moore-Smith-Folge aus Y^X; (f_i) konvergiert stetig gegen $f \in Y^X$, $f_i \xrightarrow{s} f$, wenn zu jedem $x \in X$ und zu jeder Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x und ein $i_0 \in I$ existieren mit $f_i(U) \subset V$ für $i \geqslant i_0$* [5].

Nun gilt:

(8) *$(A_i)_{i\in I}$ sei eine Moore-Smith-Folge aus $\mathfrak{F}_0(X)$ (oder aus $\mathfrak{P}(X)$), es sei $A \in \mathfrak{F}_0(X)$ $(\in \mathfrak{P}(X))$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(3) Man vergleiche etwa [7].
(4) Siehe [1], S. 27.
(5) Bezüglich der stetigen Konvergenz vgl. man [10].

(α) $\chi_{A_i} \xrightarrow{s} \chi_A$,

(β) $\limsup^* A_i \subset A$,

(γ) $\limsup A_i \subset A$.

Beweis. (α)⇒(β): Sei $x \in \limsup^* A_i$ und $x \notin A$; dann ist $\chi_A(x) = 0$, d.h. nach (α) existiert eine Umgebung U von x und ein $i_0 \in I$ mit $\chi_{A_i}(U) \subset \{0\}$ und damit $A_i \cap U = \emptyset$ für $i \geqslant i_0$; wegen $x \in \limsup^* A_i$ existiert zu U eine Moore-Smith-Teilfolge $(B_k)_{k \in K_U}$ mit $B_k \cap U \neq \emptyset$; sei $B_k = A_{i_k}$; zu i_0 gibt es dann ein $k_0 \in K_U$, so daß $i_k \geqslant i_0$ für $k \geqslant k_0$ gilt; also gilt $A_{i_{k_0}} \cap U = \emptyset$ und $A_{i_{k_0}} \cap U = B_{k_0} \cap U \neq \emptyset$ Widerspruch.

(β)⇒(γ) ist klar; (γ)⇒(α): es genügt die x mit $\chi_A(x) = 0$, also $x \notin A$ zu betrachten; dann ist $x \notin \limsup A_i$, d.h. es existiert eine Umgebung U von x und ein i_0 mit $A_i \cap U = \emptyset$ für $i \geqslant i_0$, d.h. $\chi_{A_i}(U) \subset \{0\}$ für $i \geqslant i_0$.

Die Äquivalenz von (α) und (γ) findet man in [1]. Aus (8) folgt unmittelbar $\limsup^* A_i = \limsup A_i$

b) Für liminf gilt analog:

(9) *$(A_i)_{i \in I}$ sei eine Moore-Smith-Folge aus $\mathfrak{F}_0(X)$, es sei $A \in \mathfrak{F}_0(X)$. Dann gilt $A_i \xrightarrow{\tau_l} A$ genau dann, wenn $A \subset \liminf A_i$ ist.*

Diese Aussage findet man auch in [4], wo der abgeschlossene Limes eingehend untersucht wird.

Wir betrachten nun zunächst einen metrischen Raum (X, ϱ). In $\mathfrak{F}_0(X)$ kann man Metriken einführen, zum Beispiel die Busemannsche Metrik (vgl. [3] oder [11]):

$$\varrho_p(A, B) = \sup\left\{|\alpha(x, A) - \alpha(x, B)| \exp\left(-\varrho(p, x)\right) \colon x \in X\right\},$$

dabei ist p ein beliebiger Punkt aus X und $\alpha(x, A)$ bezeichnet den Abstand von $\{x\}$ und A; die Metriken ϱ_p und ϱ_q für $p, q \in X$ sind uniform und damit topologisch äquivalent.

Ist (X, ϱ) nicht beschränkt und betrachtet man nur $\sigma(A, B) = \sup\{|\alpha(x, A) - \alpha(x, B)| \colon x \in X\}$, so kann $\sigma(A, B)$ unendlich werden und ist damit nur eine Spanne (*écart*) auf $\mathfrak{F}_0(X)$. $\sigma(A, B)$ kann man noch etwas anders schreiben; dazu sei $\bar{\alpha}(A, B) = \sup\{\alpha(y, A) \colon y \in B\}$.

(10) *Für $A, B \in \mathfrak{F}_0(X)$ gilt:*

$$\sigma(A, B) = \max\{\bar{\alpha}(A, B), \bar{\alpha}(B, A)\}.$$

Beweis [6]: Ist $\max\{\bar{\alpha}(A, B), \bar{\alpha}(B, A)\}$ endlich, so existiert zu beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $y \in B$ mit $\bar{\alpha}(A, B) - \varepsilon < \alpha(y, A) = |\alpha(y, A) - \alpha(y, B)|$ $\leqslant \sigma(A, B)$, also hat man $\bar{\alpha}(A, B) \leqslant \sigma(A, B)$; analog gilt $\bar{\alpha}(B, A) \leqslant \sigma(A, B)$. Ist etwa $\bar{\alpha}(A, B) = +\infty$, so gilt

$$+\infty = \sup\{\alpha(y, A) \colon y \in B\} = \sup\{|\alpha(y, A) - \alpha(y, B)| \colon y \in B\} \leqslant \sigma(A, B),$$

also $\sigma(A, B) = +\infty$, d.h. man hat auch hier $\max\{\bar{\alpha}(A, B), \bar{\alpha}(B, A)\} \leqslant \sigma(A, B)$. Umgekehrt sei x beliebig aus X; zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $y_\varepsilon \in B$ mit $\varrho(x, y_\varepsilon) < \alpha(x, B) + \varepsilon$, foglich ist $\alpha(x, A) \leqslant \alpha(y_\varepsilon, A) + \varrho(x, y_\varepsilon) < \alpha(y_\varepsilon, A) + \alpha(x, B) + \varepsilon$, d.h. es gilt $\alpha(x, A) - \alpha(x, B) < \alpha(y_\varepsilon, A) + \varepsilon \leqslant \bar{\alpha}(A, B)$; insgesamt erhält man so

$$|\alpha(x, A) - \alpha(x, B)| \leqslant \max\{\bar{\alpha}(A, B), \bar{\alpha}(B, A)\},$$

also

$$\sigma(A, B) \leqslant \max\{\bar{\alpha}(A, B), \bar{\alpha}(B, A)\}.$$

Die Spanne σ ist uniform äquivalent zu beschränkten Spannen ([2], S. 11-12); wir verwenden hier als Schränkungstransformation $f(u) = \min\{u, 1\}$ für $0 \leqslant u \leqslant +\infty$: wir setzen also $\sigma^* = f \circ \sigma$, d.h.

$$\sigma^*(A, B) = \min\{\sigma(A, B), 1\} = \min\left\{\max\{\bar{\alpha}(A, B), \bar{\alpha}(B, A)\}, 1\right\}$$

für $A, B \in \mathfrak{F}_0(X)$. Man sieht leicht, daß dann σ^* eine Metrik für $\mathfrak{F}_0(X)$ ist. Man kann jedoch noch auf eine andere Weise zu σ^* gelangen: wir wenden die Schränkungsformation zunächst auf (X, ϱ) an, d.h. wir setzen

$$\varrho^*\colon\ \varrho^*(x, y) = \min\{\varrho(x, y), 1\}.$$

Dann ist (X, ϱ^*) ein metrischer Raum und die identische Abbildung von (X, ϱ) auf (X, ϱ^*) ist ein uniformer Isomorphismus und damit eine topologische Abbildung, d.h. es ist $\mathfrak{F}_0\big((X, \varrho)\big) = \mathfrak{F}_0\big((X, \varrho^*)\big)$. Da (X, ϱ^*) beschränkt ist, so ist

$$\sigma_*\colon\ \sigma_*(A, B) = \max\{\bar{\alpha}^*(A, B), \bar{\alpha}^*(B, A)\}$$

eine Metrik für $\mathfrak{F}_0(X)$, wobei $\bar{\alpha}^*$ die $\bar{\alpha}$-Bildung bezüglich der Metrik ϱ^* bedeutet, d.h. es ist

$$\bar{\alpha}^*(A, B) = \sup\left\{\inf\{\min\{\varrho(a, y), 1\} \colon a \in A\} \colon y \in B\right\}.$$

Wir zeigen zunächst, daß

$$\inf\{\min\{\varrho(a, y), 1\} \colon a \in A\} = \min\{\inf\{\varrho(a, y) \colon a \in A\}, 1\}$$

gilt: für $a \in A$ gilt $\varrho(a, y) \geqslant \inf\{\varrho(a, y) \colon a \in A\}$ und folglich $\min\{\varrho(a, y), 1\} \geqslant \min\{\inf\{\varrho(a, y) \colon a \in A\}, 1\}$; ist nun $\min\{\varrho(a, y), 1\} \geqslant z$ für $a \in A$, so erhält man sofort $\min\{\inf\{\varrho(a, y) \colon a \in A\}, 1\} \geqslant z$.

Folglich gilt:

$$\sigma_*(A, B) = \max\left\{\sup\{\min\{\alpha(y, A), 1\} \colon y \in B\}, \sup\{\min\{\alpha(x, B), 1\} \colon x \in A\}\right\}.$$

Wir können nun zeigen:

(11) *Für $A, B \in \mathfrak{F}_0(X)$ gilt $\sigma^*(A, B) = \sigma_*(A, B)$.*

[6] Rinow ([11], S. 57) zeigte dies für beschränkte $A, B \in \mathfrak{F}_0(X)$.

Beweis. a) Es sei $\bar{\alpha}(A, b) \geqslant 1$ oder $\bar{\alpha}(B, A) \geqslant 1$; dann ist $\sigma^*(A, B) = 1$; sei etwa $\bar{\alpha}(A, B) = \sup\{\alpha(y, A)\colon y \in B\} \geqslant 1$:

(α) es sei $\bar{\alpha}(A, B) > 1$, dann existiert ein $y_0 \in B$ mit $\alpha(y_0, A) > 1$, woraus $\sup\{\min\{\alpha(y, A), 1\}\colon y \in B\} \geqslant 1$ und damit $\sup\{\min\{\alpha(y, A), 1\}\colon y \in B\} = 1$ folgt; da auch $\sup\{\min\{\alpha(x, B), 1\}\colon x \in A\} \leqslant 1$ ist, so gilt $\sigma_*(A, B) = 1$;

(β) ist $\bar{\alpha}(A, B) = 1$, so gilt $\alpha(y, A) \leqslant 1$ für $y \in B$, also $\min\{\alpha(y, A), 1\} = \alpha(y, A)$ und damit ist wieder $\sup\{\min\{\alpha(y, A), 1\}\colon y \in B\} = 1$.

b) Es sei etwa $\bar{\alpha}(B, A) \leqslant \bar{\alpha}(A, B) < 1$, also $\sigma^*(A, B) = \bar{\alpha}(A, B)$; dann ist $\alpha(y, A) < 1$ für jedes $y \in B$, also ist $\sup\{\min\{\alpha(y, A), 1\}\colon y \in B\} = \sigma^*(A, B)$; analog ist $\sup\{\min\{\alpha(x, B), 1\}\colon x \in A\} = \bar{\alpha}(B, A) \leqslant \sigma^*(A, B)$; d.h. es gilt auch im Falle b) $\sigma_*(A, B) = \sigma^*(A, B)$.

Wir setzen nun für $A, B \in \mathfrak{F}_0(X)$ $\varrho_H(A, B) = \sigma^*(A, B) = \sigma_*(A, B)$ und nennen ϱ_H die *Hausdorffsche Metrik* für $\mathfrak{F}_0(X)$. Auf der Menge $\mathfrak{F}_b(X)$ aller beschränkten Mengen aus $\mathfrak{F}_0(X)$ ist die Spanne σ offensichtlich eine Metrik und uniform äquivalent zu ϱ_H. Diese Metrik hat Hausdorff [6] angegeben. Hausdorff hat auch den Zusammenhang zwischen der metrischen Konvergenz bezüglich σ und der abgeschlossenen Konvergenz untersucht. Er zeigte:

(a) *Ist (A_n) eine Fréchet-Folge aus $\mathfrak{F}_b(X)$ mit $\sigma(A_n, A) \to 0$, $A \in \mathfrak{F}_b(X)$, so folgt $A_n \xrightarrow{a} A$.*

(b) *Ist X kompakt, so folgt aus $A_n \xrightarrow{a} A$ auch $\sigma(A_n, A) \to 0$.*

Busemann [3] bewies:

(a) *Ist (A_n) eine Fréchet-Folge aus $\mathfrak{F}_0(X)$ mit $\varrho_p(A_n, A) \to 0$, $A \in \mathfrak{F}_0(X)$, so folgt $A_n \xrightarrow{a} A$.*

(b) *Ist X finit kompakt (d.h. gilt für X der Satz von Bolzano-Weierstrass), so folgt aus $A_n \xrightarrow{a} A$ auch $\varrho_p(A_n, A) \to 0$.*

Wir wollen nun noch zeigen, daß die Kompaktheit und die finite Kompaktheit sich sogar durch das Zusammenfallen von metrischer und abgeschlossener Konvergenz charakterisieren lassen.

(12) Satz. *(X, ϱ) sei ein metrischer Raum.*

(a) *Folgt in $\mathfrak{F}_0(X)$ aus $A_n \xrightarrow{a} A$ stets $\varrho_p(A_n, A) \to 0$, so ist (X, ϱ) finit kompakt.*

(b) *Folgt in $\mathfrak{F}_0(X)$ aus $A_n \xrightarrow{a} A$ stets $\varrho_H(A_n, A) \to 0$, so ist (X, ϱ) kompakt.*

Beweis. (a) Annahme, es existiert eine beschränkte abzählbare Menge $M = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ (wir können $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ annehmen), die keinen Häufungspunkt besitzt. Es sei $F_n = \{x_0, x_n\}$, $F = \{x_0\}$; dann gilt $F_n \xrightarrow{a} F$: es ist $F \subset \liminf F_n \subset \limsup F_n$; sei $q \in \limsup F_n$ und $q \neq x_0$; da q nicht Häufungspunkt von M sein kann, existiert eine Umgebung U von q mit $U \cap M \subset \{q\}$ im Widerspruch zu $q \in \limsup F_n$. Nach Voraussetzung gilt dann $\varrho_{x_0}(F_n, F) \to 0$;

$$\begin{aligned}\varrho_{x_0}(F_n, F) &= \sup\{|\alpha(x, \{x_0, x_n\}) - \alpha(x, \{x_0\})| \exp(-\varrho(x, x_0))\colon x \in X\} \\ &= \sup\{|\min\{\varrho(x, x_0), \varrho(x, x_n)\} - \varrho(x, x_0)| \exp(-\varrho(x, x_0))\colon x \in X\};\end{aligned}$$

es ist

$$\begin{aligned}|\min\{\varrho(x_n, x_0), \varrho(x_n, x_n)\} - \varrho(x_n, x_0)| \exp(-\varrho(x_n, x_0)) \\ = \varrho(x_n, x_0) \exp(-\varrho(x_n, x_0)) \leqslant \varrho_{x_0}(F_n, F) \to 0,\end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$\varrho(x_n, x_0) \exp(-\varrho(x_n, x_0)) \to 0;$$

hieraus folgt, daß die Menge $\{z_n = \varrho(x_0, x_n)\colon n = 1, 2, 3, \ldots\}$ unendlich (es ist $x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \ldots$); nach Voraussetzung ist aber $\{z_n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ beschränkt und damit besitzt (z_n) eine konvergente Teilfolge $z_{n_p} \to \beta$; dann folgt $z_{n_p} \exp(-z_{n_p}) \to \beta \exp(-\beta)$, also ist $\beta \exp(-\beta) = 0$ und damit ist $\beta = 0$; d.h. es gilt $\varrho(x_0, x_{n_p}) \to 0$, also $x_{n_p} \to x_0$ im Widerspruch dazu, daß M keinen Häufungspunkt besitzt.

(b) Ist X nicht kompakt, so existiert eine Menge $M = \{x_0, x_1, \ldots\}$ in X, die keinen Häufungspunkt besitzt; es gilt wieder $F_n \xrightarrow{a} F$ und daraus folgt

$$\varrho_H(F_n, F) \to 0;$$

$$\begin{aligned}\varrho_H(F_n, F) = \sigma_*(F_n, F) = \max\Big\{&\sup\{\min\{\alpha(y, \{x_0, x_n\}), 1\}\colon y \in \{x_0\}\}, \\ &\sup\{\min\{\alpha(x, \{x_0\}), 1\}\colon x \in \{x_0, x_n\}\}\Big\} \\ = \max\{0, \sup\{0, &\min\{\varrho(x_0, x_n), 1\}\} = \min\{\varrho(x_0, x_n), 1\}\};\end{aligned}$$

mit $\min\{\varrho(x_0, x_n), 1\} \to 0$ gilt aber auch $\varrho(x_n, x_0) \to 0$, Widerspruch.

Folgerung. *Im allgemeinen sind die Metriken ϱ_p und ϱ_H nicht topologisch und damit auch nicht uniform äquivalent.* Es gilt jedoch: *Die identische Abbildung von $(\mathfrak{F}_0(X), \varrho_H)$ auf $(\mathfrak{F}_0(X), \varrho_p)$ ist uniform stetig.*

Beweis. Es ist

$$\varrho_p(A, B) \leqslant \sup\{|\alpha(x, A) - \alpha(x, B)|\colon x \in X\} = \sigma(A, B)$$

und σ ist uniform äquivalent zu ϱ_H.

Zum Schluß der Arbeit wollen wir noch einen Satz von Rinow ([11], S. 72) über die Konvergenz der Graphen stetiger Funktionen verallgemeinern. Allgemein kann man folgende Aufgabe betrachten:

X und Y seien topologische Räume, Y sei Hausdorffsch, es sei $f \in Y^X$; $\Gamma(f)$ bezeichne den Graphen von f, d.h. die Menge $\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y\colon y = f(x)\}$. Ist f stetig, so ist $\Gamma(f)$ abgeschlossen in $X \times Y$. Die Abbildung $\Gamma\colon f \to \Gamma(f)$ von Y^X in $\mathfrak{P}(X \times Y)$ ist eineindeutig; es ist $\Gamma(C(X, Y)) \subset \mathfrak{F}_0(X \times Y)$. lim bezeichne irgendeinen Konvergenzbegriff in $C(X, Y)$ (oder in Y^X), a-lim bezeichne den abgeschlossenen Limes. Die Frage lautet nun: *Welche Bedingungen müssen X und Y erfüllen, damit $(C(X, Y), \lim)$ und $(\Gamma C(X, Y), \text{a-}\lim)$ (im Limessinne) homöomorph sind?*

Wir betrachten hier als Konvergenzbegriff nur die stetige Konvergenz (siehe (7)). Der folgende Satz ist bekannt ([5]; der Beweis wird hier jedoch mit Hilfe der Äquivalenzen (8) und (9) geführt).

(13) SATZ. *X, Y seien topologische Räume, Y sei Hausdorffsch; $(f_i)_{i \in I}$ sei eine Moore-Smith-Folge in $C(X, Y)$ (oder in Y^X) mit $f_i \xrightarrow{s} f \in C(X, Y)$. Dann gilt $\Gamma(f_i) \xrightarrow{a} \Gamma(f)$.*

Beweis: a) Wir zeigen $\chi_{\Gamma(f_i)} \xrightarrow{s} \chi_{\Gamma(f)}$; es genügt ein $(x, y) \notin \Gamma(f)$ zu betrachten, dann ist $\chi_{\Gamma(f)}(x, y) = 0$ und $y \neq f(x)$; es existieren also Umgebungen V_1, V_2 von y bzw. $f(x)$ in Y mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$; wegen $f_i \xrightarrow{s} f$ gibt es eine Umgebung U von x und ein i_0 mit $f_i(U) \subset V_2$ für $i \geqslant i_0$; dann gilt aber für $i \geqslant i_0$ $U \times V_1 \cap \Gamma(f_i) = \emptyset$, d.h. es ist $\chi_{\Gamma(f_i)}(U \times V_1) \subset \{0\}$ und $U \times V_1$ ist Umgebung von (x, y).

b) Es bleibt noch $\Gamma(f_i) \xrightarrow{u} \Gamma(f)$ zu zeigen: $W_1, \ldots, W_n$ seien offene Mengen in $X \times Y$ mit $\Gamma(f) \cap W_k \neq \emptyset$, $k = 1, \ldots, n$; sei $(x_k, f(x_k)) \in \Gamma(f) \cap W_k$, dann gibt es Umgebungen U_k von x_k und V_k von $f(x_k)$ mit $U_k \times V_k \subset W_k$; nach Voraussetzung gibt es dann $i_k \in I$, $k = 1, \ldots, n$, mit $f_i(x_k) \subset V_k$ für $i \geqslant i_k$; sei $i_0 \in I$ mit $i_0 \geqslant i_1, \ldots, i_0 \geqslant i_n$; dann ist aber $\Gamma(f_i) \cap W_k \neq \emptyset$ für $i \geqslant i_0$ und $k = 1, \ldots, n$.

Wir erinnern noch an folgende Definition: Ein topologischer Raum heißt *lokalperipherkompakt*, wenn jeder Punkt des Raumes eine Umgebungsbasis, deren Umgebungen eine kompakte Begrenzung haben, besitzt. Als teilweise Umkehrung von (13) beweisen wir nun:

(14) SATZ. *X sei lokalzusammenhnägend, Y sei ein Hausdorffscher, lokalperipherkompakter Raum; $(f_i)_{i \in I}$ sei eine Moore-Smith-Folge in $C(X, Y)$, es sei $f \in C(X, Y)$ und es gelte $\Gamma(f_i) \xrightarrow{a} \Gamma(f)$. Dann folgt $f_i \xrightarrow{s} f$.*

Beweis. Es gelte $f_i \xrightarrow{s} f$ nicht. Dann gibt es einen Punkt $x \in X$ und eine Umgebung V von $f(x)$, so daß zu jeder Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ eine konfinale Teilfamilie $(f_i)_{i \in I_U}$ existiert mit $f_i(U) \not\subset V$ für $i \in I_U$. (1). Dabei sei $\mathfrak{U}(x)$ eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden Umgebungen von x. Die Begrenzung $b(V)$ von V darf man nach Voraussetzung als kompakt wählen. Sei U beliebig aus $\mathfrak{U}(x)$; nach (1) gibt es eine Folge $(x_{i,U})_{i \in I_U}$ aus U mit $f_i(x_{i \in U}) \notin V$ für $i \in I_U$. (2). Nach Voraussetzung gilt $\Gamma(f) \subset \liminf \Gamma(f_i)$, d.h. zu der Umgebung $U \times V$ von $(x, f(x))$ gibt es ein Ende I_U^1 und Punkte $z_{i,U} \in U$ mit $f_i(z_{i,U}) \in V$ für $i \in I_U^1$. (3). $I_U^2 = I_U \cap I_U^1$ ist konfinale Teilmenge von I und nach (3) und (2) gilt für $i \in I_U^2$: $f_i(U) \cap V \neq \emptyset$ und $f_i(U) \cap (Y - V) \neq 0$; da $f_i(U)$ zusammenhängend ist, muß $f_i(U) \cap b(V) \neq \emptyset$ für $i \in I_U^2$ gelten; d.h. es gibt $v_{i,U} \in U$ mit $f_i(v_{i,U}) \in b(V)$ für $i \in I_U^2$; $b(V)$ ist ein kompakter Raum; also gibt es eine Moore-Smith-Teilfolge $(b_{k,U})_{k \in K_U}$ von $(f_i(v_{i,U}))_{i \in I_U^2}$ und ein $y_U \in b(V)$ mit $b_{k,U} \to y_U$. $(y_U)_{U \in \mathfrak{U}(x)}$ ist ebenfalls eine Moore-Smith-Folge aus $b(V)$ ($\mathfrak{U}(x)$ wie üblich gerichtet), d.h. es existiert eine Teilfolge $(z_p)_{p \in P}$ von (y_U) mit $z_p \to y \in b(V)$. $U \times W$ sei eine beliebige Umgebung von (x, y) (wir können $U \in \mathfrak{U}(x)$ und W offen annehmen); zu U gibt es ein p_0 mit $U_p \subset U$ für $p \geqslant p_0$; setzen wir $U_0 = U_{p_0}$, so ist $U_0 \subset U$; wegen $b_{k,U_0} \to y_{U_0}$ und W offen gilt $b_{k,U_0} \in W$ für $k \geqslant k_0 (\in K_{U_0})$; nach Konstruktion ist $(b_{k,U_0})_{k \in K_{U_0}}$ Teilfolge von $(f_i(v_i, U_0))_{i \in I_{U_0}^2}$, sei $b_{k,U_0} = f_{i_k}(v_{i_k,U_0})$; dann ist also

$$\Gamma(f_{i_k}) \ni (v_{i_k,U_0}, f_{i_k}(v_{i_k,U_0})) \in U_0 \times W \subset U \times W; \quad (f_{i_k})_{k \in \{j \in K_{U_0}:\, j \geqslant k_0\}}$$

ist eine Teilfolge von (f_i), d.h. wegen $\limsup^* \Gamma(f_i) \subset \Gamma(f)$ (vgl. (8)) ist $(x, y) \in \Gamma(f)$, d.h. es ist $y = f(x)$ im Widerspruch zu $y \in b(V)$.

(15) FOLGERUNG ([11], S. 72). *X und Y seien metrische Räume, X sei lokalzusammenhängend, Y sei lokalkompakt, $(f_n)_{n \in N}$ sei eine (Fréchet-) Folge aus $C(X, Y)$, es sei $f \in C(X, Y)$ und es gelte $\Gamma(f_n) \xrightarrow{a} \Gamma(f)$. Dann folgt $f_n \xrightarrow{s} f$.*

Literaturverzeichnis

[1] R. Arens und J. Dugundji, *Topologies for function spaces*, Pacific Math. Journ. 1 (1951), S. 5-31.

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chapter 9, Paris 1958.

[3] H. Busemann, *The geometry of geodesics*, New York 1955.

[4] J. Flachsmeyer, *Verschiedene Topologisierungen im Raum der abgeschlossenen Teilmengen*, Math. Nachr. 26 (1964), S. 321-337.

[5] O. Frink, *Topology in lattices*, Trans. Amer. Math. Soc. 51 (1942), S. 569-582.

[6] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

[7] J. L. Kelley, *General topology*, Princeton, N. J., 1955.

[8] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), S. 152 182.

[9] H. Poppe, *Eine Bemerkung über Trennungsaxiome im Raum der abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes*, Arch. Math. 16 (1965), S. 197-199.

[10] — *Stetige Konvergenz und der Satz von Ascoli und Arzelá*, Mathem. Nachr. 30 (1965), S. 87-122.

[11] W. Rinow, *Die innere Geometrie der metrischen Räume*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

Reçu par la Rédaction le 8. 7. 1965