Sur une propriété des ensembles linéaires

par

J. Mycielski (Wrocław) et **W. Sierpiński** (Warszawa)

Nous nous occuperons ici des ensembles E de points d'une droite, dits tout court ensembles $\boldsymbol{P}$, jouissant de la propriété suivante:

$\boldsymbol{P}$. *Toute translation de l'ensemble E le long de la droite ou bien coïncide avec E, ou bien est disjointe de E.*

Voici quelques exemples d'ensembles $\boldsymbol{P}$: l'ensemble de tous les nombres entiers; l'ensemble de tous les nombres $k+\sqrt{2}$, où k est un entier; l'ensemble de tous les nombres rationnels; l'ensemble de tous les nombres algébriques; l'ensemble de tous les nombres réels. Le second de ces ensembles ne contient pas le nombre 0.

Théorème 1. *Pour que l'ensemble linéaire E soit un ensemble $\boldsymbol{P}$, il faut et il suffit que l'on ait $y+z-x \in E$ pour tous $x, y, z \in E$.*

Démonstration. Soit E un ensemble $\boldsymbol{P}$. Désignons par $E(a)$ la translation de l'ensemble E le long de la droite de longueur a. E étant un ensemble $\boldsymbol{P}$, il en résulte que si pour un $t_0 \in E$ on a $t_0+a \in E$, alors $t+a \in E$ pour tout $t \in E$. Soient $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$ et posons $a = z-x$. On aura $x+a = z \in E$, et, comme $y \in E$, on trouve $y+a \in E$, c'est-à-dire $y+z-x \in E$. La condition du théorème 1 est donc nécessaire.

Soit maintenant E un ensemble linéaire tel que pour $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$ on a $y+z-x \in E$. Soit ensuite a un nombre réel tel que pour un $x \in E$ on a $y = x+a \in E$. Si $z \in E$ on a, par hypothèse $z+a = y+z-x \in E$, donc $z+a \in E$. D'autre part, si $x \in E$, $x+a \in E$ et si $y+a \in E$, on trouve, d'après l'hypothèse, $y = (y+a)+x-(x+a) \in E$, donc $y \in E$. Cela prouve que les ensembles E et $E(a)$ coïncident. La condition du théorème 1 est donc suffisante.

Corollaire 1. *Pour tout ensemble linéaire E il existe un ensemble $H(E)$ contenant E, ayant la propriété $\boldsymbol{P}$ et minimal, c'est-à-dire contenu dans tout ensemble $\boldsymbol{P}$ contenant E. De plus, si $\overline{\overline{E}} \geqslant 2$, alors $\overline{\overline{H(E)}} = \overline{\overline{E}} + \aleph_0$.*

Démonstration. Tel est l'ensemble de tous les nombres de la forme $e_0 \pm (e_1-e_0) \pm \ldots \pm (e_n-e_0)$, où $n \geqslant 0$, e_0 est un nombre quelconque de E choisi une fois pour toutes et $e_i \in E$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Soient x, y et z trois nombres de cette forme. Alors il est évident que $y+z-x$ est aussi un nombre de cette forme. Donc, d'après le théorème 1, notre ensemble est un ensemble **P**. Pour démontrer qu'il est minimal, il faut vérifier que $e_0 \pm (e_1 - e_0) \pm \ldots \pm (e_n - e_0) \in Z$ pour tout ensemble Z contenant E et ayant la propriété **P**. Nous procéderons par induction par raport à n. On a $e_0 \in Z$, puisque $e_0 \in E \subset Z$. Soit maintenant $y = e_0 \pm (e_1 - e_0) \pm \ldots \pm (e_n - e_0) \in Z$, $z = e_0$ et $x = e_{n+1}$ ou bien $z = e_{n+1}$ et $x = e_0$. D'après le théorème 1 nous aurons

$$y + z - x = e_0 \pm (e_1 - e_0) \pm \ldots \pm (e_n - e_0) \pm (e_{n+1} - e_0) \in Z ,$$

et notre assertion est démontrée par induction. Or, il est évident que si $\overline{\overline{E}} \geqslant 2$, la puissance de notre ensemble est $\overline{\overline{E}} + \aleph_0$. Le corollaire 1 est ainsi démontré.

COROLLAIRE 2. *Pour qu'un ensemble linéaire X soit un ensemble* **P**, *il faut et il suffit que X soit un ensemble quotient de la division du groupe additif des nombres réels par un sous-groupe.*

Démonstration. Ce corollaire n'est qu'une autre forme du théorème 1.

COROLLAIRE 3. *Pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m}$ tel que $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$ la droite est une réunion de $\mathfrak{m}$ ensembles* **P** *disjoints, congruents, de puissance $2^{\aleph_0}$.*

Démonstration. Soit R le groupe additif des nombres réels, B — une base de Hamel, $X \subset B$, $\overline{\overline{X}} = 2^{\aleph_0}$, $\overline{\overline{B - X}} = \mathfrak{m}$ et $G(X)$ le groupe des nombres de la forme $r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n$, où $x_i \in X$ et r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont rationnels. Alors $\overline{\overline{R/G(X)}} = \mathfrak{m} + \aleph_0 = \mathfrak{m}$ et les éléments du groupe facteur $R/G(X)$ sont des translations de $G(X)$. Ainsi, d'après le corollaire 2, $R/G(X)$ est la décomposition demandée.

THÉORÈME 2. *La droite R n'est pas une réunion d'un nombre fini de sous-ensembles propres ayant la propriété* **P**.

Démonstration. Nous démontrerons le lemme suivant qui, en vertu du corollaire 2, implique évidemment le théorème 2.

LEMME. *Un groupe A abélien et divisible n'est pas une réunion d'une suite finie de ses sous-ensembles quotients de division par des sous-groupes propres de A.*

Démonstration du lemme. Nous utiliserons la proposition connue suivante (voir A. Białynicki-Birula, J. Browkin et A. Schinzel [1]).

(L). *Si G est un groupe infini et $G_1, G_2, \ldots, G_n$ une suite de sous-groupes de G, telle que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_i = G \quad \textit{et} \quad \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} G_i \neq G \quad \textit{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, n ,$$

alors $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ est infini.

Supposons maintenant que le lemme soit en défaut, c'est-à-dire que pour un groupe abélien divisible A on ait

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i + a_i) ,$$

où A_i sont des sous-groupes propres de A et $a_i \in A$. Soit B le sous-groupe engendré par l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et φ l'homomorphisme naturel de A sur A/B. Nous prouverons que

$$\varphi(A_i) \neq A/B \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

En effet, dans le cas contraire on aurait $\varphi(A_{i_0}) = A/B$ pour un i_0 et $B \cup A_{i_0}$ serait un ensemble engendrant A. Soit $C = B \cap A_{i_0}$ et soit ψ l'homomorphisme naturel de A sur A/C. Alors $\psi(B) \cup \psi(A_{i_0})$ engendre A/C et $\psi(B) \cap \psi(A_{i_0}) = (0)$. Ainsi $A/C \cong \psi(B) \oplus \psi(A_{i_0})$ et, A/C étant divisible, il en résulte que $\psi(B)$ est divisible; or, $\psi(B)$ est abélien et engendré par un ensemble fini (l'ensemble $\{\psi(a_1), \ldots, \psi(a_n)\}$), donc $\psi(B) = (0)$. On a donc $B = C \subseteq A_{i_0}$ et $\varphi = \psi$. Ainsi $B \subseteq A_{i_0} \neq A$ et l'égalité $\varphi(A_{i_0}) = A/B$ est impossible.

Comme $\varphi(A_i + a_i) = \varphi(A_i)$, on a

$$A/B = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(A_i) ,$$

et comme $\varphi(A_i) \neq A/B$, il existe une sous-suite $s_1, \ldots, s_k$ de $1, 2, \ldots, n$, telle que

$$\bigcup_{i=1}^{k} \varphi(A_{s_i}) = A/B \quad \text{et} \quad \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \varphi(A_{s_i}) \neq A/B \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, k .$$

Soit $D = \bigcap\limits_{i=1}^{k} \varphi(A_{s_i})$ et χ l'homomorphisme naturel de A/B sur $G = (A/B)/D$, et posons $G_i = \chi(\varphi(A_{s_i}))$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$. Il est évident que G est un groupe divisible infini et que

$$\bigcup_{i=1}^{k} G_i = G, \quad \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} G_i \neq G \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, k, \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^{k} G_i = (0) ,$$

ce qui est en contradiction avec (L). Le lemme est ainsi démontré.

Remarque. En utilisant la proposition (L) on démontre d'une façon analogue qu'*un groupe G est une réunion finie de sous-groupes propres normaux si et seulement si G possède un sous-groupe normal H tel que G/H est un groupe fini qui est une réunion de sous-groupes propres normaux.* Cependant pour les sous-groupes non normaux la question reste ouverte. Pour des résultats affins voir Białynicki-Birula, Browkin et Schinzel [1].

Nous démontrerons maintenant sans l'aide de l'axiome du choix le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires* **P** *ayant la puissance co ntinu.*

Démonstration. J. von Neumann ([2]; cf. S. Ruziewicz et W. Sierpiński [3], p. 17) a construit un ensemble E de nombres réels ayant la puissance du continu, tel que toute suite finie de nombres de E est un système de nombres indépendants algébriquement. Soit H un sous-ensemble quelconque de E ayant la puissance du continu. Comme E a la puissance du continu, il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ tels sous-ensembles de E. Soit $G(H)$ l'ensemble de tous les nombres de la forme $r_1x_1+\ldots+r_nx_n$, où n est un nombre naturel, $x_i \epsilon H$ pour $i=1,2,\ldots,n$ et r_i $(i=1,2,\ldots,n)$ sont des nombres rationnels. On démontre sans peine que $G(H)$ est un ensemble **P**.

Supposons maintenant que H et H_1 soient des sous-ensembles distincts de E. Il existe donc un nombre de l'un de ces ensembles n'appartenant pas a l'autre, par exemple $x_0 \epsilon H$ et $x_0 \notin H_1$. On aura évidemment $x_0 \epsilon G(H)$. Or, si on avait $x_0 \epsilon G(H_1)$, il existerait des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de H et des nombres rationnels $r_1, r_2, \ldots, r_n$, tels que $x_0 = x_1r_1+x_2r_2+ +\ldots+x_nr_n$. Comme $x_0 \neq x_i$ pour $i=1,2,\ldots,n$, cela contredit à la propriété de l'ensemble E. On a donc $G(H)\neq G(H_1)$ pour $H\subset E$, $H_1\subset E$, $H\neq H_1$. Le théorème 3 se trouve ainsi démontré.

PROBLÈME. Soit A un ensemble de nombres entiers ayant la pro-priété **P**, c'est-à-dire une progression arithmétique, de la forme $ak+b$, où $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ Soit $1<a=q_1^{a_1}q_2^{a_2}\ldots q_s^{a_s}$, où q_i $(i=1,2,\ldots,s)$ sont des nombres premiers distincts. Est-il vrai que pour toute décomposition de l'ensemble des nombres entiers en n progressions arithmétiques disjointes dont une est A on a

$$n > a_1(q_1-1)+\ldots+a_s(q_s-1)\ ?$$

On démontre facilement qu'il existe une telle décomposition, où $n = 1+a_1(q_1-1)+\ldots+a_s(q_s-1)$ et que la réponse à notre problème est positive, si $s=1$ (¹).

Note ajoutée le 16 juillet 1965. Nous avons pris récemment connaissance d'un travail de P. Erdös et S. Marcus, *Sur la décomposition de l'espace euclidien en ensembles homogènes*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8 (1957), p. 443-452, où se trouve le corollaire 3 et le théorème 2 de notre article. Dans leur démonstration du théorème 2 ces auteurs utilisent la mesure universelle de Banach et ils remarquent qu'il serait intéressant de trouver une démonstration plus directe; c'est bien ce que réalise notre travail. Mais l'idée de Erdös et Marcus permet d'établir un théorème qui généralise considérablement leurs résultats et le nôtre. Voici cette généralisation.

(¹) Récemment Štefan Znám a démontré que la réponse est positive pour tout s à paraître dans Colloquium Mathematicum).

Soit MB la classe des groupes G ayant une mesure de Banach (c'est-à-dire une mesure m sur l'ensemble de tous les sous-ensembles de G, additive au sens fini, invariante à gauche et telle que $m(G)=1$). On sait qu'un tel groupe possède aussi une mesure de Banach invariante à gauche et à droite. MB est une classe bien vaste, elle contient tous les groupes abéliens, tous les groupes finis et elle est close par rapport aux opérations de sous-groupe, homomorphisme et extension (d'un groupe de MB par un groupe de MB), de plus un groupe G, tel que tous les sous-groupes de G engendrés par les ensembles finis appartiennent à MB, appartient lui-même à MB (voir E. Følner, *Ou groups with full Banach mean value*, Math. Scand. 3 (1955), p. 243-254). Par exemple tout groupe résoluble appartient à MB.

THÉORÈME 4. *Pour tout groupe $G \epsilon$ MB les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *G possède un sous-groupe propre d'indice fini;*

(ii) *G est une réunion finie d'ensembles de la forme aHb, où $a, b \epsilon G$ et H sont des sous-groupes propres de G.*

Démonstration. L'implication (i)→(ii) est évidente. L'implication (ii)→(i) résulte immédiatement du fait qu'un sous-groupe H d'indice infini est nécessairement de mesure de Banach nulle et, cette mesure étant supposée invariante à droite et à gauche, il en est de même de aHb.

Travaux cités

[1] A. Białynicki-Birula, J. Browkin and A. Schinzel, *On the representation of fields as finite unions of subfields*, Coll. Math. 7 (1959), p. 31-32.

[2] J. von Neumann, *Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen*, Math. Annalen 99 (1928), p. 134-141.

[3] S. Ruziewicz et W. Sierpiński, *Sur un ensemble parfait qui a avec toute sa translation au plus un point commun*, Fund. Math. 19 (1932), p. 17-21.

Reçu par la Rédaction le 18. 1. 1965